UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

UM CASO PARTICULAR DE NÚMEROS IRRACIONAIS ESTUDADO POR LICENCIANDOS DE MATEMÁTICA

ISABELA ALCANTARA DO NASCIMENTO

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

UM CASO PARTICULAR DE NÚMEROS IRRACIONAIS ESTUDADO POR LICENCIANDOS DE MATEMÁTICA

ISABELA ALCANTARA DO NASCIMENTO

Sob a orientação da Professora Doutora

DORA SORAIA KINDEL

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática**, no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática.

Seropédica - RJ
Março de 2020

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N244c Nascimento, Isabela Alcantara do, 1994-
UM CASO PARTICULAR DE NÚMEROS IRRACIONAIS ESTUDADO POR LICENCIANDOS DE MATEMÁTICA / Isabela Alcantara do Nascimento. - Rio de Janeiro, 2020.
97 f.

Orientadora: Dora Soraia Kindel.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA, 2020.

1. Números Irracionais. 2. Análise de áudio e vídeo. I. Kindel, Dora Soraia, 1958-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ISABELA ALCANTARA DO NASCIMENTO

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática**, no Curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 25/ 03/ 2020

Prof. Dr. Wellerson Quintaneiro da Silva – CEFET_RJ

Prof. Dr. Ronaldo Malheiros Gregório -UFRRJ

Profª. Drª. Dora Soraia Kindel-UFRRJ
Orientadora

DEDICATÓRIA

À todos os amigos, que me acompanham na vida e no processo de escrita da dissertação. Em especial, ao meu pai, minha mãe, Salva, Pedro, André e Karina.

À minha orientadora pela pessoa humana, professora exemplar e por acreditar no meu trabalho.

Aos professores Wellerson Quintaneiro, Ronaldo Malheiros e Edite Resende pelas contribuições significativas para esta pesquisa.

Aos professores do programa e aos colegas de turma do PPGeduCIMAT pelas trocas e aprendizados.

Ao grupo de pesquisa vinculado ao Laboratório: LOVE_EMIM por dois anos de troca e auxílio na pesquisa. Vocês contribuíram diretamente nessa pesquisa.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Nível Superior -Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001- This study was finaced in part by the Coordenação de Apefeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES)- Finance Code 001.

RESUMO

NASCIMENTO, Isabela Alcântara. **Um caso particular de números irracionais estudado por Licenciandos de Matemática.** 2020. 97 p. Dissertação (Mestre em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2020.

De um modo geral a abordagem dos números irracionais durante os anos escolares na Educação Básica se restringe a alguns poucos exemplos, geralmente são apresentadas as raízes dos números dois e três ($\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$), e o número pi (π). Neste projeto, visamos a realização de uma pesquisa sobre alguns outros números representados na forma de radicais $\sqrt{n}$, sendo n ∈ N. Analisamos as produções realizadas e discutidas por estudantes de um curso de licenciatura em Matemática de uma Universidade Federal da Baixada Fluminense. Os procedimentos metodológicos da pesquisa foram: levantamento bibliográfico para a elaboração, implementação e análise de atividades propostas. Para a coleta de dados foram usados o diário de campo da pesquisadora, registro por vídeo e áudio dos encontros e o registro escrito das respostas dos participantes. A análise buscou identificar de que forma os estudantes classificam os números apresentados, como interpretam e resolvem as tarefas apresentadas. Desta forma, buscamos compreender as estratégias usadas pelo grupo pesquisado frente às diferentes situações propostas e elaborar, a partir desta análise, um guia didático, para os professores com novas sugestões de atividades para o estudo dos números irracionais. Os resultados apontam que os estudantes consideram intervalos constantes entre os números apresentados quando foram solicitados para que os representassem na reta real repetindo a ideia de ordenamento dos naturais.

Palavras-Chave: Números Irracionais; Análise de áudio e vídeo.

ABSTRACT

NASCIMENTO, Isabela Alcântara. **Um caso particular de números irracionais estudado por Licenciandos de Matemática.** 2020. 97 p. Master Thesis (Masters degree in Science and Mathematics Education). Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2020.

Generally speaking the irrational numbers approach during highschool years in Basic Education is restricted a few examples usually presented as roots of the numbers two and three ($\sqrt{2}$ and $\sqrt{3}$) , and the number pi (π). In this project we vie to achieve a research about other numbers represented in the form of radicals $\sqrt{n}$, being n ∈ N. We analyzed the work done and discussed by students of a Bachelor Degree School of Mathematic in a Federal University from the Baixada Fluminense. The methodological procedures of the research where: Bibliography research for the elaboration, implementation and analysis of the proposed activities. For the data gathering where utilized the researcher camp diary annals, video and audio recordings of the encounters and the written answers recorded from the participants. The analysis intended to identify in which way the students classify the numbers presented as well as interpret and solve the works presented. In this way we strived to comprehend the strategies utilized in the different situations proposed by the group of students analyzed as well as elaborate from this research a didactic guide for the teachers with new suggestions of activities for the irrational number study. The results shows that students deem the constant intervals between the numbers presented when they where asked to represent them reals line showing the repetitive idea of the naturals order.

Key words: Irrational numbers; Audio and video analysis.

LISTA DE ABREVIAÇÕES

BNCC – Base Nacional Comum Curricular.

I – Conjunto dos Números Irracionais.

IES – Instituição de Ensino Superior.

IFs – Plural de Institutos Federais.

IFRJ - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro.

LSM - Laboratório Sustentável de Matemática.

$\mathbb{N}$ – Conjunto dos Números Naturais.

PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência.

PPGEduCIMAT - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática.

$\mathbb{Q}$ – Conjunto dos Números Racionais.

$\mathbb{Q}_+$ – Conjunto dos Números Racionais não negativos.

$\mathbb{R}$ – Conjunto dos Números Reais.

UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

$\mathbb{Z}$ – Conjunto dos Números Inteiros.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Aritmética é um dos campos da Matemática e está presente há muito tempo no ensino desta disciplina nas escolas. Os números por sua vez, tema central da Aritmética, representam uma ideia fundamental para a Matemática e faz parte do desenvolvimento da própria Matemática e de outras áreas da ciência.

No ensino atual a apresentação dos números e suas operações ocupa lugar de destaque sem que, no entanto, sejam discutidos aspectos importantes e significativos envolvendo essa ideia, ficando-se assim preso no cálculo das operações.

O presente trabalho é o resultado de uma pesquisa de dissertação do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGeduCIMAT) da Universidade Rural Federal do Rio de Janeiro (UFRRJ) na linha de Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática em que se busca trabalhar alguns dos aspectos importantes e significativos para compreender uma das características dos números expressos sob a forma de raiz quadrada considerando-se aqueles cujos radicandos sejam números naturais. Isto é, $\sqrt{n}\ /\ n \in N$ e apresentados de tal forma que os estudantes possam classificá-los em irracionais ou não irracionais.

O interesse em estudar os números irracionais surgiu das minhas inquietações existentes desde o período em que era licencianda em Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, IFRJ - *Campus* Paracambi, e participava do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID, cujo objetivo era incentivar a carreira do magistério na educação básica. Ao produzir materiais neste programa, reflexões acerca de meu conhecimento sobre os números irracionais vieram à tona sob a forma de muitas perguntas: Será que o que eu sei é suficiente para ensinar esse conceito? Ou será que algo mais seja necessário, profissionalmente falando, para que os números irracionais possam ser compreendidos por meus futuros alunos? Ou ainda, seria apenas a radiciação de um número, uma outra operação matemática?

Essas e outras inquietações me levaram, ainda licencianda, a integrar o Laboratório Sustentável de Matemática – LSM – um grupo formado por professores da escola de Educação Básica que compartilha práticas e materiais que produzem tanto presencialmente quanto virtualmente através de seu *site* e da rede social *Facebook*. As práticas e materiais compartilhados são derivados de pesquisa sobre práticas de ensino e aprendizagem matemática, aplicadas em salas de aulas dos integrantes do grupo e em oficinas de formação continuada e desenvolvimento profissional escolares e acadêmicos. Porém nenhum dos trabalhos compartilhados conseguiu me trazer a expertise procurada sobre o ensino de números irracionais naquele momento.

No início do ano de 2017, já concluída a graduação, em busca por dar continuidade a minha formação inicial, ingressei como aluna ouvinte no Programa de Pós Graduação de Ensino e História da Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, onde cursei as disciplinas Tendências em Educação Matemática e Análise I. Durante a disciplina de Tendências em Educação Matemática fui levada a realizar um trabalho reflexivo sobre o ensino dos números reais usando como base o artigo “Reflexões sobre o ensino dos números reais com uso do GeoGebra: Explorando os diversos registros semióticos de Andrade et al. (2016). Nesse artigo, o autor apresenta uma análise das principais práticas dos professores usando o *software* GeoGebra para ensinar números reais para alunos do 9° ano do Ensino Fundamental e que guiou meu olhar sobre ensino de números, uso de *software*, Base Nacional Comum Curricular e os Parâmetros Curriculares Nacionais e que mais tarde, no mestrado, serviu para cunhar a questão de pesquisa a ser por mim investigada nesta dissertação.

As pesquisas (SOUTO, 2010; POMMER, 2012;) em que analisam livros didáticos indicam que os números irracionais são pouco abordados. Ripoll (2004), ao estudar a formação do professor de matemática aponta que de maneira geral os licenciandos em Matemática ao fazerem a disciplina Análise Real, onde é construído o conjunto dos números reais, muito pouco (quando nada) é esclarecido sobre os conflitos existentes sobre este conteúdo. Em seguida, estes estudantes das licenciaturas retornam para as salas de aula na Educação Básica, agora como professores, sem que estes conflitos tenham sido abordados e muito menos discutidos e minimamente resolvidos.

Outro aspecto a ser considerado é a forma como as aulas são conduzidas. De um modo geral, os professores optam por expor os conteúdos seguindo um modelo cuja abordagem parte da definição, apresentam alguns poucos exemplos e por fim propõe exercícios que devem ser seguidos segundo um modelo pré-estabelecido. Ao que tudo indica, este modelo, conhecido como método tradicional, gera dificuldade nos alunos e um falso domínio do conteúdo tendo sido observado tanto nas tutorias de matemática em cursos de educação superior à distância e no estágio docente uma turma de ensino de matemática do curso de pedagogia quanto durante minha formação inicial no PIBID e estágios docente na Educação Básica.

Para Skovsmose (2000), a educação matemática tradicional se desenvolve dentro do paradigma do exercício, cuja premissa central é a existência de somente uma resposta correta e que se encontra bastante veiculada nos livros didáticos de matemática. Material, este praticamente único a ser veiculado nas escolas.

Diante do exposto, levantamos o seguinte problema de pesquisa.

PROBLEMA:

De que forma os estudantes da licenciatura buscam estratégias para resolver e representar os números apresentados na forma $\{\sqrt{n}\ ,\ n \in N\}$?.

Para responder esta pergunta aventamos como objetivo geral da pesquisa investigar estratégias usadas para representar os números da forma $\sqrt{n},\ n \in N$ em diferentes situações problemas e analisar como as tarefas promovem discussões a respeito da aplicação deste conteúdo na sala de aula da Educação Básica. De maneira mais detalhada, nos propusemos:

- Identificar que tipo de ideias os licenciandos têm sobre números para plantear especificamente o trabalho a ser desenvolvido (tarefa introdutória);
- Apresentar um conjunto de tarefas sobre números que contribuam para a promoção de discussões a respeito da existência dos números irracionais em sala de aula na Educação Básica.
- Verificar de que formas os estudantes localizam números com radicando na reta em que a unidade é dada;
- Verificar que estratégias os licenciandos usam para determinar o intervalo de localização dos números dados;
- Verificar de que forma os estudantes escolhem e determinam as medidas dos lados das diferentes peças do Tangram.

Ao ingressar no mestrado, mergulhada nas discussões e busca por algumas respostas (na verdade obtive mais perguntas), atingi a construção de uma rede de saberes que me possibilitou trilhar por um caminho que ora apresento como sendo a

ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

E que está organizada em sete capítulos. Na introdução apresento o local de fala, motivação, e como é a pesquisa (problema, objetivos e pergunta). Para em seguida, no capítulo 2, apresentar um levantamento das grades curriculares dos cursos de licenciatura em matemática da Baixada Fluminense.

No capítulo 3, apresentamos um breve estudo sobre os números irracionais e as pesquisas sobre o tema desenvolvidos nos últimos anos.

No capítulo 4, a metodologia de pesquisa, o público, o local e as estratégias de coleta e análise de dados são apresentadas para que possamos entender o local da fala dos participantes da pesquisa.

Já no capítulo 5, são apresentadas as tarefas e a análise das respostas dadas pelos licenciandos.

O capítulo 6, se apresenta como um guia didático sobre o tema, estudo de números irracionais apresentados na forma de radicais, com sugestões de encaminhamento para a sala de aula. E por fim, temos o capítulo 7, em que as considerações finais da pesquisa são tecidas.

E após as referências, encontram-se os anexos contendo documentos que dão suporte à pesquisa.

CAPÍTULO 2

Neste capítulo apresentamos a lei de diretrizes e bases que norteia a formulação das grades curriculares dos cursos de licenciatura no Brasil, em particular os cursos oferecidos na Baixada Fluminense, local em que a pesquisa foi realizada. Para completar o estudo fizemos um levantamento das disciplinas oferecidas nos currículos para que possamos identificar melhor o *lócus* dos participantes desta pesquisa.

2.1 Lei de Diretrizes e Bases

A Lei de Diretrizes e Bases - LDB foi implementada no ano de 1961, apesar de aparecer na Constituição Federal de 1934. Segundo Saviani (2008), na Constituição de 1934 ainda não aparecia com esse nome, a palavra bases foi incluída depois e foi mencionada como "diretrizes da educação nacional", ficando assim evidente a iniciativa de uma organização para todo o território nacional. A LDB rege o sistema educacional, independente dele ser público ou privado e o divide em dois níveis de ensino: a educação básica, que inclui a educação infantil, ensino fundamental e ensino médio; e o ensino superior. Posteriormente, à sua implementação, duas alterações foram feitas, a primeira em 1971 e a segunda em 1996, que vigora até a atualidade.

O documento da LDB do ano de 1971 garantiu à família o direito de escolha do tipo educação dos filhos; estabeleceu o ensino como obrigação do poder público e à livre iniciativa privada; e estabeleceu como os recursos financeiros seriam aplicados na educação. De maneira resumida, as leis orgânicas do ensino entre os anos de 1942 e 1946, anterior a LDB, previam uma estrutura de ensino que era composto por quatro anos de curso primário, seguido do ensino médio com duração de sete anos divididos em dois ciclos, o chamado de ginasial, com quatro anos e o colegial com três anos, que por sua vez era classificado em secundário, normal e técnico. Desta maneira, apenas a formação no ensino secundário possibilitava o acesso em qualquer curso superior. Com a implementação da LDB, esta organização do ensino se manteve, mas foram modificados os critérios para o ingresso ao ensino superior permitindo-se a partir daí o acesso independentemente da modalidade escolhida e cursada durante o ensino médio.

A nova LDB, de 1996, trouxe mudança significativa, os dias letivos, que passam a possuir um mínimo de 200 dias. Os demais pontos, segundo Saviani (2008), ficam em aberto para a época e podendo haver ou não mudanças, dependendo mais "dos encaminhamentos da política educacional e das decisões dos órgãos normativos dos sistemas de ensino ou das próprias escolas". Para saber melhor sobre esse assunto julgamos necessário pesquisar uma nova fonte de referência que sejam mais atuais, pois Saviani (2008) publicou esses dados pela primeira vez no ano de 1997, sem haver uma nova avaliação.

A seguir apresentamos algumas reflexões sobre os saberes docentes e o cursos de formação de professores.

2.2. Os saberes docentes:

Podemos destacar o estudo de Tardif (2014) no Brasil, sobre os saberes docentes no campo da Educação. Para Tardif (2014), o saber docente, é um saber plural, provenientes da formação profissional e saberes disciplinares, curriculares e experienciais. Ao falar que o saber docente é plural, o autor apresenta quatro tipos de saberes que o compõem: formação profissional, disciplinares, curriculares e experenciais.

Os saberes relativos à formação profissional de professores estão subordinados a universidade e seu corpo formador, o Estado e seu corpo de agentes. Uma vez que os professores universitários fornecem uma competência sancionada pela universidade e o Estado.

Saberes disciplinares são provenientes de diferentes campos do conhecimento, definidos pela comunidade científica e tradição cultural, são acessados através das intuições educacionais em formação (inicial e contínua) sob a forma de disciplina.

Os saberes curriculares dizem a respeito das maneiras no qual as instituições de ensino organizam os saberes sociais para apresentar aos estudantes (saberes disciplinares), que concretizam na forma dos programas escolares (conteúdo, objetivo e método).

Saberes experienciais vêm da atuação profissional do cotidiano, na relação com a comunidade escolar.

Tardif (2014), atesta que na profissão, existe um saber específico que é a soma de todos esses outros. Na tentativa de complementar os saberes, Tardif organiza cinco saberes docentes considerando a fonte de aquisição e modos de integração no trabalho docente. Esses saberes consideram não apenas os saberes de carreira, incluindo experiências anteriores, como os adquiridos no percurso de vida pessoal, familiar e escolar, que também são importantes para compor a identidade profissional do professor conforme Quadro 1- Reprodução dos saberes dos professores considerando a fonte de aquisição. a seguir:

Quadro 1- Reprodução dos saberes dos professores considerando a fonte de aquisição.

Saberes dos professores	**Fonte social de aquisição**	**Modos de integração no trabalho docente**
Saberes pessoais dos professores	A família, o ambiente da vida, a educação no sentido lato, etc	Pela história de vida e pela socialização primária
Saberes provenientes da formação escolar anterior	A escola primária e secundária, os estudos pós-secundários não especializados, etc	Pela formação e pela socialização pré-profissional
Saberes provenientes da formação profissional para o magistério	Os estabelecimentos de formação de professores, os estágios, os cursos de reciclagem, etc..	Pela formação e pela socialização profissionais nas instituições de formação de professores
Saberes provenientes dos programas e livros didáticos usados no trabalho	A utilização das “ferramentas” dos professores, programas, livros, didáticos, cadernos de exercícios, fichas, etc..	Pela utilização das “ferramentas” de trabalho, sua adaptação
Saberes provenientes de sua própria experiência profissional na profissão, na sala de aula e na escola.	A prática do ofício na escola e na sala de aula, a experiência dos pares, etc..	Pela prática do trabalho e pela socialização profissional

Fonte: TARDIF, 2014. pág 63

Na tabela acima vemos alguns traços de saberes considerados para identificar o contexto sociocultural e os saberes pessoais dos estudantes que participaram dessa pesquisa.

2.3. Currículo de matemática:

Buscando analisar as disciplinas da Licenciatura em Matemática da UFRRJ, através da análise do Projeto Pedagógico do Curso, disponível no *site* da instituição. Verificamos que o documento visa se adequar as deliberações de instancias superiores, “” UFRRJ, 2009 pág.5

Assim, identificamos no projeto duas grades: uma em vigência e outra, a ser implementada. As disciplinas Ensino de Matemática I e Ensino de Matemática II, aparecem na nova proposta. O conjunto das disciplinas estão divididos em 6 grupos, descritos a seguir.

O conjunto de *formação específica* é composto por disciplinas de matemática pura e aplicada, sendo elas: Matemática Elementar, Introdução à Álgebra, Geometria Analítica Plana, Geometria Analítica Espacial, Geometria Euclidiana, Cálculo I, Álgebra I, Álgebra Linear I, Cálculo II, Álgebra II, Álgebra Linear II, Cálculo III, Álgebra III, Cálculo IV, Equações Diferenciais Ordinárias, Análise I, Introdução á Matemática Combinatória, Cálculo Numérico, Análise II e Variáveis Complexas, que devem ser cursados de maneira obrigatória e possuem carga horária de 1.200 horas. A essa formação devem ser acrescentadas 120 horas pertencentes às disciplinas optativas que podem ser escolhidas de maneira livre entre as opções disponíveis e têm por objetivo que os estudantes aprofundem os conhecimentos.

O conjunto das *áreas afins* possui quatro disciplinas: Estatística Básica, Física I, Física II e Computação I, contabilizando 240 horas.

O conjunto *de formação filosófica e histórica* é combinado numa disciplina intitulada História da Matemática e possui carga horária de 60 horas.

O conjunto *de formação pedagógica* é desenvolvido nas disciplinas: Filosofia e Educação I, Sociologia e Educação I, Psicologia e Educação I, Política e Organização da Educação, Didática Geral, Ensino de Matemática I, Ensino de Matemática II, afere 420 horas.

O conjunto das *áreas humanas* é articulado nas disciplinas: Produção de Texto, Cultura Afro-brasileira e Africana e LIBRAS, estabelecendo 90 horas.

O conjunto *estágio supervisionad*o é composto por Estágio Supervisionado I, Estágio Supervisionado II, Estágio Supervisionado III e Estágio Supervisionado IV, juntos somam 400 horas**.**

O conjunto *monografia* tem carga horária de 200 horas e está dividida em duas disciplinas, Monografia I e II.

Não aprofundamos o estudo com relação ao conjunto das atividades *acadêmicas* e o conjunto de *Formação Cultural, Artística e Filosófica* pois estas estão fora do escopo de interesse deste trabalho.

Desta forma é possível verificar, que apesar do modelo 3+1 ter saído, a articulação entre matemática e ensino, como didática específica, pouco se apresenta na estrutura curricular. Além disso vale a comparação com outros cursos de formação inicial de professores de matemática.

Para o escopo do trabalho desta pesquisa foram escolhidas as disciplinas de Ensino da Matemática I e II pois apresentam abordagens sobre metodologia (tendências) de ensino de matemática; procedimentos de ensino e aprendizagem de matemática; e recursos didáticos para o ensino de matemática para Ensino Fundamental II e Ensino Médio, respectivamente pois é neste contexto que se dá a discussão do tema deste trabalho.

Com relação às tendências em Educação Matemática, não existe consenso entre os autores visto que possuem diferentes entendimentos distintos sobre elas. Analisando as publicações trabalho[1] na área da Educação Matemática encontramos: a matemática crítica, modelagem matemática, resolução de problemas, etnomatemática e outros. Em acordo com esta diversidade, podemos identificar diferenças entre as grades curriculares destas universidades.

No Projeto Pedagógico[2], do Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ), *campus* Nilópolis, no item que versa sobre estratégias metodológicas de ensino e aprendizagem é oferecido desde o início do curso de modo a formar professores de Matemática, e não Matemáticos que possam dar aulas. Nas ementas das disciplinas que compõem este núcleo existe o item "*operacionalização da prática como componente curricular*" atendendo assim a resolução do Conselho Nacional de Educação - CNE/CP Número 1, de 18/02/2002. A figura 1, apresenta as disciplinas divididas em atividades formativas e práticas de ensino.

Figura 1- *Práticas de ensino do IFRJ* campus *Nilópolis*

DISCIPLINA	(Atividades Formativas)	(Práticas de Ensino)
Sociologia da Educação	45	9
Filosofia da Educação	45	9
História, Políticas e Legislação da Educação	45	9
Didática	39	15
Psicologia da Educação	42	12
Informática no Ensino da Matemática	13	41
Introdução à Mecânica	72	9
Libras	45	9
Práticas Pedagógicas de Aritmética	13	41
Educação em Direitos Humanos	21	6
Metodologia do Ensino de Matemática	27	27
Práticas Pedagógicas de Geometria	13	41
Matemática Finita	41	13
Probabilidade e Estatística	68	13
Pesquisa em Ensino de Matemática	27	27
Práticas Pedagógicas de Análise	13	41
Construções Geométricas I	27	27
Práticas Pedagógicas de Tratamento da Informação	13	41
História e Filosofia das Ciências	45	9
História da Matemática	41	13
Educação Financeira	27	27
Carga horária total	**722**	**439**

Fonte: IFRJ (site), 2006, pág 25.

[1]Catálogo da coleção em Tendências em Educação Matemática do Grupo Autêntica. <https://grupoautentica.com.br/autentica/colecoes/16

[2] https://portal.ifrj.edu.br/sites/default/files/IFRJ/PROGRAD/novo_ppc-lm-nilopolis_0.pdf

Para exemplificar, identificamos na disciplina de geometria plana, no item *operacionalização da prática* como componente curricular está lá que foi inserido com 18 tempos no semestre de Prática Pedagógica relacionada ao conteúdo teórico da disciplina.

O Projeto Pedagógico do IFRJ *campus* de Paracambi[3], apresenta nos princípios norteadores do currículo de seu curso, algumas disciplinas que possibilitam uma conexão mais próxima entre os conhecimentos pedagógicos e científico. A importância dessa disposição é retomada no item Organização e Estrutura Curricular, uma vez que a instituição marca sua diferenciação do modelo de graduação "3+1".

> A partir deste princípio, objetiva-se trilhar novos caminhos que se distanciem do modelo tradicional, conhecido como "3+1", modelo este pautado pela formação na qual disciplinas pedagógicas ficam restringidas ao final do curso, prejudicando o aprofundamento teórico com a prática pedagógica. Atualmente, tem sido promovido por políticas públicas nacionais um novo formato de formação onde o futuro docente tem a possibilidade de ter, desde o início do curso, contato com disciplinas pedagógicas, possibilitando uma contribuição mútua e natural entre as disciplinas específicas e pedagógicas. (BRASIL, 2008)

Na figura 2, apresentamos as disciplinas do IFRJ do *campus* de Paracambi para possibilitar a comparação com as demais grades.

Figura 2- Práticas de ensino no IFRJ, *campus* Paracambi

Disciplina	Horas Teóricas	Horas de Práticas Profissionais
Geometria Plana	72	9
Sociedade, Cultura e Educação	44	10
Psicologia da Educação	44	10
LIBRAS	40	14
Geometria Espacial	45	9
Didática	27	27
Metodologia de Ensino de Matemática	27	27
História, Políticas e Legislação da Educação	54	27
Matemática em Sala de Aula I	24	30
Produção de Textos Acadêmicos	18	9
Metodologia de Pesquisa Científica	27	27
Matemática em Sala de Aula II	24	30
História e Filosofia da Ciência	27	27
Construções Geométricas	54	27
História da Matemática	27	27
Matemática em Sala de Aula III	24	30
Educação Matemática Financeira	40	14
Educação em Direitos Humanos	27	27
Matemática em Sala de Aula IV	24	30

Fonte: IFRJ, 2010, pág. 37.

[3] IFRJ. Projeto Pedagógico Paracambi.
https://portal.ifrj.edu.br/sites/default/files/IFRJ/PROGRAD/ppc_-_lm_cpar_1.pdf

Nos dois IFs é possível identificar disciplinas de didáticas específicas.

Um aspecto a ser considerado, como elemento, que contribui para diferenciar as IES e os IFES é o fato de que os professores dos institutos federais atuam tanto nos cursos de licenciatura quanto no ensino médio, gerando assim uma *práxis*[4] diferenciada dos professores que atuam nas Instituições de Ensino Superior.

CAPÍTULO 3

Nesse capítulo, apresentamos o processo de busca e escolha dos trabalhos que abarcam o estudo dos números irracionais. Com o propósito de auxiliar na construção do embasamento para destacar a relevância da pesquisa, buscamos na literatura os trabalhos realizados a partir de 2017, a partir do levantamento realizado por Rocha (2018), visando ressaltar contribuições significativas para o ensino e a aprendizagem do tema além de relacionar e analisar aqueles que possam contribuir para a elaboração das tarefas a serem propostas para a coleta de dados.

3.1 Pesquisas sobre números irracionais

A busca se deu via instrumento de localização e consulta a partir do levantamento realizado por Rocha (2018), que pesquisou o boletim Gepem online desde a sua origem, 1967 e os periódicos que se encontram no quadro 2, no período de janeiro de 2010 a dezembro de 2016. Desta forma, serão pesquisadas aqui, o intervalo de janeiro de 2017 até junho de 2019 nessas mesmas fontes. Os periódicos se encontram separados em dois grupos, no primeiro encontram-se listados aqueles em que não foram encontradas publicações sobre os números irracionais e no segundo, aqueles nos quais foram encontrados textos sobre o tema.

Quadro 2- Reorganização dos dados de Rocha (2018)

Ausência de artigos sobre os números irracionais.	Jornal internacional de estudos em educação matemática; Educação matemática pesquisa; Revista Eletrônica De Educação Matemática
Existência de artigos sobre o tema.	Educação Matemática em Revista; Zetetiké; Revista de Educação Matemática; Perspectivas em Educação Matemática.

Fonte: ROCHA, 2018.

[4] Ação transformadora que relaciona uma atividade prática e uma teoria.

Além desta base, a busca se deu por localização e consulta utilizando endereços institucionais. Entretanto, pela dificuldade encontrada, optamos por usar o *Google* Acadêmico[5]. A ideia era elencar trabalhos nos quais pudéssemos identificar elementos cuja potencialidade contribuem para o ensino dos números irracionais em diferentes níveis, mas que também focassem a formação inicial. A partir desta premissa, destacamos duas palavras-chave: formação inicial de professores de matemática e números irracionais ou ainda, "números irracionais na formação de professor" e que são apresentados no Quadro 3, a seguir:

Quadro 3 - Levantamento[6] de produção números irracionais na formação de professor

	Título/ Autor/Ano	**Fonte**
1	A construção dos números reais nos Ensinos Fundamental e Médio. RIPOLL, C. C. 2004.	Mini curso apresentado na Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador.
	Disponível em <http://www.bienasbm.ufba.br/02.htm>	
2	Sensibilização para existência dos números irracionais. ROCHA, R. R. M. 2018.	Dissertação do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGeduCIMAT).
	Disponível em <http://cursos.ufrrj.br/posgraduacao/ppgeducimat/files/2018/06/Rute-Ribeiro-Meireles-Rocha.pdf>	
3	Conhecimentos relativos a números racionais e irracionais de uma aluna ingressante na licenciatura em matemática. BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos; 2017	Revista de Ensino de Ciências e Matemática.
	Disponível em <http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1093>	
4	O mito da análise real na formação conceitual do professor de matemática sobre os números reais e a análise matemática. CIFUENTES, J. C.	Livro - Educação Matemática: perspectivas e possibilidades. Curitiba, UTFPR Editora. 2015. p.95
	Disponível em <https://core.ac.uk/download/pdf/150137657.pdf#page=95>	
5	Os Números Irracionais e seu ensino delineando a imagem conceitual de um grupo	I CEMACYC - I congresso de educación Matemática da América Central y El Caribe.

[5] https://scholar.google.com.br/
[6] Todas as fontes foram acessadas em 09 jan de 2019.

	de professores. PIETROPAOLO, R. C.; CORBO, O.; CAMPOS, T. M. M.; 2013.	
	Disponível em <http://funes.uniandes.edu.co/4245/1/Mendon%C3%A7aOsn%C3%BAmerosCemacyc2013.pdf>	
6	Dimensions of Knowledge and Ways of Thinking of Irrational Numbers[7] HAYFA, N.; SAIKALY, L.; 2016.	Athens Journal of Education - Volume 3, Issue 2 – Pages 137-154
	Disponível em <https://doi.org/10.30958/aje.3-2-3 doi=10.30958/aje.3-2-3>	

Fonte: Dados da pesquisa.

Os textos um e quatro, apresentados na tabela anterior, não possuem resumos e nem palavras chaves. Os trabalhos dois, três e cinco apresentam palavras chave e resumo, com números irracionais na formação de professor de matemática, sendo eles: uma dissertação e dois artigos, respectivamente. Esses dados estão apresentados no Quadro 4.

Quadro 4- *Levantamento de produção números irracionais na formação de professor*

	Resumo (até 600 palavras seguido de palavra chave)
2	A abordagem didática das características e peculiaridades dos conjuntos dos números irracionais nem sempre apresenta estrutura necessária para a abordagem dos conceitos de forma concreta. A presente pesquisa pretende dar sua contribuição e está pautada na elaboração, implementação e análise de tarefas sobre a aprendizagem de números irracionais e seu foco é formação de futuros professores, graduandos de um curso noturno da Licenciatura em Matemática de uma universidade pública da Baixada Fluminense. Palavras-chave: construção numérica; aprendizagem colaborativa e cooperativa; investigação e exploração.
3	O presente artigo se propõe a fazer um diagnóstico dos conhecimentos referentes a números racionais e irracionais trazidos por uma aluna ingressante de um curso de licenciatura em matemática. Os dados aqui apresentados são parte integrante de uma pesquisa de doutorado da qual participaram duas turmas de alunos ingressantes na

[7] Dimensões do conhecimento e formas de pensar de números irracionais - Tradução do nossa.

	licenciatura em matemática do Instituto Federal do Espírito Santo – IFES – Campus Vitória. Palavras-chave: Números irracionais, Licenciatura em matemática, Imagem do conceito.
5	Este artigo resulta de investigação sobre a imagem conceitual relativa aos números irracionais, constituída por um grupo de professores da rede pública da cidade de São Paulo. Consideramos as concepções explicitadas pelo grupo, em resposta a questionários envolvendo itens concernentes aos conhecimentos necessários ao professor, relativos ao conteúdo “números racionais e irracionais” e ao seu ensino. Palavras-chave: Números Irracionais, Educação Matemática, Conhecimentos para o Ensino, Formação de Professores.

Fonte: Dados da pesquisa.

No trabalho realizado com licenciando, as autoras HAYFA, N. e SAIKALY, L (2016) buscam entender como os estudantes localizam exatamente um número irracional e para tanto apresentam as tarefas:

1) Fornecer a definição de um número irracional usando suas próprias palavras, que foi inspirada no trabalho de Fischbein, Jehiam, & Cohen, 1995.

2) Classifique cada um dos números dados com racional ou irracional. Como você sabe? $\frac{7}{22}$, 3.14, 0.777…, $\sqrt{29}$, 0.1010010001…, esses números foram inspirados no trabalho de Sirotic e Zazkis, 2010. E ainda acrescentou outros números que são: √49 – 1 e $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2}}$,$\frac{\sqrt{13}}{3}$, $\frac{1}{17}$.

3) Você acha que o número $\sqrt{5}$ tem uma localização exata em um número linha?Os alunos podiam responder verdadeiro ou falso, ambos com justificativas ou não dar respostas. A tarefa foi inspirada em Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi, 1987.

3.2 Como começamos a pensar nos irracionais

Ao executarmos a divisão do numerador (1) pelo denominador (17) da fração $\frac{1}{17}$ usando um recurso tecnológico- calculadora ou planilha *excel*, observamos diferentes resultados, mas que nos levam a concluir que o resultado é um decimal exato pois não há repetição de um algarismo. Entretanto, ao efetuarmos a operação manualmente, o período começa a surgir quando o resto é igual a 1, embora não possamos identificar o período de forma trivial pois no início do resultado um dos zeros representa a parte inteira do resultado.

Ou seja, o período não começa com os dígitos considerados após a vírgula, pois temos dois zeros.

Desta forma, consideramos que não é possível identificar de imediato, se um número decimal é ou não um número irracional analisando a parte decimal levando assim à um engano sobre a sua classificação. Veja o caso da fração exemplificada. O período começa a partir da 16ª casa decimal, caracterizando assim uma dízima periódica, mas existem decimais exatos que possuem dezesseis casas decimais como é o caso da fração $\frac{1}{2^{16}}$. cujo resultado é $(0,5)^{16}$ e que num primeiro momento, poder-se-ia acreditar como sendo um número irracional pois não se identifica uma repetição de algarismos que pudesse ser caracterizado como sendo o período e nem tão pouco evidencia-se a existência do resto igual a zero de forma a considera-lo um decimal exato.

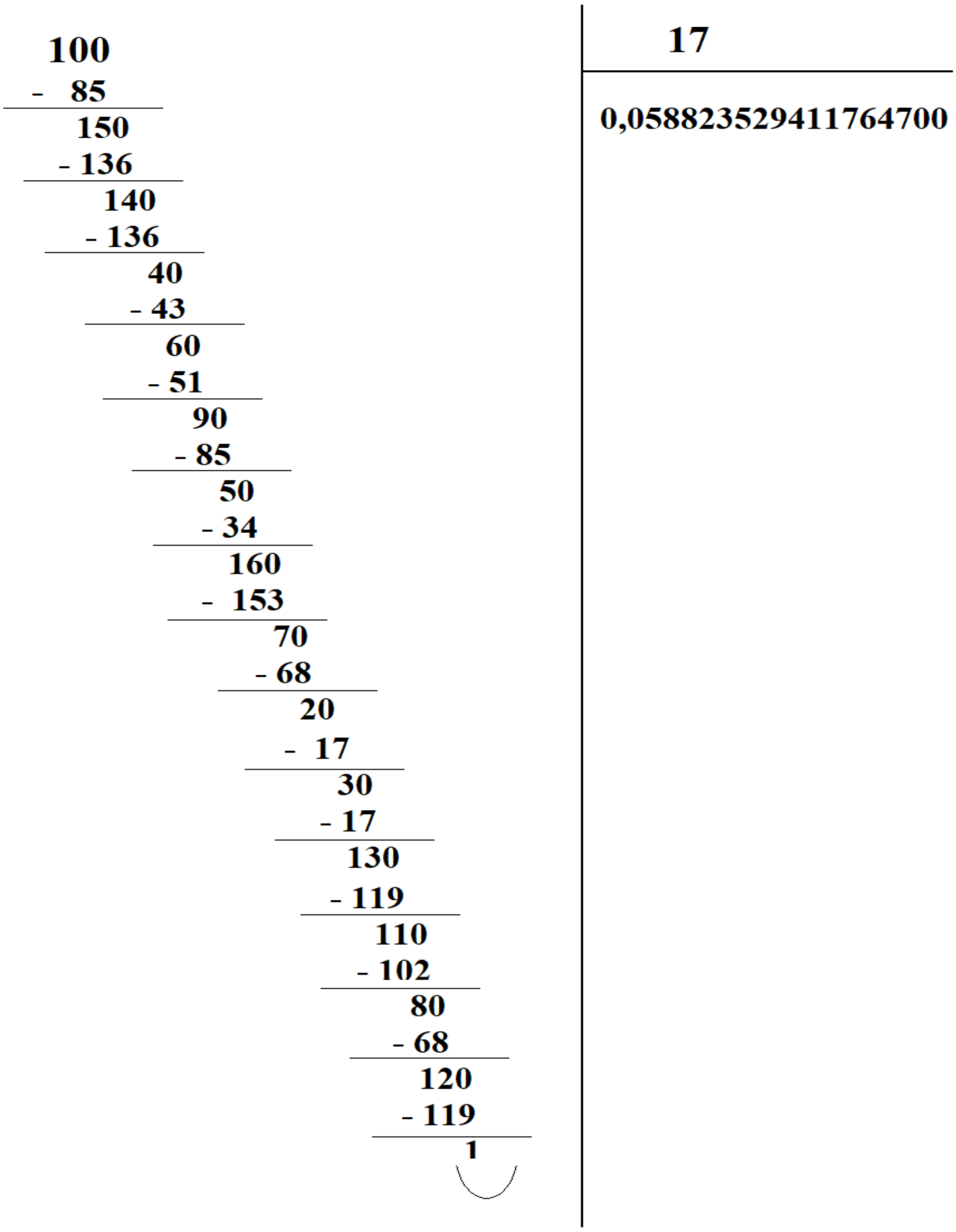
No caso do decimal, não exato, elas podem ser classificadas em dizimas simples ou composta. Na primeira divisão, o dividendo é 1 e o divisor 17. O processo apresentado é chamado de divisão contínua, pois é apresentado num único dispositivo. Explicando o algoritmo apresentado na figura 3, em que dividimos o número 1 por 17, (1 : 17), não é possível ser realizado, então escrevemos zero no quociente e para prosseguirmos precisamos mudar esta unidade e dividi-la por 10 partes iguais (uma vez que nosso sistema é decimal) e em seguida verificar se 10 décimos podem ser divididos por 17. Mais uma vez, não é possível e escrevemos zero no quociente, então toma-se cada décimo e os dividimos por 10 encontrando agora 100 centésimos. Ao considerarmos os 100 centésimos podemos dividi-los por 17 e encontramos 5 e deixando de resto 15 centésimos. Note que nas demais divisões o dividendo é dez vezes o resto da divisão anterior e o divisor sempre 17. Para prosseguirmos e dividimos os centésimos por 10 encontrando 150 milésimos e que podem ser divididos por 17, e encontramos 8 milésimos e que na divisão restaram 14 milésimos.

Podemos prosseguir continuamente até que: a) encontramos resto zero, neste caso trata-se de um número decimal exato ou b) começa-se a repetir os restos, neste caso dízima periódica simples, cujo período são os algarismos considerados antes da repetição.

> O sistema de numeração decimal usado hoje é posicional. Isto porque, em primeiro lugar, o valor de um algarismo é determinado por sua posição no numeral e um mesmo algarismo assume infinitos valores diferentes. Isto permite que um conjunto finito de algarismos seja suficiente para representar todos os números naturais – o que não ocorre com os sistemas não posicionais. (RIPOLL, C. C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V.; 2015, pág. 19)

A seguir apresentamos o cálculo da divisão de 1:17, feito manualmente até que apareça o resto igual ao dividendo inicial, pois a partir daí teremos a repetição de todos os restos e consequentemente a repetição de todos os algarismos encontrados até então no quociente.

Figura 3 *- Divisão de 1 por 17*



Fonte: Elaborada pela autora.

O que caracteriza a diferença entre uma dízima periódica e a representação decimal de um número irracional? No primeiro caso, aparecerá um resto igual à algum dividendo, o que gera um círculo[8], como acontece em 1:17. Já no caso do número irracional aconteceram sucessivas tentativas infinitas de se encontrar uma unidade que divida o novo dividendo.

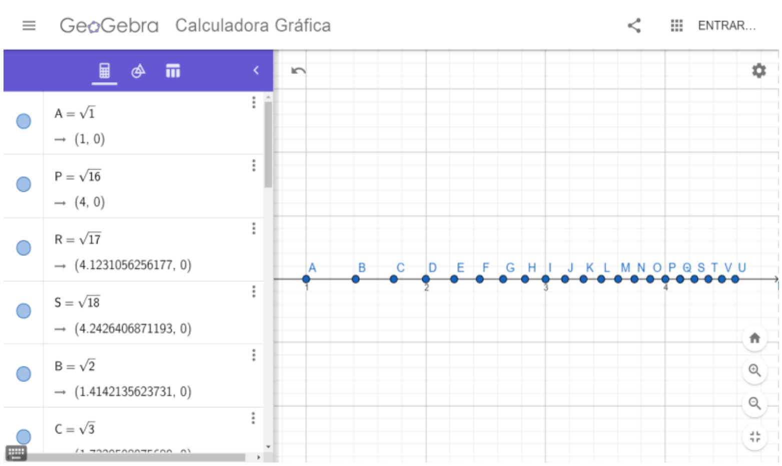
3.2. Razão de trabalhar raiz de n

A ideia envolvida no recorte de $\sqrt{n}$ é "alargar" a possibilidade do professor da educação básica em sala de aula para trabalhar os números irracionais mesmo pensando no seu pouco tempo. Para tanto, foram escolhidos de acordo com os seguintes critérios:

- que estivessem próximos do zero e de raízes exatas geralmente conhecidas;
- que esses números pudessem ser plotados na reta real considerando a medida da unidade maior do que um centímetro;
- com quantidades diferentes e suficientes de números irracionais nos diferentes intervalos.

Na figura 4, apresentamos alguns dos valores para exemplificar e dar visibilidade aos números escolhidos. Ou seja, ao considerarmos os números $\sqrt{n}$, em que o radicando é um número inteiro positivo temos dois números entre 1 e 2, representados pelos pontos B e C; no intervalo [2,3], temos quatro números_ E, F, G, H, e assim sucessivamente. E à medida que se anda para a direita na reta, aumenta a quantidade de raízes em cada um dos intervalos formados por números inteiros consecutivos.

Figura 4 *- Raízes no intervalo inteiro*



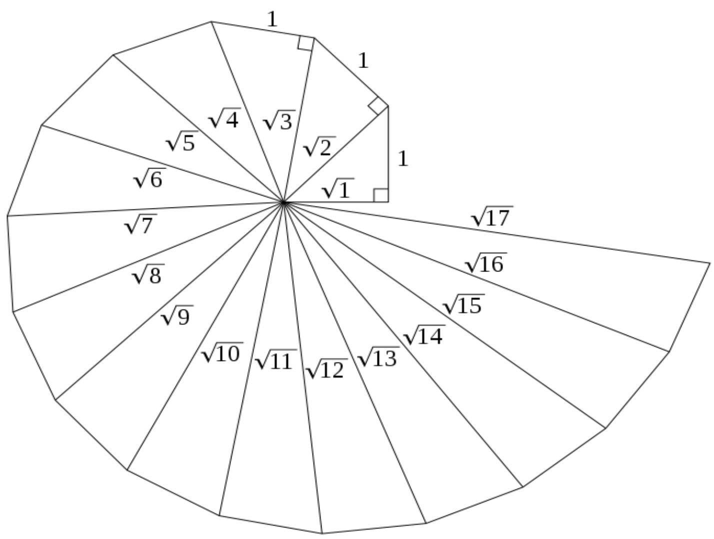
Fonte: Elaborada pela autora.

---

[8] Apenas no caso da dízima periódica simples.

Uma outra forma de representar esses números, e que normalmente aparecem alguns livros didáticos à título de ilustração é a espiral pitagórica, figura 5. Tal material pode ser acessado em Wagner (2005), página 34.

Figura 5- *Raízes no intervalo inteiro*



Fonte: GRATISPNG (site).

Mas, quando se constrói a espiral pitagórica só é possível representar até $\sqrt{17}$ pois a partir deste valor há sobreposição de camadas de triângulos.

3.3 Medir x contar

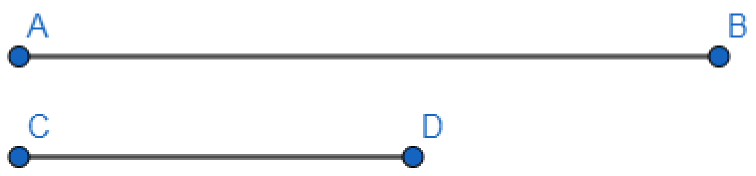
Medir e contar são duas ações frequentemente utilizadas no dia a dia. Na entrevista concedida por Paulo Freire ao Ubiratan D'Ambrósio e exibida no Congresso Internacional de Educação Matemática, é possível notar uma reflexão sobre o uso da matemática no cotidiano, de uma maneira bem usual.

> Eu dizia outro dia aos alunos que quando a gente desperta, já caminhando para o banheiro, a gente já começa a fazer cálculos matemáticos. Quando a gente olha o relógio, por exemplo, a gente já estabelece a quantidade de minutos que a gente tem para, se acordou mais cedo, se acordou mais tarde, para saber exatamente a hora em

que vai chegar à cozinha, que vai tomar o café da manhã, a hora que vai chegar o carro que vai nos levar ao seminário, para chegar às oito. Quer dizer, ao despertar os primeiros movimentos, lá dentro do quarto, são movimentos matematizados. Para mim essa deveria ser uma das preocupações, a de mostrar a naturalidade do exercício matemático. (FREIRE, 1996, Entrevista gravada e disponibiliza no *YouTube*)

Mas afinal, o que é medir? Medir consiste em comparar grandezas de mesmas espécies; quantificar através de uma unidade[9]. Para compararmos comprimentos de dois segmentos, por exemplo, deve-se coincidir os extremos. Nos segmentos de retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, na figura abaixo, podemos dizer que o comprimento de $\overline{CD}$, é menor que $\overline{AB}$ ou ainda, $\overline{AB}$ tem comprimento maior que $\overline{CD}$.

Figura 6- *Comparação entre segmentos de retas* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$



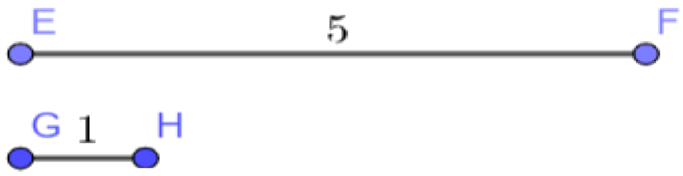
Fonte: Elaborada pela autora.

Porém, na comparação feita desta forma não se sabe exatamente quantas vezes o segmento menor cabe no maior. Ou seja, a resposta à pergunta "quantas vezes um comprimento cabe no outro?" não é respondida. Em função disso procura-se encontrar uma unidade com a qual seja possível respondê-la. A busca por esta unidade deve ser aquela em que se poderá medir os dois segmentos podendo assim comparar os dois segmentos. A quantidade de unidades é o número que expressa a medida de cada segmento. "Há, portanto, no problema da medida, três fases e três aspectos distintos - *escolha* da unidade; *comparação* com a unidade; *expressão* do resultado dessa comparação por um número." (CARAÇA, 1989, pág. 30)[10]

Vejamos a figura 7.

[9] Padrão único de medida.
[10] Negrito do autor.

Figura 7*- Medidas dos segmentos* $\overline{EF}$ *e* $\overline{GH}$



Fonte: Elaborada pela autora.

Como resultado da comparação dos segmentos de retas $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, cabe dizer que no segmento $\overline{EF}$ cabe cinco vezes o segmento $\overline{GH}$. Desta forma, a medida de $\overline{EF}$, considerando que o segmento $\overline{GH}$ seja visto como unidade u, então o segmento $\overline{EF}$ mede 5u. Do mesmo como, se considerarmos inversamente o segmento maior como sendo a unidade, o menor medirá 1/5 dele.

Em geral, nem sempre é possível encontrar a medida na unidade com a qual se pode encontrar um valor inteiro de unidades quando se compara o menor com o maior. Neste caso, é preciso buscar uma nova unidade de tal forma que ela caiba exatamente nos dois segmentos que se deseja medir. Ao compararmos os segmentos $\overline{IJ}$ com $\overline{KL}$, não é possível saber quantas vezes$\overline{KL}$ cabe em $\overline{IJ}$, desta forma procura-se uma unidade comum u'. E que neste caso o segmento encontrado cabe 11 vezes no maior e três vezes no menor. Veja figura 8.

Figura 8*- Subdivisão de unidade*

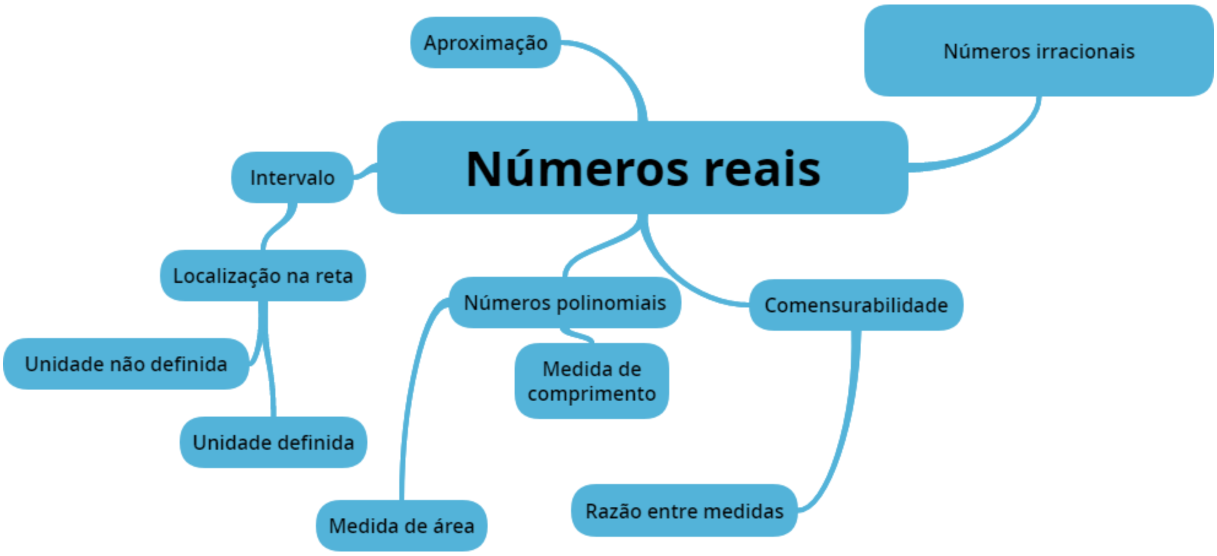
Fonte: Elaborada pela autora.

Na imagem acima, o segmento $\overline{KL}$ foi dividido em três partes iguais para que seja possível caber um número inteiro de vezes em $\overline{IJ}$. Logo, a medida $\overline{IJ}$ comparada com a nova unidade é 11u'. Note que não é possível exprimir a relação entre $\overline{IJ}$ e a unidade inicial $\overline{KL}$, pois a razão entre os inteiros 11 e 3, não é dada no conjunto dos números inteiros. 11/3

Há portanto um dilema no campo da medida, levando em consideração um olhar através da história da matemática antiga, onde, nesse momento, se resolve abandonar medições como a do tipo de $\overline{IJ}$ com unidade $\overline{KL}$ ou se reconhece que os instrumentos utilizados não atendem esse tipo de problema, no caso o conjunto dos números inteiros. Eis que surge um novo campo numérico, chamado que racional.

Após definir o tema, para pensarmos nas atividades, foi elaborado um mapa da pesquisa com o objetivo de procurar incluir esses aspectos elencados no esquema nessas atividades e ainda, também funcionará será um norte para a análise de dados.

Figura 9- *Mapa dos conceitos envolvidos nesta pesquisa elaboradas a partir do estudo*



Fonte: Elaborada pela autora.

Com base neste estudo elaboramos as tarefas a serem desenvolvidas para a pesquisa.

CAPÍTULO 4

Neste capítulo, destacaremos aspectos relevantes para fundamentar o processo da pesquisa que possam contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem dos números irracionais em sala de aula de matemática.

Com o objetivo de situar o leitor retomamos a nossa questão de pesquisa: "De que forma os estudantes da licenciatura buscam estratégias para resolver e representar números apresentados na forma $\{\sqrt{n}\,, n \in N\}$?" Decerto, nosso trabalho busca elucidar os seguintes questionamentos: (a) como os estudantes localizam números da forma $\sqrt{n}\,, n \in N$, na reta em que a unidade é dada; (b) quais as estratégias os licenciandos usam para determinar o intervalo de localização dos números dados? e (c) de que forma os estudantes escolhem e determinam as medidas dos lados das diferentes peças do Tangram?

Para tal, nos debruçamos sobre aspectos metodológicas que possam contribuir para a nossa análise, assim como para a coleta de dados. Esta pesquisa prevê três momentos, que são apresentados a seguir:

1) Estudo sobre as grades curriculares dos cursos de formação de professores de matemática na Baixada Fluminense e um levantamento bibliográfico e elaboração das tarefas: fase inicial da pesquisa em que buscamos identificar as necessidades para a confecção das tarefas a serem propostas;
2) Implementação das tarefas e sua análise: esse momento começa com a ida ao campo para coleta de dados. Através das informações captadas são analisadas as respostas dos estudantes e novas tarefas são elaboradas ou reelaboradas de forma que são refinadas ao longo do processo;
3) Análise final: apresentação dos resultados do estudo proposto e elaboração de um produto, um guia didático contendo sugestões de tarefas e o encaminhamento para a sua aplicação.

4.1. Análise curricular: como foi feito?

A análise das ementas e bibliografias, baseado no trabalho de Costa Neto; Giraldo; Rangel (2015), das disciplinas de um curso de um curso de licenciatura para identificar de que forma o uso de tecnologias são implementadas no curso, buscamos acessar os currículos das Universidades Federais da Baixada Fluminense do Rio de Janeiro visando entender como a didática específica anda sendo implementada na formação inicial de professores de matemática. Tal resultado está apresentado no capítulo 2 desta pesquisa.

Nesse contexto, a busca se deu através dos *sites* eletrônicos das instituições para observar como é organizado o curso, olhando as ementas e bibliografias. Aqui, estamos dando visibilidade ao currículo explícito, na perspectiva de Silva, 2010, que entende como o “oficial”. Ressaltamos também que apesar da disciplina ser estruturada através dos documentos oficiais, o professor regente, em sua prática pode não seguir todo o conteúdo.

As buscas das Universidades Federais da Baixada Fluminense do Rio de Janeiro com ensino presencial: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro e Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro se deu através de consulta, que se iniciou no Cadastro e-MEC[11] - Cadastro Nacional de Cursos e Instituições de Educação Superior. Essa base de dados oferece informações oficiais de cursos e Instituições de Educação Superior, independente de sistemas de Ensino (público ou privado). As opções existentes para a busca são as chamadas de Consulta avançada e Consulta interativa.

No campo Consulta interativa, consta o mapa do Brasil, a partir daí, foi selecionado o estado do Rio de Janeiro. Após esse momento, aparecem mais dois campos que podem ser escolhidos, sendo eles: o curso e o munícipio. Como a região da Baixada Fluminense do Rio de Janeiro é composta por mais de um município, não foi selecionado nada nessa opção, restando escolher a matemática na relação de opções de cursos. De maneira mais precisa a região da Baixada Fluminense possui nove municípios, a saber: Duque de Caxias, Nova Iguaçu, São João de Meriti, Nilópolis, Belford Roxo, Magé, Guapimirim e Mesquita. A pesquisa no e-MEC, relatada, gerou uma lista com sessenta e uma instituições de ensino, foi olhando essa listagem e conhecendo os municípios que compõem a região delimitada é que chegamos nas duas Universidades Federais da Baixada Fluminense do Rio de Janeiro na modalidade presencial: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro e Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro.

Através dos *sites* das instituições, atesto que ambas possuem dois *campi* na Baixada Fluminense. O IFRJ em Paracambi e Nilópolis; a UFRRJ em Seropédica e Nova Iguaçu. Depois desse momento, foi analisado de forma geral como são compostas as grades curriculares desses diferentes cursos de licenciatura em matemática considerando o rol das disciplinas, os pré-requisitos, as ementas e a bibliografia.

[11] http://emec.mec.gov.br/

Em novos estudos, indicamos uma reorganização para efeito de comparação, usando o agrupamento de acordo com a classificação de Costa Neto et. al (2015), a saber: Conteúdo Matemático, Conteúdo Pedagógico, Ensino e História da Matemática; e Requisito Curriculares Complementares (RCC); Áreas Afins.

O objetivo é conhecer as didáticas específicas e verificar qual o espaço que as didáticas específicas estão ocupando nesses cursos. Ou seja, verificamos o rol de disciplinas ofertadas e suas ementas em busca de pistas sobre o que é de que forma ocorrem as relações entre as disciplinas específicas de matemática com as disciplinas que discutem o ensino

4.2. Local e sujeitos da pesquisa

O contexto de sala de aula foi o lugar escolhido porque nele se desenvolve o processo ensino/ aprendizagem porque segundo Kindel (1998), ele se "constitui como um espaço rico em variáveis"(p.35).

Para entender os saberes docentes mobilizados e visualizar se existe alguma conexão entre saber matemático e os conhecimentos pedagógicos, em específico olhamos a ementa, programa e bibliografia de ensino I e II da Universidade estudada.

Para melhor estudar o objeto desta pesquisa, estamos mais interessados no "como" e no "por que" do que no "quantos".

A implementação de tarefas de números foi em uma turma de graduandos de um curso noturno de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública da Baixada Fluminense regularmente inscritos em uma disciplina de didática específica com carga horária semestral de 60h distribuídos em dois encontros semanais de 2h em que estudantes do 3º período em diante podem se matricular. Nesta disciplina são discutidas e analisadas situações de aprendizagem envolvendo conteúdos do Ensino Fundamental II.

Para a realização da pesquisa foi criado um cenário em que a discussão entre os estudantes fosse oportunizada. Em função disso, os estudantes foram agrupados em duplas ou trios e as tarefas apresentavam questões para as quais os estudantes precisavam dar o seu ponto de vista, justificar suas respostas, confrontar com a de seus colegas.

Segundo Skovsmose (2000),

> Ser um cenário para investigação é uma propriedade relacional. A aceitação do convite depende de sua natureza (a possibilidade de explorar e explicar propriedades matemáticas de uma tabela de números pode não ser atrativa para muitos alunos), depende do professor (um convite pode ser feito de muitas maneiras e para alguns alunos um convite do professor pode soar como um comando), e depende, certamente, dos alunos (no momento, eles podem ter outras

> prioridades). O que pode servir perfeitamente como um cenário para investigação a um grupo de alunos numa situação particular pode não representar um convite para um outro grupo de alunos. Se um certo cenário pode dar suporte a uma abordagem de investigação ou não é uma questão empírica que pode ser respondida através da prática dos professores e alunos envolvidos. (SKOVSMOSE, 2000, pág. 72)

Desta forma entendemos que mesmo sendo uma atividade aberta, o estudante participante da pesquisa pode considerar a atividade pouco atrativa e não querer realizá-la.

Quanto ao perfil dos estudantes são pessoas de 20 a 30 anos de idade e de períodos variados. Os alunos que participaram da pesquisa foram os que se candidataram voluntariamente.

4.3. Coleta de dados e recursos

Os instrumentos utilizados para coletar os dados desta pesquisa são: diário de campo do pesquisador, registro escrito das respostas dadas pelos estudantes, imagens fotografadas e vídeos gravados em celulares dos pesquisadores contendo registro das discussões no grupo.

Todas as atividades foram realizadas em grupos por todos os estudantes da turma, embora os registros para a coleta tenham sido realizados individualmente.

Para esta fase consta o seguinte roteiro: a) Conversa de sondagem para conhecer os voluntários da pesquisa; b) Aplicação das tarefas para os estudantes, organizados em pequenos grupos para a sua realização, onde apenas um dos grupos será estudado.

Estamos chamando de tarefa uma proposta de ação. A ideia envolvida aqui é: propor uma tarefa, após o aluno aceitar, ele começa a executar.

Diário de campo da pesquisadora

Neste instrumento serão feitas anotações (comentários dos estudantes, forma de organização dos grupos, perguntas feitas pelos estudantes entre si, ou para o professor pesquisador, outros) e sobre o desenrolar das atividades feitas pelos alunos. As anotações no diário tanto poderão ser feitas durante a aula quanto após cada encontro.

Registro escrito das respostas dos estudantes

Os registros escritos das respostas dos estudantes são as folhas coletadas durante a aplicação das atividades, onde os participantes realizam suas anotações. O registro escrito pode vir a complementar a gravação em vídeo.

Gravações em vídeo

As gravações de vídeo dessa pesquisa foram feitas pela equipe do Laboratório: LOVE_EMIM. E os voluntários foram avisados que podem sair da pesquisa em qualquer momento.

Segundo Steffe e Thomposson apud. Kindel (2012), pesquisadores de educação Matemática na década de 70, perceberam a necessidade de uma metodologia específica e não deveriam mais pegar modelos de outras áreas de ensino para adaptá-las. Tal observação se deu na importância das interações que acontecem dentro da sala de aula, entre os estudantes, como também em professor com estudantes.

Apesar da pesquisa com vídeo em educação matemática não ser tão nova, existem poucos materiais que respondam todas as multiplicidades desse tipo de metodologia. No livro Métodos de Pesquisa em Educação Matemática: Usando Escrita, Vídeo e Internet de Arthur B. Powell no capítulo 1 tem um roteiro que ajuda a compor a pesquisas deste tipo.

Não é de hoje que pesquisadores em Educação Matemática têm utilizado tecnologia para capturar registros. Atualmente a facilidade de realizar gravações em vídeo possibilita desvendar detalhes de sons e imagens, como por exemplo, permite acompanhar o comportamento não-verbal. (POWELL, 2015)

Superando a limitação humana pois possibilita que seja revisto várias vezes, o que aparentemente justifica o interesse da comunidade de pesquisadores na ferramenta.

Apesar da relevância de dados em vídeos Hall (apud. Powell, 2015), afirma que essa ferramenta para "coletar, assistir e interpretar vídeo como fonte de dados para um estudo" é pouco conhecida. Por isso se faz necessário, uma leitura de fontes sobre informações da mesma para ter conhecimento de como posicionar a câmera e não gravar vídeo de maneira incompleta, sendo seletivo de alguma maneira. Além disso, o vídeo não está imune a problemas e se faz necessário ter cautela ao gravar para que as perspectivas do pesquisador não alterem a fonte de dados.

Pesquisadores estão incluindo outras fontes de dados para agregar ao vídeo. Pirie (apud. Powell, 2015) fala da produção escrita dos estudantes junto das gravações em vídeo para um exame mais rico em atividades matemática. Lesh e Lehrer (apud. Powell, 2015), também sugere outras fontes de dados combinadas ao vídeo, como por exemplo: observações etnográficas, entrevistas clínicas e experimentos de ensino.

O consentimento de uma atividade gravada requer que o participante seja bem informado, isso inclui uma formalização na forma escrita, informando quem terá acesso aos dados e o seu uso, geralmente acontece antes das gravações iniciarem. Outras questões étnicas também são importantes, como as mudanças de objetivos posterior ao consentimento, podem colocar a validade da pesquisa em risco.

Bottorll (apud. Powell, 2015), quanto à análise de dados de gravações em vídeo argumenta que seu potencial é a permanência. De maneira similar, Rochelle (apud. Powell, 2015), diz que possibilita interpretações sobre muitas perceptivas.

> De maneira significativa, as gravações de vídeo permitem, por exemplo, um exame em profundidade do desenvolvimento do trabalho matemático e do pensamento matemático dos mesmos estudantes depois de vários anos, assim como o estudo e análise do crescimento cognitivo de estudantes individuais no cenário de um grupo social (DAVIS et al., 1992; MAHER; ALSTON, 1991 apud. Power, 2015).

Assistir algumas vezes ao vídeo também possibilita a triangulação de dados. Ainda assim alguns pesquisadores adotam o "portfólio de vídeo" que pode conter:

a) Identificação de episódios documentados e que emergiram a partir da análise;
b) Cortes dos episódios encontrados no videoteipe;
c) Produção escrita dos estudantes; anotações do investigador registrando atividades temáticas que pesquisadores avaliam como sinais do desenvolvimento de ideias matemáticas.

Alguns pesquisadores usam o recurso de transcrição dos dados em vídeo, mesmo sem a possibilidade de uma transcrição exata das interações verbais e gestuais, ainda assim é possível se aproximar de uma exatidão suficiente para a pesquisa. Esse processo pode variar de acordo com o sistema utilizado.

Existe uma diferença quanto a apresentação dos dados nas gravações em áudio e vídeo com a da transcrição. No nosso caso, buscamos confrontar a transcrição com o registro escrito das respostas dos estudantes e com o diário de campo.

4.4. Desenvolvimento das tarefas

As atividades ocorreram em duplas, mas não tivemos duplas com os mesmos integrantes pois em cada um dos encontros um dos integrantes do trio que autorizou a participação na pesquisa, faltou. Ou seja, como tivemos três estudantes que se propuseram a participar da pesquisa, tivemos duas duplas distintas, uma vez que foram dois dias para a realização das tarefas. As tarefas foram elaboradas de maneira que não acontecessem de forma rígida, limitando-se a um conteúdo específico da grade curricular, mas que os estudantes pudessem argumentar e interagir entre eles na busca por solução.

Cada integrante, recebia uma cópia impressa da tarefa a ser discutida e os materiais necessários para a sua realização como por exemplo, durante a tarefa 3, os estudantes receberam uma caixa com vários jogos de Tangram. A tabela 5 destaca a execução das tarefas contendo o cronograma das implementações e suas respectivas duplas. A tabela 1 apresenta as tarefas elaboradas inicialmente.

Tabela 0-1- Cronograma de realização das tarefas

Aulas	Datas	Duplas
Tarefa 1	29/05/2019	Robin e Ted
Tarefa 2	29/05/2019	Robin e Ted
Tarefa 3	05/06/2019	Lina e Ted

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

No quadro 5 apresentamos a ideia central das tarefas, os objetivos e a expectativa das possíveis respostas dos estudantes.

Quadro 5- *Tarefas com objetivos e expectativas.*

TAREFAS	OBJETIVOS	EXPECTATIVA
Tarefa 1: Extrato de um texto sobre números.	Identificar de que forma os estudantes entendem duas concepções distintas de número.	Associem a abordagem historicamente associando-a com grandezas incomensuráveis e apresentem/falem sobre conjuntos racionais e irracionais.
Tarefa 2: Localizando números $\sqrt{n}$, n natural, na reta e em algum intervalo.	Verificar de que formas os estudantes localizam estes números na reta.	Que os estudantes percebam a ordenação, através de aproximações decimais, como também da localização geométrica.
Tarefa 3: Medindo as peças do Tangram.	Determinar as medidas dos lados das diferentes peças do Tangram escolhendo um lado com unidade de medida.	Que os estudantes discutam entre si e observem que o lado pode ser escrito na forma a + b$\sqrt{2}$ (ou seus múltiplos) onde a e b são números inteiros.
Espiral pitagórica	Construir a espiral pitagórica com os valores de $\sqrt{n}$.	Que os estudantes conheçam a representação geométrica e saibam que o processo pode ser infinito.

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

As tarefas utilizadas nas implementações para coleta de dados da presente pesquisa foram (re)elaboradas a partir da análise constituindo assim, o material disponível no guia didático apresentado no capítulo 6.

4.5 Análise de dados

A análise dos dados foi realizada através consulta dos seguintes materiais: diário de campo, registros escritos e gravações em vídeo e em áudio. Os alunos serão identificados por codinomes/apelidos escolhidos pelo pesquisador, preservando assim a sua identidade conforme orientação do comitê de ética, cujo procedimento será apresentado no próximo tópico.

Na sequência, para o entendimento desse material e extração será agrupado de acordo com as semelhanças e disparidades existentes, tais como: tipos de exemplos, tipos de definição, estratégias de localização de pontos na reta, etc. Com a intenção de reduzir os dados, organizar e simplificar as ideias trazidas pelo grupo em questão.

A partir daqui vamos destacar na análise, os seguintes aspectos: o tipo de ideias se tem sobre números; que formas os irracionais são localizados na reta em que a unidade é dada; as estratégias usadas para determinar o intervalo de localização dos números irracionais dados; as formas escolhidas para determinar as medidas dos lados das diferentes peças do Tangram; e ainda, de que forma essa abordagem contempla a discussões dos números irracionais em sala de aula na Educação Básica.

Para realizar a análise dos dados seguimos os seguintes passos: i) assistir e ouvir várias vezes as gravações; ii) transcrever os áudios; iii) identificar ideias nas falas envolvidas no áudio e organizar em um quadro em que são destacados os episódios, falas dos participantes, a ideia envolvida e observações do pesquisador. Veja extrato apresentado no quadro 6 realizada para a tarefa 2; iv) compor a análise dos dados.

Quadro 6– *Organização para a análise dos dados*

Episódios	Fala	Ideia envolvida		Observações
5	Robin: Isso, isso. Ted: Mas fração é um número racional. E racional você não consegue escrever na forma de fração e você também não	???? Ted fala racional ou irracional.	Se Ted estiver se referindo aos irracionais e falando racionais há uma possibilidade de	Se no áudio ele estiver falando racional temos que procurar pistas de como ele resolve este conflito ao longo do trabalho.

	consegue estabelecer uma medida no mundo real. Robin: Então filho...		um conflito cognitivo	

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

Em função do tempo para a realização da pesquisa de campo e com base nos resultados obtidos foram aplicadas as três primeiras tarefas cuja análise apresentamos no próximo capítulo, o capítulo 5 e um produto, capítulo 6. Este produto é um guia didático para professores que ensinam matemática e que sirva de apoio para as aulas em que for discutir outros conjuntos numéricos, no caso os números irracionais. Não pretendemos esgotar o tema e sim dar mais um passo nas propostas que já existem.

4.6. Comitê de ética

Em pesquisa com Seres Humanos, é necessário o Comitê de Ética em Pesquisa por determinação legal, seguindo a determinação da Resolução 466 de 12 de dezembro de 2012 do Conselho Nacional de Saúde. Devido à pouca informação presente no site da instituição disponibilizo o material enviado, sem o projeto de pesquisa, para que pesquisadores possam consultar.

Cada instituição pode variar no seu regimento interno, mas em geral é preciso: título do projeto, pesquisador responsável, equipe da pesquisa, endereço de contato, informação da unidade/departamento/instituição de vínculo do pesquisador, informações de financiamento e orçamento financeiro e um projeto de pesquisa.

O projeto de pesquisa pode ser composto do resumo do trabalho, uma introdução, hipóteses, objetivos, metodologia, tamanho amostral, critério de escolha, sigilo, consentimento, riscos da pesquisa, benefícios da pesquisa e cronograma de execução. No anexo encontram-se modelos do termo de consentimento institucional, a ser encaminhado para a instituição onde é realizado; um pessoal_ para participantes de maior idade e um para o responsável_ para o caso em que os participantes sejam de menor idade.

CAPÍTULO 5

Neste capítulo vamos analisar recortes de interações decorrentes de implementações realizadas no 1º semestre de 2019. De acordo com o que foi sinalizado no capítulo anterior, as tarefas originaram do estudo feito em artigos, dissertações e teses sobre os números irracionais. Na sequência, realizaremos algumas reflexões em relação à tarefa em que apresentamos um extrato de livro (tarefa 1) e em seguida, à elaboração da estratégia elaborada pelos discentes; nas tarefas dois e três, consideramos as formas como localizam, definem e representam números e de instrumentos específicos para medição das peças do Tangram.

O contexto da sala de aula

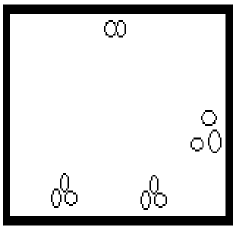
Todos os encontros aconteceram em horário normal da disciplina escolhida e, portanto, contava com a presença de licenciandos que não participaram da pesquisa pois escolheram não participar da mesma. Ou seja, todos os estudantes realizaram a tarefa que ora apresentamos, mas analisamos apenas daqueles que autorizaram sua participação na pesquisa. A sala de aula não era muito grande, a coleta aconteceu com a rotina normal da turma. Desta forma, tivemos alguns ruídos nas gravações pois o ar condicionado estava ligado e eventualmente os integrantes dos outros grupos falavam alto com os seus pares. Para a gravação em áudio e vídeo foram usados os celulares, de três dos integrantes do grupo de pesquisa.

Momento um: Contar ou medir

Para poder identificar e analisar as ideias sobre números em contexto sobre contagens e medidas foi elaborada uma atividade a partir de um extrato de texto em que o autor lança hipóteses sobre a forma como os gregos se posicionaram sobre a situação.

Nesse dia, estavam presentes a dupla Robin e Ted, participantes da pesquisa e mais três trios. A figura 10, apresenta a disposição dos grupos na sala de aula, com destaque para a dupla participante da pesquisa que se encontrava um pouco distante dos demais.

Figura 10- Organização dos grupos no primeiro dia da coleta de dados



Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

Objetivo

Identificar de que forma os estudantes entendem duas concepções distintas de número.

Dinâmica

Esta atividade foi abordada no contexto da sala de aula da disciplina Ensino de Matemática I, na qual os estudantes estavam regularmente inscritos.

Os estudantes foram organizados em grupos de três de tal forma que os que participavam da pesquisa se sentaram juntos e os demais se organizaram em outros trios.

A tarefa foi respondida individualmente e gravada em áudio e vídeo em três celulares. Um focado na fala dos integrantes, o outro nos movimentos das mãos durante a realização da atividade e o terceiro no vídeo com outro ângulo.

Tarefa 1

Quadro 7- *Tarefa 1*

A aritmética tem a ver com números e a geometria, com comprimentos. Para todo comprimento havia um número privilegiado, um inteiro, que o expressava. E todo inteiro, mais cedo ou mais tarde, revelaria ser o comprimento disto ou daquilo. Para os gregos antigos, a aritmética e a geometria já eram tidas como aspectos de uma mesma realidade fundamental. Ou seja, uma cesta de figos continha um número definido de figos, e uma pedra tinha sempre um tamanho definido. Ora, o primeiro tipo de número era o inteiro. Mas, que tipo de número se poderia atribuir à pedra? (DEWDNEY, 2000, p.27) Qual a sua opinião sobre o texto acima? Discuta com o seu grupo e, comente o texto concordando ou discordando e justificando seu ponto de vista. Elaborem um texto e entregue ao professor.

Fonte: Elaborado pela autora.

No primeiro momento, os estudantes apresentaram alguma dificuldade em entender o texto e pensar no que deveriam responder. É importante destacar que durante o mês da pesquisa essa turma estava envolvida na leitura do livro que teve seu trecho compondo a questão, e ele já havia sido debatido anteriormente. Uma das abordagens o livro é a discussão sobre se a matemática é descoberta ou inventada. Daí a ideia de apresentar uma citação extraída do livro para identificar o que os estudantes pensam sobre números.

No registro, em áudio, é possível identificar que eles tentam buscar um fio condutor para a discussão.

Robin: O que ele está dizendo é que, os gregos já tinham a noção disso. Por quê? Você tem um figo, você tem noção da quantidade de figo que tem dentro de uma cesta. Só que a questão da pedra é que você não pode medir todas as pedras com um inteiro. Porque às vezes, isso daí depois eu falo.

Ted: Eu acho que aqui se encaixaria na aquela coisa do (...). Até a contradição de Pitágoras, de achar que todo, tudo era número, tudo se resumia à número inteiro.

Aparentemente estavam pensando na ideia de medida, quando se compara dois segmentos entre si. Segundo Ripoll et. al. (2015), uma diferença entre contagem e medida como formas de comparação está presente na unidade: para a contagem, a unidade é atômica, que significa que não pode ser dividida; enquanto para a medida, a unidade é divisível. Veja texto de comparação de segmentos no capítulo 3.

Em seguida, se concentram em estabelecer contagens sobre os objetos ali presentes, os figos e as pedras.

No registro escrito identificamos que os dois resolvem o problema identificando que os figos podem ser contados e que o tamanho delas não precisa ser considerado. As pedras, por outro lado, criaram conflitos pois não havia detalhes sobre as mesmas. E segundo eles era importante saber o seu tamanho para poder decidir se seria possível a contagem.

Robin: Por exemplo, se em uma cesta há dois figos, um grande e outro pequeno, independente dos tamanhos, sempre haverá dois figos. Não há questionamentos ao quantitativo.

Ted: O número de elementos de um conjunto, ou seja, os figos de uma cesta, é sempre possível fazer uma função bijetora com os inteiros positivos, na forma de listagem.

Segundo Caraça (1951), "A ideia de correspondência é tão importante que nos vamos demorar um pouco no seu estudo; ele facilitar-nos-á enormemente a compreensão de certas questões que aparecerão adiante, como seja a questão dos irracionais, o conceito de função, etc." Ou seja, Ted usa esta ideia de correspondência quando afirma que é sempre possível estabelecer uma função bijetora entre os figos e os números positivos. Aponta-se para o figo e diz um, aponta outro e diz dois e assim sucessivamente até que não haja mais figos no cesto. Desta maneira, o problema da contagem consiste em comparar dois conjuntos finitos com mesmo número de elementos, por isso Ted menciona ser uma função bijetora com inteiros positivos, que exprime uma correspondência um a um entre o conjunto de referência e o conjunto finito de objetos. Essa ideia em que faz corresponder, é uma das operações mais importantes e que utilizamos constantemente na vida e que ressalta a unidade natural envolvida na contagem. Esta ideia é uma das ideias basilares da matemática. Prova de sua utilidade é que, segundo Ripoll et. al. (2015), tal estratégia de contagem já era utilizada por grupos humanos desde a pré-história, a alguns séculos antes da criação dos primeiros sistemas de registros de escrita ou de numeração.

Mais adiante, é possível identificar o seguinte:

Ted: (...) Vou medir essa coisa aqui, "ai sei lá", você pode pegar aqui e tenho "ah", dois palmos, se você tomar isso aqui como medida. Mas se você usar essa medida aqui para medir, sei lá a cadeira, talvez você não consiga ter um número inteiro para isso, entendeu? Vai faltar um pedacinho aqui e como que ele vai medir esse pedacinho?

Robin: Uhum.

Ted: (...) De alguma maneira, ele vai ter que se basear em algum. Ah.. se você mede alguma coisa em polegada. (...) dois vírgula não sei quantos centímetros, você tem sempre um referencial, mas nem sempre você vai conseguir uma medida inteira daquilo dali. Quantos completos terão? Não é isso que ele fala?

Ted: É. Por que tipo, é uma coisa.. é.. Tipo você olhar os inteiros, na verdade os naturais, como contagem de elementos e uma outra, você determinar medida, medida de coisas.

Ted: (...) Quantas unidades de medidas você vai ter? milhares, por que existem milhares de tamanhos diferentes

Robin: É.

Ted: Não é proporcional.

Robin: É. Não é a mesma coisa sempre. É uma coisa que é variável, por exemplo, um figo não importa o tamanho do figo. Por exemplo, você tem um figo pequeno e pode ter um figo grande, mas vai contar sendo como um, por exemplo.

Provavelmente aqui, Ted já estivesse percebendo que não existe uma unidade fundamental pela qual o comprimento, volume, peso de uma dada pedra possa ser expressa em inteiros. E isso tenha o levado a falar de proporcionalidade.

Embora na comparação entre figos se tenha diferentes maturações, tamanhos, tonalidade de cores, nada disso importa. A questão envolvida é a quantidade de figos existentes. Enquanto para as pedras, ninguém pensa em pegar o pão de açúcar[12], por exemplo. No universo das pedras, podemos ter a contagem delas, mas ela não é a única. E qual é a melhor unidade para medir o pão de açúcar? Se se pretende escalar e atingir seu topo uma ideia próxima já basta para estimar a quantidade de tempo que será gasta no processo de subida em função da sua altura.

Com relação à medições, sempre é preciso tomar um outro objeto como referência, visto que esta será tomada como unidade de medida. Surgindo daí a ideia de razão de proporcionalidade.

Nessa abordagem identificamos que os estudantes discutem considerando três aspectos: história da matemática, surgimentos dos irracionais e questionamentos acerca do que seria quantidade, medidas e sistemas de medida. Toda discussão começa com conflito entre os figos, a pedra e a aritmética, pois como podemos ver no extrato do texto abaixo não existem uma referência explícita sobre a quantidade de pedras no cesto enquanto que nesta existe sobre a presença dos figos. Falar em figos nos remete a uma ideia de quantidade, visto que não existe diferença considerável nos tamanhos dos figos, diferentemente quando se trata de pedras. Essa questão promove discussões sobre a natureza da pedra, levando-os a discutir tipos, cores, tamanhos e dimensões das pedras. Enquanto discutiam tamanhos, novos conceitos começaram a permear: como peso, volume e portanto, diferentes unidades de medidas.

Após esta discussão, a dupla resolve fazer o registro escrito das suas respostas. Ted parecia bem aflito pela necessidade de registrar com um texto. A produção de escrita e interpretação de texto é um dos pontos que nos chamou atenção para retomar o áudio. E percebemos que ainda não estavam satisfeitos e retomaram a discussão:

Robin: Mas tipo, se fosse concordar com isso daqui, você está concordando que a pedra é um inteiro, mas o tamanho da pedra..

Parece que nesse diálogo tem um embrião da ideia de incomensurabilidade. Pois eles não sabem ou intuem que não existe uma unidade definida para medir a pedra,

[12] Pedra localizada no Rio de Janeiro.

independentemente de seu tamanho. Não há evidências que Ted tenha pensado nisso, porém nos chamou atenção o momento que ele se refere a duas unidades de medidas diferentes. Retomando sua colocação, temos: *"(...) De alguma maneira, ele vai ter que se basear em algum. Ah.. se você mede alguma coisa em polegada. (...) dois vírgula não sei quantos centímetros, você tem <u>sempre um referencial</u> (...)"*

Estaria ele pensando na ideia de somar objetos para relacionar com a medida? Independentemente dele ter expressado a sua ideia, acreditamos que aí esteja o conteúdo que estávamos buscando com essa tarefa. Ou seja, identificar o que os estudantes pensam sobre números. Em particular, sobre o desconforto causado pela inexistência de uma unidade com a qual se possa medir objetos, os incomensuráveis. Mas, que no contexto da sala de aula aparecem como sendo os irracionais, apresentado por um exemplo exemplar a $\sqrt{2}$, cujo valor aparece como sendo a medida da diagonal de um quadrado em que o lado mede uma unidade de medida.

Momento 2: Localizando números na reta

Nesse momento, buscamos observar se os estudantes vão colocar os números de maneira equidistante quando não são, com um pensamento amarrado aos números naturais. Possivelmente usando uma calculadora para ver essas distâncias poderia solucionar essa representação. Esse momento 2, se deu no mesmo dia da tarefa 1 e por isso a dupla participante da pesquisa foi Robin e Ted.

Objetivo

Verificar de que formas os estudantes localizam estes números na reta.

Dinâmica

A mesma da tarefa anterior.

Tarefa 2

Quadro 8 *- Tarefa 2.*

TAREFA 2 (responda individualmente) 1) Na tarefa anterior vimos que para os gregos antigos havia uma relação estreita entre números e comprimentos. a) O que você sabe sobre a visão dos gregos sobre os números irracionais? E como eles representavam esses números? 2) Descreva como você faria para localizar exatamente na reta os seguintes números?2 a) $\sqrt{2}$?

b) $\sqrt{3}$?

c) $\sqrt{4}$?

3)Sabendo que 2 está entre o intervalo 1 e 3, podemos dizer que o menor intervalo inteiro no qual o 2 está localizado é 1 e 3. Identifique o menor intervalo em que os extremos sejam inteiros onde está cada um dos números da forma n, $n \in N$, $1 \leq n < 21$.

4) Em seguida, trace uma reta e usando como unidade u = 2 cm, localize os números da forma, $\sqrt{n}$, $n \in N$, $1 \leq n < 21$ na reta. (Obs: A reta possui intervalos de 2 cm entre dois inteiros consecutivos.). Represente no verso, se preferir.

Fonte: Elaborada pela autora.

Apresentamos a análise da tarefa item por item.

O primeiro item da tarefa solicitava que os estudantes se posicionassem frente a discussão da tarefa anterior e se posicionassem sobre a visão dos gregos sobre os números irracionais e como eles representavam esses números. No áudio, notamos que inicialmente os estudantes discutem buscando consenso sobre o que deveria ser escrito, uma vez que a atividade estava sendo gravada.

A professora intervém e diz que a discussão é em grupo, mas que, o registro deveria ser individual. Desta forma, parece que o problema do registro se resolve e os estudantes passam então a discutir entre si e registrar o que consideram ser a resposta dos itens. A intervenção da professora foi fundamental para que o trabalho caminhasse pois parece que a ideia da gravação em princípio os estava inibindo e por outro haveria uma sobreposição de respostas, fala e texto escrito. Cabe citar que a equipe pesquisadora já havia combinado previamente que iria esclarecer possíveis dúvidas que pudessem surgir tanto sobre os procedimentos da gravação quanto sobre a tarefa, uma vez que se trata de uma pesquisa intervencionista.

Robin: Mas aí como a gente pode fazer aqui? Faz e depois fala?

Professora. 2: Pode ser. [...]

Professora. 1: O que foi a pergunta?

Robin: Se faz e depois fala. Por que está gravando, mas a resposta é individual.

Professora 1: Vocês podem fazer juntos, a discussão pode ser em grupo e resposta individual, tanto faz.

Kindel (2012) identificou três situações em que aparecem discussão ou silêncio no início das tarefas, quais sejam:

> a) a primeira aparece sempre no início de uma tarefa nova ou ao longo das discussões, quando alguém apresenta um dado novo que precisa ser diferido; b) a segunda é a que exemplifica ligações de coexistência associada aos papéis que as pessoas desempenham dentro do grupo de discussão; c) a terceira é aquela em que o grupo sente necessidade de tomar consciência da tarefa proposta, ou seja, necessita de um tempo para a leitura, a interpretação e a elaboração de uma resposta para ser postada (KINDEL, 2012, p.186)

Na tarefa anterior, os estudantes receberam um extrato de texto e foram convidados para discutir sobre a ideia de número e sua classificação numa perspectiva histórica. Ao receberem esta tarefa, foi solicitado que eles se posicionassem sobre a visão dos gregos no que se refere à números e comprimentos.

Robin primeiramente afirma que "*Eu não sei nada. Pra mim eles não acreditavam em irracionais" e* destaca que os gregos não acreditavam/aceitavam a existência dos números irracionais, o que remete a um lugar fora do campo numérico, talvez uma coisa mística.

Em alguns momentos estabeleceram novamente novas relações entre a leitura do livro, a tarefa anterior e a atividade proposta, como no trecho a seguir, onde parecem que tentam levantar pistas de resposta através do que se recordam do livro.

Ted: A questão de pitágoras, que ele tentou estabelecer uma relação que sempre na natureza, ele estabelecia com os números inteiros positivos naturais no caso. Sempre estabelecia .. e falava que tudo era número, ai ele acabou se contradizendo quando foi tentar medir a medida da hipotenusa de um triângulo que recebeu o nome dele, de pitágoras.
Robin: Cara, no livro que a gente leu, ele fala daquela réguazinha, qual é o nome da régua?
T: Reta, régua graduada?
R: Não. Uma que aquele personagem (...), usava para medir as paradinhas lá do lugar que ele tava (sic). Que era sempre a mesma medida, mas no final..

Nesse mesmo momento, parecem perceber uma certa confusão no pensamento dos gregos, pois para eles aparentemente tudo era mensurável, mas em algum momento, se deparam com uma contradição. Ou seja, nem sempre a unidade de medida dava conta em exprimir um número natural que contemplasse todas as coisas.

Quando os estudantes leem as suas respostas não ficam satisfeitos pois percebem que parece existir uma contradição entre o que leram de suas escritas e o que discutiram enquanto escreviam. No áudio,

Robin: Coloquei que o gregos não conheciam os números irracionais, no máximo utilizavam as frações para determinar medidas menores como unidade padrão.
Robin: Representavam aproximação. Foi, Ted?
Robin: Por que você tá emperequetando o negócio? Coloca do jeito que você colocou da primeira vez cara. Você usou função bijetora no outro..risos.. Meu Deus.. risos.
Ted: Vou botar assim.
Robin: Tá. O que você escreveu?
(Pausa para a leitura silenciosa do dele, seguida da leitura do dela)
Robin: Tá. O que eu escrevi.. até onde eu sei os gregos não conheciam os irracionais, no máximo utilizavam frações para determinar medidas menores que a unidade padrão. Acho, porque eu não sei, que representavam por aproximação.

E no registro escrito, não aparece esta informação.

Talvez essa diferença entre o que discutem entre si e o que conseguem expressar por escrito tenha se dado por uma tentativa de buscar o que eles acham o que nós (professores) queremos e o que eles entenderam. Ou seja, parece que há um conflito entre a crença em relação à expectativa do pesquisador e o que eles pensam. Ou ainda, parece haver um certo desconforto diante de uma situação aparentemente familiar, mas que de fato é não usual.

Resolvido a questão do que escrever, como escrever e de que forma se portarem diante da gravação, o trabalho segue sem maiores problemas. Mas, novamente se vêem diante de algo novo, que é a questão "Descreva como você faria para localizar exatamente na reta, os seguintes números? a)$\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ e c) $\sqrt{4}$."

Como não foi solicitado que localizassem os números na reta e sim, explicassem como fariam, os estudantes se viram em um novo desafio. Qual seja, o de explicar, como fariam para localizar, tarefa esta não usual nas aulas de matemática pois normalmente se pede para localizar números na reta. No áudio, ouve-se uma discussão sobre a possibilidade do uso da calculadora. Em função disso passam a questionar a possibilidade do uso de uma calculadora pois enveredaram por encontrar valores aproximados.

Ted: Descreva como você faria para localizar exatamente na reta os seguintes números. Como eu faria?
Robin: Eu calcularia. Tu tem alguma ideia?
Ted: Tenho. Eu ia testar.
Robin: Eu também. Faria por, através de tentativas.
Robin: Escreva como você faria para localizar exatamente na reta os seguintes números. É

uma resposta para todos eles né?

Ted: Não

Robin: Não. "A" e a "b". A "c" não. Através de tentativas para encontrar (escrevendo).

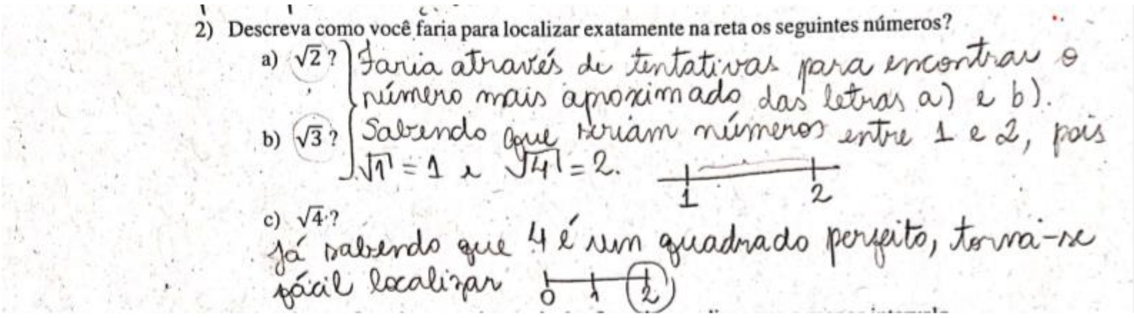
Ted: Posso usar calculadora não né?

Robin: Não

O interessante é que diante de uma prática usual de que em sala de aula de matemática não se usa a calculadora eles acatam que não seja possível o seu uso aqui. Diante disso, eles não solicitam à professora uma calculadora e nem usam a calculadora disponível nos seus celulares.

Para responder este item, observamos que eles usam duas estratégias: a) identificam que 4 é um quadrado perfeito (Robin) e pela definição de raiz quadrada o número quatro é um número inteiro (Ted) e b) que os outros dois itens "a" e 'b" não são inteiros. Neste caso, identificamos no registro escrito duas formas de os representar. A que considera o intervalo (Robin) e a que usa aproximações (Ted).

***Figura 11-** Resposta Robin para o item "localizar exatamente os números na reta"*



2) Descreva como você faria para localizar exatamente na reta os seguintes números?

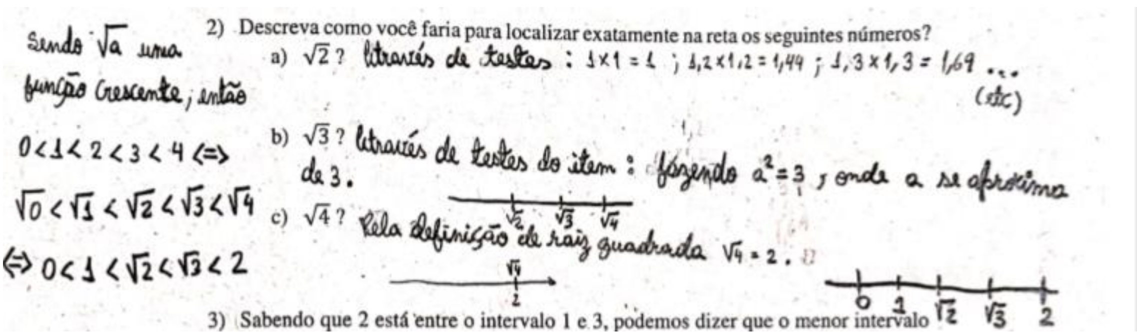
a) $\sqrt{2}$? Faria através de tentativas para encontrar o número mais aproximado das letras a) e b).

b) $\sqrt{3}$? Sabendo que seriam números entre 1 e 2, pois $\sqrt{1} = 1$ e $\sqrt{4} = 2$.

c) $\sqrt{4}$? Já sabendo que 4 é um quadrado perfeito, torna-se fácil localizar

Fonte: Registro escrito dos estudantes.

***Figura 12-** Resposta Ted para o item "localizar exatamente os números na reta"*



Sendo $\sqrt{a}$ uma função Crescente, então $0<1<2<3<4 \Leftrightarrow \sqrt{0}<\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{3}<\sqrt{4} \Leftrightarrow 0<1<\sqrt{2}<\sqrt{3}<2$

2) Descreva como você faria para localizar exatamente na reta os seguintes números?

a) $\sqrt{2}$? Através de testes: $1\times1 = 1$; $1,2\times1,2 = 1,44$; $1,3\times1,3 = 1,69$ ... (etc)

b) $\sqrt{3}$? Através de testes do item: fazendo $a^2=3$, onde a se aproxima de 3.

c) $\sqrt{4}$? Pela definição de raiz quadrada $\sqrt{4} = 2$.

3) Sabendo que 2 está entre o intervalo 1 e 3, podemos dizer que o menor intervalo

Fonte: Registro escrito dos estudantes.

Ted busca encontrar uma padronização para a ideia de aproximação. Para tanto, Ted usa aproximações com uma casa decimal. Mas, parece que três questões entram "em jogo" nesse momento, a satisfação pessoal com as aproximações, o formalismo matemático e a matemática escolar.

Ted: Ia fazer até se aproximar, Tipo ia fazer só com uma casa decimal também para não ficar fazendo muita conta. Por que a definição de raiz quadrada é o que?
[...][13]
Ted: Eu vou chegar no cara mais próximo.
Robin: Mas só que tá tendo muito trabalho.

Ted comenta que deseja fazer as aproximações com uma única casa decimal, para não fazer muita conta. Robin, intervém dizendo que sua decisão de usar uma única casa decimal é contraditória com a decisão de não fazer muitas contas e sugere que busque encontrar uma forma de explicar.

Ted: Queria que eu fizesse o que?
Robin: Você tem que escrever o que você tá fazendo.
Robin: Através de tentativas, era só escrever isso doido
Ted: Ãn. Posso escrever através de tentativas?
Robin: Você tem que descrever. Não, não tá errado, mas você tá tendo muito trabalho.

Robin parece confirmar a contradição de Ted. Ele pode estar fazendo a conta apresentando uma única casa decimal o que para ela, já é muito trabalho. Mas ele por outro lado não acha que isso é muito trabalho. Depois ele parece aceitar a sugestão de Robin, como veremos a seguir.

Ted: É porque eu não gosto de fazer conta não, acho que tem calculadora para isso. Mas tá bom.
Robin: Aí coloca etc ou três pontinhos.
Ted: É. vou colocar.

Embora aparentemente Ted concorde com Robin, verificamos que essa discussão é

[13] Ruídos no áudio, falas confusas.

retomada em vários momentos adiante. E ambos continuam cada um no seu ponto de vista. Ou seja, Robin considera suficiente localizar a $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ em um intervalo enquanto que para Ted, estes números são pontos na reta e que portanto é preciso determiná-los exatamente e para tanto irá recorrer à ideia de aproximação decimal.

Robin: Isso é tanto do "a" para o "b". Olha o que coloquei. Faria através de tentativas para encontrar o número mais aproximado das letras "a" e "b". Sabendo que seriam números entre 1 e 2, pois a $\sqrt{1}$ *= 1 e* $\sqrt{4}$ *= 2, então se a gente tá calculando* $\sqrt{2}$ *e* 3*, tem que ser um número que tá entre 1 e 4. Então vai ser "um" vírgula alguma coisa.*
Ted: $\sqrt{4}$ *é dois.*
Robin: É, mas como a gente vai fazer para localizar? A letra "c" que fiquei confusa
Ted: Como assim? Acabou.
Robin: É para a gente descrever como faria para localizar.
Ted: Para localizar é só desenhar a reta numérica e pronto, marcar o ponto 2.
Ted: Pela definição de raiz quadrada e função, $\sqrt{4}$ *= 2, pronto. Ahh desenharia a reta. Vou até desenhar a reta aqui, aqui é* $\sqrt{2}$*, aqui é* $\sqrt{4}$*.*
(Pausa para escrita)
Robin: Foi?
Ted: Vou escrever assim para não ter trabalho.

No áudio é possível identificar os diferentes momentos em que cada um está. Enquanto Robin, já queria ir para o próximo item da tarefa, Ted ainda está diante do seu propósito de localizar "exatamente" o ponto na reta. Como não consegue encontrar outra estratégia (recurso geométrico via construção com compasso, por exemplo), ele entra em conflito e não se dá por satisfeito com a sua resposta. Vale destacar que o desenho geométrico foi retirado na maioria das grades curriculares do Ensino Básico e segundo Kaleff (1994), a geometria Euclidiana também. Ou seja, para ela, "a Geometria Euclidiana foi praticamente excluída dos programas escolares e também dos cursos de formação de professores de primeiro e segundo graus, com consequências que se fazem sentir até hoje" (KALEFF, 1994, p. 20) o que talvez explique a dificuldade encontrada por Ted para localizar estes números na reta.

No enunciado da questão 3, é solicitado que encontrem um intervalo de localização de cada um dos números expressos sob a forma de radical.

Figura 13- *Enunciado da questão três.*

3) Sabendo que 2 está entre o intervalo 1 e 3, podemos dizer que o menor intervalo inteiro no qual o 2 está localizado é 1 e 3.
Identifique o menor intervalo em que os extremos sejam inteiros onde está cada um dos números da forma $\sqrt{n}$, n $\in N$, $1 \leq n < 21$.
Ou
Considere uma régua graduada. Identifique o menor intervalo em que os extremos sejam dois pilares da régua para cada um dos números $\sqrt{n}$, n $\in N$, $1 \leq n < 21$.

Fonte: Elaborada pela autora.

No áudio identificamos que os estudantes encontraram dificuldades para entender o enunciado. Observe:

Ted: Eu queria escrever uma coisa. Mas não vou escrever não.

Robin: Escreve. Escreve o que você quiser.

Ted: Tipo, a raiz quadrada é uma função crescente. Se ela é crescente, os números estão crescendo e esse número é maior que esse e esse número é maior que esse...

(Pausa)

Robin: Tá. Não diz se é intervalo aberto, nem fechado, então basta identificar, tipo..

Ted: pronto, tá desenhado esse ai. Agora é só terminar, acabou. Vou usar a minha matemática que eu conheço, não quero fazer conta.

Robin: Oh o três..

Ted: Poxa, já tá ai?

Robin: Já. É que você é muito detalhista Três. Sabendo que 2 está entre o intervalo 1 e 3, podemos dizer que o menor intervalo inteiro no qual o 2 está localizado é 1 e 3. Identifique o menor intervalo em que os extremos sejam inteiros onde está cada um dos números da forma n, n pertencentes aos naturais, … ou considere uma régua graduada…

Ted: Podemos dizer que o menor intervalo inteiro que 2 está localizado é 1 e 3. Identifique o menor intervalo em que os extremos sejam inteiros onde está...

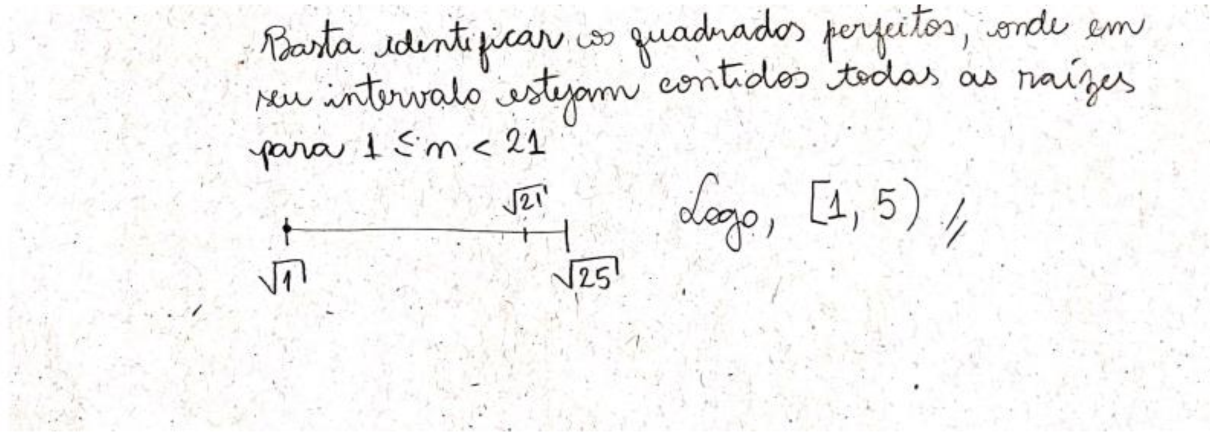
Robin: Você entendeu a pergunta?

Ted: Não.

Robin: Ele quer que a gente escreva o intervalo que engloba essa...

E escreve:

Figura 14- Resposta da ficha por Robin na questão três.


Basta identificar os quadrados perfeitos, onde em seu intervalo estejam contidos todas as raízes para $1 \leq n < 21$

$\sqrt{21}$

$\sqrt{1}$ $\sqrt{25}$

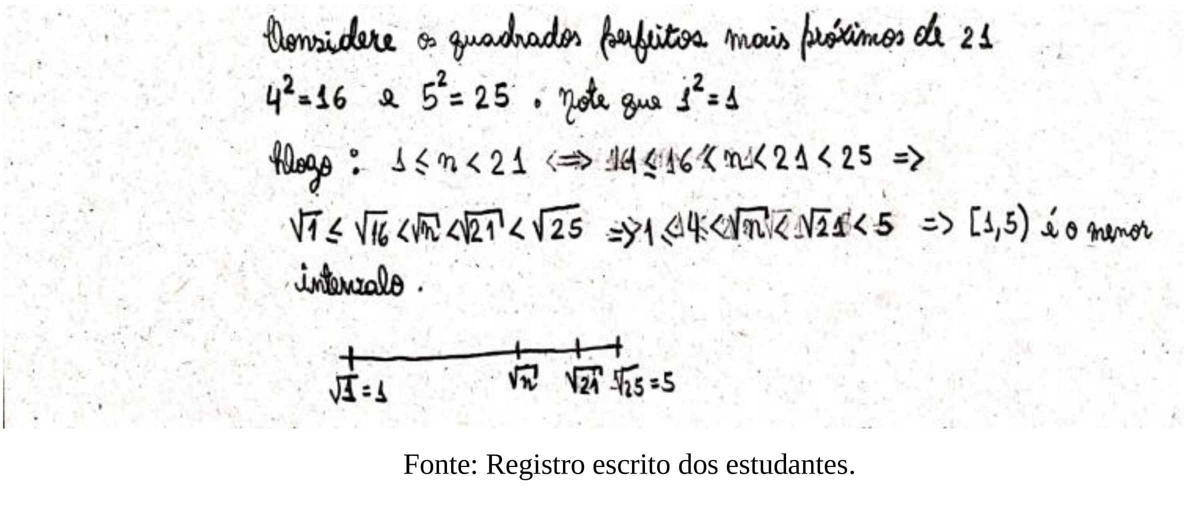
Logo, $[1, 5)$

Fonte: Registro escrito dos estudantes.

Robin usa um único intervalo que engloba todos os valores entre o intervalo dado e para tanto determina a $\sqrt{1}$ e de $\sqrt{21}$ e verifica que seria melhor considerar o próximo valor inteiro. Ou seja, considera o intervalo (1, 5). Pois $\sqrt{1} = 1$ e $\sqrt{25} = 5$. Ela sabe que $1 = \sqrt{1}$, que $2 = \sqrt{4}$, que $4 = \sqrt{16}$ e 21 é maior do que 16 então precisa procurar o próximo, que é $\sqrt{25} = 5$. Compreendemos que estavam falando que $\sqrt{16} < 21 < \sqrt{25}$.

Ted, por sua vez, por sua vez explora a ideia dos quadrados perfeitos tentando usar a ideia de Robin para responder a questão. E com isso, responde:

Figura 15 *- Resposta da ficha por Ted na questão três*


Considere os quadrados perfeitos mais próximos de 21

$4^2 = 16$ e $5^2 = 25$. Note que $1^2 = 1$

Logo: $1 \leq n < 21 \Leftrightarrow 1 \leq 16 < n < 21 < 25 \Rightarrow$

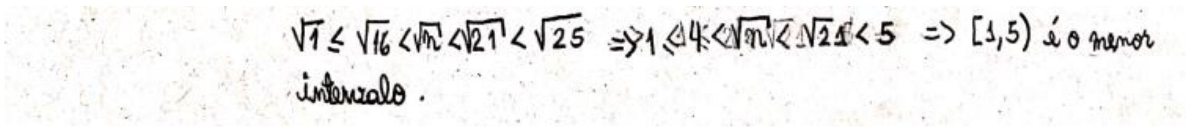
$\sqrt{1} \leq \sqrt{16} < \sqrt{n} < \sqrt{21} < \sqrt{25} \Rightarrow 1 \leq 4 < \sqrt{n} < \sqrt{21} < 5 \Rightarrow [1,5)$ é o menor intervalo.

$\sqrt{1} = 1$ $\sqrt{n}$ $\sqrt{21}$ $\sqrt{25} = 5$

Fonte: Registro escrito dos estudantes.

Analisando sua resposta, parece que ele tenta trabalhar com duas retas numéricas: uma em que os valores são inteiros e a outra formada por radicais, veja registro.

__Figura 16__- Linha quatro da resposta de Ted

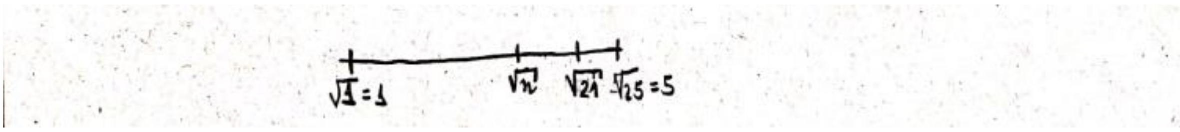


Fonte: Registro escrito dos estudantes.

Mas, observando de outra forma, Ted busca verificar em que intervalo se encontra unicamente $\sqrt{21}$.

Aparentemente ele tenta juntar o que foi dado com o que ele está pensando $4^2 = 16$ e $5^2 = 25$, o que nos leva a crer que ele continua com a ideia de um ponto na reta e desenha o seguinte.

__Figura 17__ - Reta desenhada por Ted



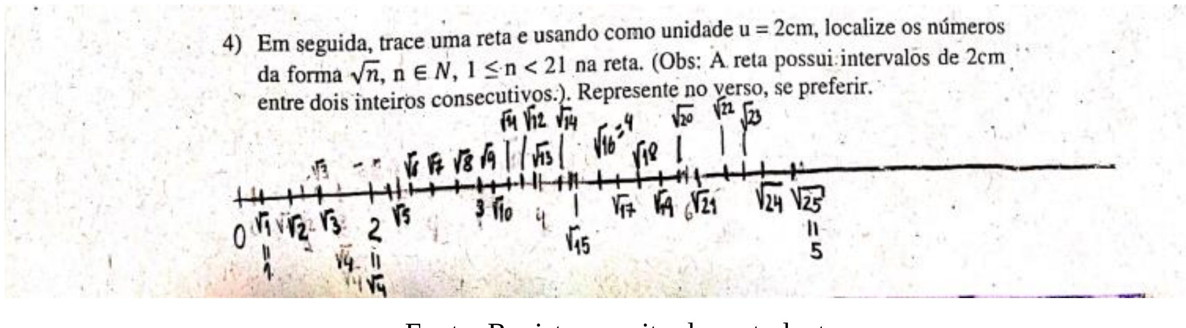
Fonte: Registro escrito dos estudantes.

Mas, o que nos chamou a atenção é a representação de $\sqrt{n}$ como sendo um ponto fixo na reta. O que confirma nossa hipótese inicial, a de que ele pensa nestes números como ponto na reta e que precisam estar localizados exatamente.

No quarto item da tarefa, foi solicitado que representassem os números na reta tendo como unidade 2 cm, observamos no registro escrito que:

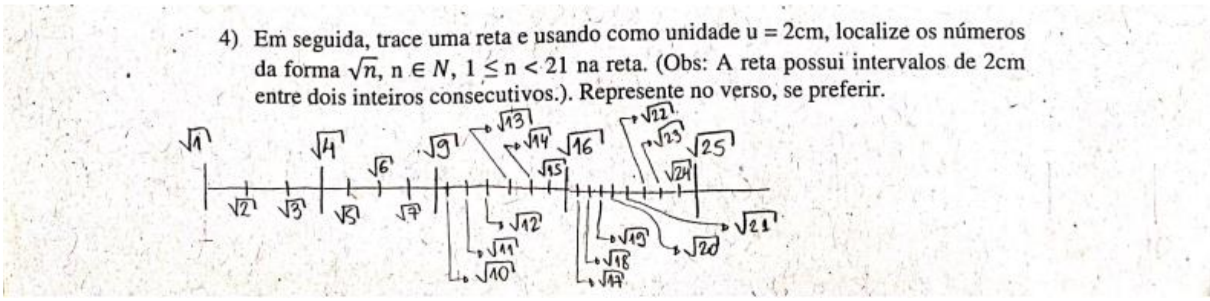
1) usam distâncias iguais entre os números;
2) dividem a unidade em partes iguais de acordo com a quantidade de números irracionais $\sqrt{n}$ e n, que existe entre dois inteiros consecutivos.
3)

__Figura 18__- Resposta de Ted ao item 4



Fonte: Registro escrito dos estudantes.

Figura 19 **-** Resposta de Robin ao item 4



Fonte: Registro escrito dos estudantes.

Em pesquisa anterior Kindel (1998) observou que os estudantes do 7º ano ao estudarem números racionais usavam intervalos iguais para representá-los, ao que a autora denominou de “paradigma dos naturais”.

> Dada a apresentação axiomática dos conjuntos numéricos, o aluno é levado a achar que o conjunto dos racionais funciona exatamente como o conjunto dos naturais, com a diferença que agora podemos fazer a divisão entre dois números naturais quaisquer, desde que o denominador não seja zero. Não fica evidenciado que se trata de um novo campo de saber onde outras formas de pensar devem ser legitimadas (KINDEL, 1998, p.137).

Os licenciandos se apropriam da mesma ideia para representar os números irracionais. Ou seja, tanto os estudantes do 7º ano quanto os licenciandos não percebem que se trata de um novo campo de saber onde outras formas de pensar precisam ser legitimadas.

Outro aspecto a ser considerado é o fato de que a unidade usada não era a convencional, 1cm e sim, 2cm, o que também gerou certa dificuldade. Ou seja, a unidade de medida precisa ser necessariamente igual a um centímetro.

Robin: É pq aqui tá dizendo o seguinte, em seguida trace uma reta e usando como unidade u = 2 cm, localize os números da forma raiz de n, na reta. obs: a reta possui intervalos de 2 cm, entre dois inteiros consecutivos. Ah tá.

Ted: O que?

Robin: Você chegou na 2, já?

Ted: Considere..

Robin: O que eu pensei, é que tinha que ter colocado de dois em dois e na verdade o espaço é de dois em dois, mas na verdade cada tracinho. A cada dois cm é um inteiro.

Ted: (..) tá por aqui

Robin: (...)

Chegam a comentar que falta espaço disponível para responder a questão, o que é perceptível na folha. E que foi resolvida com a escolha deles em usar setas para localizar os números na reta. Talvez aqui aparece uma necessidade deles em desejam uma unidade maior. É provável que quisesse intervalos iguais entre os números irracionais, que pode ser consequência de não saber exatamente qual é a aproximação decimal escolhida para os irracionais em questão.

Os dois conflitos presentes, à saber: a unidade a ser usada na régua e saber qual o valor decimal aproximado do irracional, permanecem até o momento final.

Robin: Vou ter que fazer e puxar setinha.
Ted: Calma ai
Ted: Caraca vai ter que ser 21 números.
Robin: Uhum.
Robin: Ai que burra
Ted: Eu vou aumentar isso daqui.
Robin: Ai que tá. Ela pediu 2 cm
Ted: Como eu vou fazer 2 cm aqui? (....) grandão
Ted: Eu vou tentar
Ted: Ah po, tá de sacanagem. Tá muito ruim.
Robin: Olha o meu. Horroroso.
Professora 1: Querem régua?
Robin: Agora não mais.
Robin: Você está burlando o negócio.
Ted: Por quê?
Robin: Por que são 2 cm.
Ted: Mas eu… não dá.
Robin: Eu fiz cheio de "sentinha".
Ted: O meu ficou horrível. Cadê o 4, que eu nem sei onde tá o 4?

Com a mudança da unidade pensávamos em disponibilizar mais espaço para marcas os números $\sqrt{n}$ que se encontram entre 4 e 5. Não esperávamos que esta unidade fosse ser um complicador. O que nos leva a crer que mudança de unidade na reta não seja uma atividade usual.

Momento 3: Medindo as peças do Tangram por ele mesmo

Para essa atividade, a dupla de pesquisa foi composta por Lina e Ted, pois Robin faltou no dia.

Objetivo

Determinar as medidas dos lados das diferentes peças do Tangram escolhendo um lado com unidade de medida.

Dinâmica

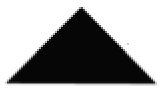
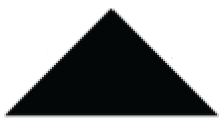
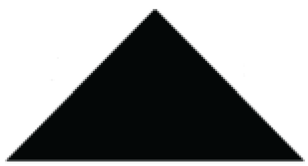
A mesma da tarefa 1.

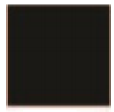
Tarefa 3

Quadro 9 - Tarefa 3

TAREFA 3

Escolha o lado de uma das peças do Tangram como unidade de medida e com ela determine as medidas de todos os lados das diferentes peças. Realize as anotações nas figuras das peças desenhadas abaixo e registre como foi feito.

Peça	Lados
Triângulos pequenos	
Triângulo médio	
Triângulos grandes	

Paralelogramo	
Quadrado	

2) Responda:
a) O que observou entre as medidas dos lados das figuras (peças do Tangram)?
b) Coloque em ordem crescente as medidas encontradas.
c) Marque sobre a reta abaixo os valores encontrados como medida dos lados das peças. Considere como unidade de medida u = 3cm.
d) Verifique se é possível montar quadrados utilizando duas peças, três peças, quatro peças, cinco peças, seis peças e sete peças do Tangram. Anote quais as peças utilizadas em cada um, suas percepções, e em caso negativo, justifique.

Fonte: Elaborada pela autora.

No primeiro item desta tarefa, foi solicitado que escolhessem um dos lados de uma das peças e com ela determinassem a medida de todos os lados de todas as peças.

Após terem compreendido a atividade, usam o quadrado como unidade de medida, e a medida do seu lado como unidade para medir os lados das demais peças. Ted chega a pensar em usar triângulo, mas aparentemente Lina sugere o quadrado. De um modo geral no contexto da matemática escolar, o quadrado é usado como unidade de medida em atividades de ladrilhar. O discurso de Lina reforça a linguagem escolar, então Ted acata e usa o quadrado.

Na análise do vídeo é possível identificar que cada um deles permanece um longo tempo comparando as peças entre si. No item "a", eles descrevem as medidas dos lados de todas as peças do Tangram, sem embarcar muito no que a pergunta realmente está desejando alcançar.

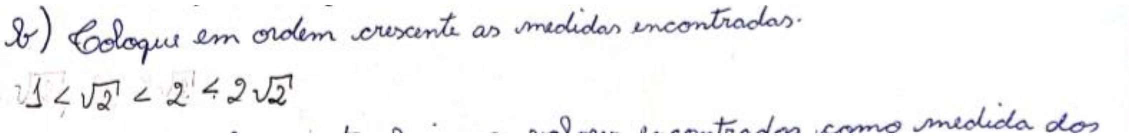
No item "b" ambos colocaram as medidas em ordem crescente. Lina considerou o lado fixo como unidade. E Ted indica as medidas com o lado sendo uma variável. Veja as figuras.

***Figura 20**– Resposta Ted para o item "b" da terceira atividade*

b) $l < l\sqrt{2} < 2l < 2l\sqrt{2}$ (1)

Fonte: Registro escrito dos estudantes.

Figura 21*– Resposta Lina para o item “b” da terceira atividade*



Fonte: Registro escrito dos estudantes.

No item “c”, Ted marca aleatoriamente na reta, sem considerar unidade, porém ele supõe que o lado meça 3cm e trabalha com essa ideia. Lina marca usando 1cm de unidade, embora o enunciado pedisse que a unidade fosse 3cm. A dificuldade com a unidade, volta nessa atividade.

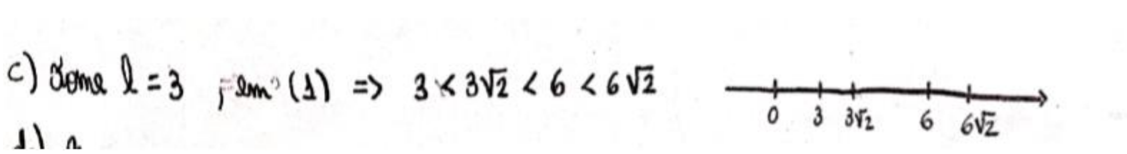
Na última questão, em que se pede que “verifique se é possível montar quadrados utilizando duas peças, três peças, quatro peças, cinco peças, seis peças e sete peças do Tangram. Anote quais as peças utilizadas em cada um, suas percepções, e em caso negativo, justifique. ” Ambos responderam que é possível montar um quadrado utilizando uma, duas, três, quatro e sete peças e indicaram todas as peças utilizadas em cada um dos processos.

Para o quadrado formado por cinco e seis peças Ted deixou em branco e Lina desenha uma carinha triste por não ter conseguido responder. Nenhum dos dois justificou o motivo pelo qual não conseguiram montar.

Talvez tenha o tempo disponível para resolução tenha sido insuficiente. Nesse momento, não temos respostas conclusivas a esse respeito. O que indica que novos estudos, precisam ser realizados.

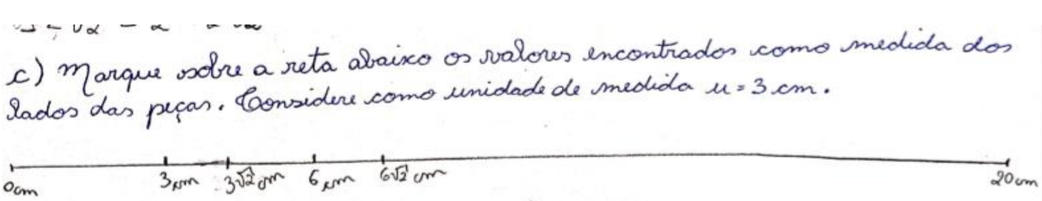
Essas são as representações feita pelos estudantes dos números na reta no item “c”,

Figura 22*– Resposta Ted para o item “c” da terceira atividade*



Fonte: Registro escrito dos estudantes.

Figura 23*– Resposta Lina para o item “c” da terceira atividade*



Fonte: Registro escrito dos estudantes.

Observe que os estudantes reproduzem o que foi feito na tarefa 2, ao marcarem pontos equidistantes, usando espaços equidistantes entre os números irracionais, como se fossem números inteiro positivos, ao que Kindel (1998) denominou de “paradigma dos naturais”.

CAPÍTULO 6

Neste capítulo apresentamos o guia didático resultante de uma dissertação de Mestrado Profissional na linha de na linha de Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática. Tal dissertação prevê como objetivo apresentar um conjunto de tarefas sobre o número irracional que contribuam para a promoção de discussões a respeito da existência dos números irracionais em sala de aula na Educação Básica.

O guia está organizado em duas partes: apresentação e atividades. No primeiro item, dissertamos brevemente sobre o interesse e o papel dos números irracionais para a construção dos reais. No segundo, apresentamos as atividades e para exemplificar ou orientar as suas aplicações e está organizado em seções e que são descritas no interior do produto.

As atividades estão divididas em duas seções: Mundo dos Números e Descobrindo buracos nas retas e são compostas de três atividades. Na primeira seção: Atividade 1 -Ouvindo os estudantes; Atividade 2 - Os gregos e os números. E na segundo seção apresentamos uma única tarefa: Números na reta.

Este material, foi aplicado num grupo de estudantes do curso de matemática e cada uma das atividades analisadas antes que a segunda fosse aplicada, sofrendo assim adaptações para atender a demanda do grupo. Desta forma, as situações aqui apresentadas apresentam um possível caminho para o estudo dos números irracionais tendo como base aqueles representados na forma de raiz, considerando que os radicandos sejam números naturais. Isto é, $\sqrt{n}$, $n \in N$. Outro aspecto a ser considerado é que as atividades foram experimentadas com futuros professores com vistas a serem implementadas no Ensino Básico em que se buscou desenvolver uma abordagem desse conceito de modo a subsidiar o professor deste nível de ensino.

A seguir, apresentamos o produto na sua versão final, subtraindo dele os espaços para as respostas dos estudantes.

6.1 Apresentação do produto

A preocupação com a aprendizagem em Matemática desafia professores e pesquisadores a encontrarem caminhos para aproximar os estudantes dessa ciência. Nos últimos anos, minha inquietação pessoal a respeito do ensino de números irracionais me levou, sem que eu abandonasse o cenário escolar, a ingressar no mestrado para que pudesse me aprofundar nas reflexões sobre o estudo destes números.

O presente trabalho tem como proposta produzir um guia didático para os professores. O material é elaborado a partir da pesquisa sobre Números na forma de raiz considerando-se aqueles cujos radicandos sejam números naturais. Isto é, $\sqrt{n}$, $n \in N$, com autoria de Isabela Alcantara e orientação de Dora Soraia, onde se é realizado um estudo de caso com alunos da Licenciatura em Matemática de uma Universidade. Para tanto, ao longo do conteúdo buscou-se desenvolver uma abordagem desse conceito no dia a dia de sala de aula, com possíveis sequências de abordagem metodológicas para a prática do professor. Desejamos que o material aqui elaborado integre o ensino básico e embora seja direcionado para professores de matemática desse nível, também recomendamos para alunos de licenciatura em matemática, alunos de pós-graduação em ensino ou educação matemática e professores que ensinam matemática. Tal abordagem se enquadra no novo ano do Ensino Fundamental para introduzir números irracionais como é orientado na BNCC ou como revisão durante todo o Ensino Médio.

A ação do professor que ensina Matemática, de um modo geral, se baseia nos conteúdos apresentados nos livros didáticos escolhidos por ele ou pela equipe da escola em que atua. Entretanto, muitas vezes o caminho percorrido não atende à real necessidade dos estudantes e o professor se vê com necessidade de fazer adaptações. Nesta busca por soluções, nem sempre o professor encontra respostas para as suas perguntas pois envolve modificar rotinas, conhecer novos materiais, experienciar tarefas; observar e intervir nas ações dos alunos; modificar, quando necessário, as propostas iniciais; avaliar; aprofundar o estudo sobre o tema. Desta forma a organização das tarefas foi idealizada para favorecer a dinâmica do trabalho do professor. Assim, este guia foi estruturado com as seguintes seções:

Material de apoio para a realização da tarefa; Papo aberto com o professor; Tarefa ou descrição da atividade; Objetivos; Sugestões complementares. Veja o quadro com os ícones associados à cada seção e sua respectiva explicação.

Quadro 10 - Seções do guia didático

 [14]	**Material de apoio para a realização da tarefa** Esse ícone lança os conteúdos que selecionamos para apoiar o trabalho indicado na ficha de atividade. São materiais que podem ser diretamente relacionados em sala de aula.
 [15]	**Papo aberto com o professor** Esse ícone marca o início do tópico papo aberto com o professor, onde é realizada uma conversa direcionada. Esperamos que o leitor, aproveite essas ideias, utilizando-a e aprimorando-a na sua sala de aula, acontecendo uma intersecção de ideias entre o conteúdo apresentado e as do professor.
 [16]	**Ficha de atividade ou Descrição da atividade** Esse ícone prevê uma ficha de atividade ou a descrição da que pode ser utilizada em sua sala de aula.
 [17]	**Objetivo da atividade** Essa seção descreve os objetivos pensados de cada atividade, que podem também ser incrementados por você professor.
 [18]	**Sugestões complementares** São materiais selecionados para aprofundar o estudo.

Fonte: Elaborada pela autora.

Mundo dos Números

Para iniciar o trabalho com os estudantes sugerimos que o professor elabore situações familiares ou não familiares para saber o que os estudantes conhecem sobre os números. Entendemos como atividades não familiares, a leitura de extratos de livros ou de capítulos de livros que apresentem, por exemplo, a origem dos números, o desenvolvimento dos números

[14] Fonte da imagem: https://publicdomainvectors.org/pt/vetorial-gratis/Lupa-de-desenhos-animados/47276.html
[15] Fonte da imagem: https://pixabay.com/pt/illustrations/conversa%C3%A7%C3%A3o-di%C3%A1logo-entrevista-1262311/
[16] Fonte da imagem: https://pixabay.com/pt/illustrations/relat%C3%B3rios-arquivo-dados-san%C3%A7%C3%A3o-1420210/
[17] Fonte da imagem: https://pixabay.com/pt/illustrations/criatividade-elemento-desenho-3813611/
[18] Fonte da imagem: https://www.google.com/save?ved=0ahUKEwj0sdzqovTmAhVBA9QKHVVuDu4Q7XUIHw&authuser=0

ao longo da história, uma curiosidade sobre o número pi, o número de ouro, os palíndromos, ou qualquer outra ideia que ajude os estudantes a se sentirem à vontade para conversar sobre o que conhecem sobre os números.

Embora não seja muito comum a leitura de livros de literatura em ambientes de aula de matemática, sugerimos esta estratégia como forma de enriquecer a aula e investigar o que os estudantes conhecem, aprenderam sobre números. Assim, nosso

OBJETIVOS

- ✓ Investigar a resposta dos estudantes;
- ✓ Identificar de que forma os estudantes entendem números.

TAREFA 1: Ouvindo os estudantes

Consiste em ouvir o que os estudantes sabem sobre números. Você, professor, deve conduzir como julgar melhor e pode partir dos materiais aqui selecionados. A ideia desta tarefa é partir do que os estudantes conhecem. Saber um pouco sobre sua realidade, avaliar conhecimentos prévios, identificar quais as concepções de números que eles possuem. É possível saber se eles conhecem e usam outros números além dos números naturais e no caso dos números racionais que tipo de representações lhes é familiar. E para o caso do $\sqrt{n}$, com n maior ou igual a 1, essa representação é uma operação ou um número irracional?

A seguir apresentamos algumas sugestões de atividades que foram realizadas para este fim. Nesta atividade, queremos indicar a tarefa pronta.

Material de apoio

No trabalho realizado por Silva (2019), você encontra um questionário realizado com estudantes do 9º ano em que o professor levanta uma série de questões para tomar conhecimento do que os estudantes conhecem sobre os números em particular sobre números irracionais. Um outro tipo de questionário você encontrará no trabalho de Rocha (2018). Para consulta, veja:

ROCHA, R. R. M.; **Sensibilização para existência dos números irracionais.**

SILVA, F. R.; **Estudantes do 9.º Ano do Ensino Fundamental Explorando Situações com os Números Irracionais *Pi* e *Phi*.**

Você também encontrará um roteiro de atividades a partir do uso de vídeos disponíveis gratuitamente no *YouTube*. Para este trabalho usamos Donald no país da Matemágica; a história do número 1 e o número de ouro.

Na pesquisa realizada por Kindel (2012), você encontra o passo-a-passo de como se elaborar uma Tempestade de ideias. Ver sobre em:

KINDEL, D. S.; **Um ambiente colaborativo a distância: licenciandos dialogando sobre os infinitos**.

Sobre como elaborar atividade usando extratos de livro, você encontra exemplo no texto de Silva (2019). A partir da pesquisa realizada por ele, usamos um trecho do livro 20.000 léguas matemáticas.

TAREFA 2: Os gregos e os números.

A aritmética tem a ver com números e a geometria, com comprimentos. Para todo comprimento havia um número privilegiado, um inteiro, que o expressava. E todo inteiro, mais cedo ou mais tarde, revelaria ser o comprimento disto ou daquilo.

> Para os gregos antigos, a aritmética e a geometria já eram tidas como aspectos de uma mesma realidade fundamental. Ou seja, uma cesta de figos continha um número definido de figos, e uma pedra tinha sempre um tamanho definido. Ora, o primeiro tipo de número era o inteiro. Mas, que tipo de número se poderia atribuir à pedra? (DEWDNEY, 2000, p.27)

Qual a sua opinião sobre o texto acima? Discuta com o seu grupo e, comente o texto concordando ou discordando e justificando seu ponto de vista. Elaborem um texto e entregue ao professor.

Leitura do **Livro do professor de matemática volume I: números naturais.**

Descobrindo buracos na reta

Nesta sequência de atividades propomos questionamentos aos estudantes para saber se a reta tem ou não todos os números? Ou se para cada um dos pontos da reta existe um número associado a ele? Ou ainda, todos os pontos possuem um número associado a ele e vice-versa?

Para Pommer (2012), os conjuntos numéricos são apresentados, na maioria das vezes, em uma Fonte: dados da pesquisa, elaborada pela autora ordem diferente da ordem em que apareceram historicamente. Ou seja, de um modo geral os conjuntos são apresentados como tendo sido criados na seguinte ordem: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathrm{I}, \mathbb{R}$. Quando de fato temos, que historicamente os números seguiram na seguinte ordem: $\mathbb{N}, \mathbb{Q}_{+}, \mathbb{Z}\ e\ \mathbb{R}$. Mas, que foram sendo permeados pela descoberta de alguns exemplares de números irracionais ao longo do caminho. Desta forma, Kindel (1998) afirma que é preciso estabelecer conexões históricas em busca dos postos-chave que surgiram ao longo do caminho para se compreender conceitos matemáticos elaborados e complexos como é o caso dos números irracionais.

Por outro lado, para os estudantes a reta é racional, pois sempre é possível encontrar a metade do segmento e, portanto, a metade associada à soma dos extremos do intervalo. Com base nisso, pode-se mostrar aos estudantes que a reta possui buracos, os irracionais.

Assim, nosso OBJETIVO com a tarefa 3, foi dar início ao trabalho para mostrar que existem outros números, os irracionais, além daqueles conhecidos para poder:

- ✓ Verificar de que formas os estudantes localizam os números na reta em que a unidade é dada;
- ✓ Verificar que estratégias os licenciandos usam para determinar o intervalo de localização dos números dado

TAREFA 3: Números nas retas

(Responda individualmente)

1) Escolha cinco números inteiros de sua preferência e os localize em cada uma das retas

abaixo. São dadas as retas *r* e *s* com a unidade u = 2cm e unidade u = 2,5cm, respetivamente.

a) reta *r*

b) reta *s*

2) Desenhe a reta *t*, e marque os números escolhidos considerando agora a unidade u = 3cm.

3) Descreva como você faria para localizar exatamente os seguintes números na reta?

a)$\sqrt{2}$?

b)$\sqrt{3}$?

c)$\sqrt{4}$?

d) $\sqrt{5}$?

4) Localize os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ e $\sqrt{5}$ na reta *r*.

5) Sabendo que 2 está entre os números 1 e 3, podemos dizer que o número 2 está localizado no intervalo (1,3) ou ainda [1,3]. No primeiro caso, os números 1 e 3 não pertencem ao intervalo e no segundo, eles pertencem. Com base nesta informação, identifique o menor intervalo em que os extremos sejam inteiros para localizar cada um dos seguintes números: $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{19}$, $\sqrt{20}$ e$\sqrt{21}$.

Responda:

a) Quais dos números acima, representam um número inteiro?

b) Todos os intervalos inteiros apresentaram a mesma quantidade de números representados na forma de radicais? Explique.

c) Veja que os números {$\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$,... , $\sqrt{18}$, $\sqrt{19}$, $\sqrt{20}$,$\sqrt{21}$ }também podem ser representados da seguinte forma:

$\{\sqrt{n}, n \in$ N / 1 ≤ n ≤ 21}.

Agora, trace a reta *r* e usando como unidade u = 1,5 cm, localize os números $\sqrt{n}$, em que {n ∈ N/ 3≤ n ≤ 28}.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As atividades mediadas por tarefas com um design projetado para serem discutidas em grupo possibilitou olhar as potencialidades e os limites de tal forma que elas pudessem ser reconfiguradas após análise de cada uma delas. Nosso objetivo era pormenorizar todo o processo e analisar tanto as contribuições que este tipo de tarefa possa dar para o ensino de números irracionais quanto compreender melhor de que forma os licenciandos se posicionam frente ao tipo de abordagem dos números apresentados sobre a forma de radicais.

Destacamos algumas ideias desenvolvidas ao longo da análise: o tipo de ideias que se têm sobre números; formas de localizar os números na reta em que a unidade é dada; estratégias para determinar o intervalo de localização dos números dados; formas que escolhem e determinam as medidas dos lados das diferentes peças do Tangram.

O tipo de ideia inicial sobre números que identificamos inicialmente foi a da não existência uma unidade definida para medir, o que nos remeteu aproximação ao pensamento de incomensurabilidade. Para localizar números na reta observamos o uso de estratégias diferentes: uma que usa a ideia de aproximação buscando encontrar o ponto em questão e outra, que considera o intervalo, olhando ao redor do ponto.

Para determinar as medidas das peças do Tangran, usaram o lado do quadrado como unidade de medida. Poderiam ter usado o triângulo como unidade de medida e considerar dele, o menor lado e que tem a mesma medida do lado do quadrado. Nos parece que o uso do quadrado esteja diretamente relacionado com modelos típicos desenvolvidos em sala de aula de matemática em que o quadrado é a unidade de medida padrão.

Desta forma, como avançamos com essa pesquisa? O que aprofundamos com as reflexões?

Consideramos ter saído de um lugar que se trabalha exclusivamente com pouquíssimos exemplos, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, quase exclusivamente, nosso estudo promoveu uma reflexão sobre outros números irracionais, sua localização na reta e uma discussão sobre incomensurabilidade e aplicação de $\frac{a\sqrt{2}}{b}$ que surgiram ao comparar os lados das diferentes peças do tangram. Desta forma, abre-se espaço para maior aprofundamento sobre questões desta ordem como atividades a serem desenvolvidas em sala de aula do Ensino Básico. Com esse estudo entendemos que seja possível avançar e apresentar mais exemplos.

Com as atividades realizadas em grupos, as discussões foram parte integrante das negociações e resoluções dos problemas através do compartilhamento dos pensamentos e estratégias. As manipulações com o tangram oportunizou momentos nos quais os discentes puderam perceber e desenvolver pensamentos matemáticos, possibilitou a percepção da incomensurabilidade da diagonal do quadrado que se materializou nos lados de diferentes triângulos (o maior lado do triângulo pequeno e no menor lado do triângulo médio e no maior lado do paralelogramo). Dessa maneira, a manipulação faz parte do pensamento matemático e viabiliza a comunicação.

Não é minha pretensão inventariar todos as formas possíveis para o estudo dos números irracionais, mas mostrar caminhos possíveis para o ensino deste através de pequenos passos neste sentido.

Consideramos em criar um espaço propício para realizar a pesquisa é fundamental pois não se trata apenas de apresentar novos exercícios sobre os números irracionais e sim pensar em novas estratégias de abordagem, procurar responder aos questionamentos dos estudantes e verificar de que forma conceitos_ limite, aproximação, comensurabilidade, incomensurabilidade, intervalo, que estão ao redor da ideia de irracional se constrói.

Com relação à coleta de dados, captura em vídeos e áudios, observamos que é necessário aperfeiçoar as técnicas para que possamos ter capturas melhores e assim poder refinar melhor os dados, visto que tivemos muitos ruídos na captura embora estivéssemos próximos ao único grupo de participantes. Outro fator importante a ser considerado foi o tempo reduzido para realizar a pesquisa de campo e sua análise. Ou seja, sabendo também a limitação de tempo de uma pesquisa de mestrado, a nossa capacidade de leitura e reflexão, ou seja, tempo de maturação de ideias, o tempo de melhorar cada tarefa, o tempo de escrita na pesquisa e outras tarefas do cronograma do programa de pós-graduação.

A gravação em áudio foi um recurso fundamental para as análises das respostas dos estudantes apresentadas por escrito. Ou seja, muitas foram as vezes que recorremos ao áudio para melhor compreender o raciocínio explicitado por escrito. Com a análise dos áudios, foi possível identificar os passos seguidos para se chegar nas respostas escritas, uma vez que muitas vezes os estudantes não descreviam o processo para se chegar no resultado.

Apontamos que os modelos teóricos utilizados e instrumento metodológico foram adequados para a análise dos dados. Tal modelo permitiu levantar pensamentos implícitos em escritas e fala, dos licenciandos, tentar explicar possíveis caminhos de pensar e agir e o contexto sociocultural, sala de aula de matemática. Entendemos como contexto sociocultural em que a pesquisa se deu, uma exclusão do medo de matemática, uma vez que são estudantes dessa área específica; uma formação básica comprometida; o livro 20.000 léguas matemática: um passeio pelo misterioso mundo dos números de DEWDNEY (2000), foi um dos poucos livros que leram sobre a história da ciência, matemática; muitos dos estudantes da disciplina em questão serão os primeiros de suas famílias a se graduarem no ensino superior.

Com relação às minhas pesquisas, consigo observar um perfil de estudo com campos numéricos. Na graduação escolhi desenvolver um trabalho com os números naturais e agora, na dissertação, considero ter feito um recorte dos reais. Com isso, aponto que para possíveis pesquisas que possam à vir corroborar com a continuidade desta dissertação olhem outro intervalo usando os radicais aqui apresentados.

Assim é possível que tenhamos feito um trabalho que exprime uma aproximação com a questão de densidade dos racionais. O que gerou um produto educacional com as atividades da pesquisa modificadas.

Todavia, a publicação desse material, marca o fim de um ciclo, mas não representa o fim deste trabalho. Nesse sentido, o trabalho também foi apresentado no seminário do PPGEduCIMAT e planejamos dar continuidade aos estudos, a publicação de artigos em revistas da área. Pela revisão da literatura percebemos que nos últimos cinco anos, as pesquisas com números irracionais na educação cresceram. No nível da educação básica se tem conhecimento que os alunos conhecem poucos números desse campo (Souto (2010); Pommer (2012); Ripoll (2004)). As pesquisas considerando a formação inicial de professores ainda são escassas e está vem contribuir nesse campo.

E por fim, gostaria de destacar que esse trabalho é fruto de um sonho, de fazer pesquisa, em trocar mais com os colegas da área e poder produzir um material fruto dessa tarefa. Além disso, considera os estudos feitos anteriores (pesquisa bibliográfica); as experiências anteriores e atuais em sala de aula da pesquisadora; o material recolhido das tarefas de pesquisa (vídeo e papel); as conversas com a orientadora e com o grupo de estudos; e considerações levantadas com a banca avaliadora.

Ao iniciar a pesquisa de dissertação pensamos em algumas hipóteses, que foram abandonadas ao longo da implementação do projeto nas discussões no grupo e através das leituras. Como se trata de uma pesquisa de *design* durante todo o processo foi sendo avaliado e direcionado de forma a responder aos novos questionamentos que estavam sendo postos. Outro aspecto a ser considerado é a participação de cada integrante que ajudou a compor o trabalho que ora se apresenta. Em razão disso, vale reafirmar o nosso apreço por todos os licenciandos que com suas falas e escritas nos permitiram compreender um pouco mais este conceito rumo aos números reais.

8. REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V;. **Didática das ciências e matemática (dcem): surgimento e implicações para a formação do professor**. In: Revista Investigações em Ensino de Ciências (IENCI) - ISSN: 1518-8795. v. 22. n.3. 2017.

ANDRADE, F. C. ; REZENDE, S. M. ; AMORIM, M. P. B. ; LEAO, L. M.; **Reflexões sobre o ensino dos números reais com uso do Geogebra: explorando os diversos registros semióticos**. In: Encontro Internacional de Ensino e Pesquisa em Ciências na Amazônia, 2016, Tabatinga. ANAIS do VI Encontro Internacional de Ensino e Pesquisa em Ciências na Amazônia. Tabatinga: UEA Edições, 2016. p. 838-852.

Boletim GEPEM (eISSN: 2176-2988). Nº 65 – JUL. / DEZ. 2014. 17 – 27. Artigo: **Tangram: por que não se pode construir um quadrado utilizando exatamente 6 de suas peças?**

BRASIL. **Portaria Nº 38, de 28 de fevereiro de 2018 - Institui o Programa Residência Pedagógica.** Disponível em: <https://www.capes.gov.br/educacao-basica/programa-residencia-pedagogica>. Acesso em 15/05/2019.

______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – BNCC – Ensino Fundamental. Homologado em 2017.

______. Ministério da Educação. **Sistema eletrônico de acompanhamento dos processos que regulam a educação superior no Brasil** - E-mec. Disponível em: <*emec.mec.gov.br*>. Acesso em 15/05/2019.

______. Ministério da Saúde. Conselho Nacional de Saúde. **Resolução n. 466, de 12 de dezembro de 2012**. Aprova diretrizes e normas regulamentadoras de pesquisas envolvendo seres humanos. Brasília, Diário Oficial da União, 12 dez. 2012.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos; **Conhecimentos relativos a números racionais e irracionais de uma aluna ingressante na licenciatura em matemática.** In: Revista de Ensino de Ciências e Matemática. REnCiMa, v.8, n.1, p.67-82, 2017.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Livraria Sá da Costa: Lisboa, 1989. 9° edi.

CIFUENTES, J. C.; **O mito da análise real na formação conceitual do professor de matemática sobre os números reais e a análise matemática.** In: Educação Matemática: perspectivas e possibilidades. Curitiba, UTFPR Editora. 2015, p.95.2015.

COSTA NETO, C. D.; GIRALDO, V. A.; RANGEL, L.G.; **A formação inicial de professores de matemática na UFRJ e a incorporação das tecnologias digitais no sentido TPACK**. In: XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2015, Tuxtla Gutiérrez. XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2015, v.1, p. 1-12.

DEWDNEY, A. K. **20.000 léguas matemática: um passeio pelo misterioso mundo dos números**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2000.

D' AMBROSIO, Ubiratan; **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas, SP: Papirus. 1996. (Coleção perspectivas em Educação Matemática).

EDUCAÇÃO DOCUMENTÁRIOS. **Donald no País da Matemágica** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=wbftu093Yqk>. Acesso em: mar/2020.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T.; **O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas?** Bolema, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 917-938, dez, 2013.

FREIRE, P. **Entrevista concedida a Ubiratan D'Ambrosio sobre educação e educação matemática e exibida no VIII Congresso Internacional de Educação Matemática**, realizado em Sevilha, Espanha, 1996. Vídeo. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=245kJbsO4tE>. Acesso em 09/02/2020.

GIRALDO, V. **Formação de professores de matemática: para uma abordagem problematizada.** Cienc. Cult. vol.70 no.1 São Paulo Jan./Mar. 2018.

GOMES, M. L. M.; **Os 80 Anos do Primeiro Curso de Matemática Brasileiro: sentidos possíveis de uma comemoração acerca da formação de professores no Brasil**/The Eightieth Anniversary of the First Mathematics Undergraduate Course in Brazil: possible meaning for a celebration about teacher's education. Bolema, v. 30, n. 55, p. 424, 2016.

GRATISPNG (STE). **Espiral de Theodorus, Espiral, O Teorema de Pitágoras PBG.** Disponível em: <https://www.gratispng.com/png-hugmzs/>_Acesso em 15/05/2019.

HAYFA, N.; SAIKALY, L. **Dimensions of Knowledge and Ways of Thinking of Irrational Numbers.** Athens Journal of Education **-** Volume 3, Issue 2 – Pages 137-154. 2016.

IFRJ. **Projeto Pedagógico** (Nilópolis). Site da instituição. 2006. Disponível em <https://portal.ifrj.edu.br/sites/default/files/IFRJ/PROGRAD/novo_ppc-lm-nilopolis_0.pdf>. Acesso em 15/05/2019.

IFRJ. **Projeto Pedagógico** (Paracambi). Site da instituição. 2010. Disponível em <https://portal.ifrj.edu.br/sites/default/files/IFRJ/PROGRAD/ppc_-_lm_cpar_1.pdf>. Acesso em 15/05/2019.

KALEFF, A. M. M. R- **Tomando o Ensino da Geometria em Nossas Mãos...**, Educação Matemática em Revista, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Blumenau, 2, 1994, pp.19 - 25.

KINDEL, Dora Soraia. **Discutindo os racionais na 7ª série visando a noção de densidade**. 1998. 196 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula Mestrado em Educação Matemática, Rio de Janeiro, 1998.

KINDEL, D. S.; **Um Ambiente Colaborativo a Distância: Licenciandos Dialogando sobre os Infinitos/** São Paulo:[s.n.], 2012.

KINDEL, D. S.; FAVORETTO, E.; **Frações, sua representação decimal e a calculadora.** v. 1, n. 1. ISSN 2319-023X. 2013.

KINDEL, D. S.; FRANT, J. B.; **Diálogo de alunos sobre infinito /** Curitiba, 1º edição 2015.

MATOS, D.; GIRALDO, V.; QUINTANEIRO, W.; **A cultura matemática mobilizada por licenciandos no contexto de uma disciplina de análise real.** BOLETIM GEPEM (eISSN: 2176-2988). Nº 70 – jan. / jun. 2017. p. 26 – 42.

MOREIRA, P. C.; **3+1 e suas (in) variantes (reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática).** Bolema, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1137-1150. 2012.

NÓVOA, A; **Formação de professores e profissão docente.** In: António Nóvoa (coord.). Os Professores e a sua Formação. 3ª edição. Lisboa (Portugal): Publicações Dom Quixote. 1997, p.15-33.

PIETRIPAOLO, R. C.; CORBO, O.; CAMPOS, T. M. M.; **Os números Irracionais e seu ensino delineando a imagem conceitual de um grupo de professores**. In: Congreso De Educación Matemática De América Central Y El Caribe, 1., 2013, Santo Domingo, República Dominicana. Anais. Santo Domingo, República Dominicana: Cemacyc, 2013. p. 15 - 30

POMMER, W. M.; **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico**. 2012. 246 f. (Tese (Doutorado) - Curso de Ciências e Matemática, Universidade de São Paulo), São Paulo, 2012.

POWELL, A. B.; (Org). **Métodos de pesquisa em educação matemática usando escrita, vídeo e internet.** Campinas, SP: Mercado das Letras, 2015.

RIPOLL, C. C.; **A construção dos números reais nos Ensinos Fundamental e Médio**. In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador. 2004.

RIPOLL, C. C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V.; **Livro do professor de matemática volume I: números naturais.** Rio de Janeiro: SBM, 2015.

REDE CATARINENSE. **A História do Número 1 - Como Tudo Começou.** Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=ZWZKJb06CTU. Acesso em: mar/2020.

ROCHA, R. R. M. **Sensibilização para existência dos números irracionais**. 2018. 154f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica.

SANTOS, R. M.; COSTA, P. M.; **Sobre a didática e as didáticas específicas: o que está em questão na formação docente?** Revista de Educação, Ciências e Matemática v.3 n.2 mai/ago 2013. ISSN 2238-2380

SAVIANI, Dermeval; **A Nova lei da educação: trajetórias, limites e perspectivas** - 11. ed. - Campinas, SP: Autores associados, 2008 (Coleção educação contemporânea). 1 ed. em 1997.

_________________. **Formação de professores: aspectos históricos e teóricos do problema no contexto brasileiro.** Revista Brasileira de Educação v. 14 n. 40 jan./abr. 2009. p. 143-155.

SILVA, C. M. S.; **Formação de professores e pesquisadores de matemática na faculdade nacional de filosofia**. In: Cad. Pesqui. no.117 São Paulo Nov. 2002.

SILVA, F. R.; **Estudantes do 9.º Ano do Ensino Fundamental Explorando Situações com os Números Irracionais *Pi* e *Phi*.** 2019. 205f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica.

SILVA, N. A. da; FERREIRA, M V.; TOZETTI, K. D.; **Um Estudo Sobre A Situação Didática de Guy Brousseau.** In: EDUCERE - XII Encontro Nacional de Educação. 2015.

SILVA, Tomaz Tadeu da; **Documentos de identidade; uma introdução às teorias do currículo.** 3ª edição – 1 reimp. – Belo Horizonte: Autêntica, 2010. 150 p.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação**. Bolema – Boletim de Educação Matemática, Rio. Claro, n. 14, p. 66-91. 2000.

SOUTO, A. M.; **Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica**. (Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro). 2010.

TARDIF, Maurice; **Saberes docentes e formação profissional**. 17 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

UFRRJ. **Projeto Pedagógico da Licenciatura em Matemática da UFRRJ.** Site da instituição. Disponível em: <http://r1.ufrrj.br/im/wp/wp-content/uploads/2013/09/ppc_mat_licenciatura.pdf>. Acesso em 15/05/2019.

WAGNER, EDUARDO. **Construções geométricas**. (Coleção do professor de matemática) 5ª edição– Rio de Janeiro: SBM, 2015. 108 p.

ANEXO 1

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (Local de Campo)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (participantes)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (Local de Campo)

Eu, ____ portador(a) do CPF xxx.xxx.xxx-xx e coordenador(a) do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro com Matricula __________________, estou ciente que alunos da licenciatura em Matemática desta unidade estão sendo convidados a participar de uma pesquisa denominada **Números irracionais: Um estudo de caso com licenciandos em matemática**, cujos objetivos e justificativas são: Contribuir para uma prática pedagógica produtiva, que possibilite aos professores em formação inicial perceberem as especificidades do conjunto dos números irracionais, bem como suas representações e aplicações, com ênfase nos números irracionais da forma $\sqrt{n}, 2 \leq n < 21$; investigar propostas de materiais e estratégias, com abordagem investigativa, que proporcionem a aprendizagem estruturada destes conceitos. Elaborar um produto a partir desta pesquisa e torná-lo acessível aos demais interessados.

A participação dos estudantes no referido estudo será no sentido de colaborar com a ***execução das atividades em grupo; elaboração de registro escrito e relatório sucinto dos progressos e particularidades das atividades; autorização de gravação, em vídeo e áudio, do grupo.***

Fui alertado (a) de que, da pesquisa a se realizar, posso esperar alguns benefícios, tais como: *Evolução de conhecimentos, experimentação de atividade científica e oportunidade de aprendizagem coletiva. Também fui esclarecida de que não há possibilidade de desconfortos físicos durante o processo por se tratar de uma pesquisa de foco educacional.*

Estou ciente de que a privacidade dos alunos será respeitada, ou seja, o nome ou qualquer outro dado ou elemento que possa, de qualquer forma, identificá-lo, será mantido em sigilo, ou seja, os estudantes receberão um código.

Também fui informado (a) de que os alunos podem se recusar a participar do estudo, ou retirar seu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar. Caso se sintam incomodados, eles poderão entrar em contato com as pesquisadoras para solucionar.

Os pesquisadores envolvidos com o referido projeto são: nome do orientando

(Mestranda) e nome do orientador (Docente/orientadora) e com eles poderei manter contato pelo e-mail abcdefeg@mail.com

Enfim, tendo sido orientado (a) quanto ao teor de todo o aqui mencionado e compreendido a natureza e o objetivo do já referido estudo, manifesto minha autorização dos alunos do Instituto Multidisciplinar (IM), *campus* da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro em Nova Iguaçu em participar, estando totalmente ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou a pagar, pela sua participação.

Nova Iguaçu, _______ de ________________________ de 2019

____

Nome e assinatura

____

(Mestranda)

____

(Docente e orientadora)

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

PPGEDUCIMAT - Programa de Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu,____, portador (a) do CPF______________________, estou aceitando participar de um estudo denominado: **Números irracionais: Um estudo de caso com licenciandos em matemática**, cujos objetivos e justificativas são: Contribuir para uma prática pedagógica produtiva, que possibilite aos professores em formação inicial perceberem as especificidades do conjunto dos números irracionais, bem como suas representações e aplicações, com ênfase nos números irracionais da forma $\sqrt{n}, 2 \leq n < 21$; investigar propostas de materiais e estratégias, com abordagem investigativa, que proporcionem a aprendizagem estruturada destes conceitos. Elaborar um produto a partir desta pesquisa e torná-lo acessível aos demais interessados.

A participação dos estudantes no referido estudo será no sentido de colaborar com a ***execução das atividades em grupo; elaboração de registro escrito e relatório sucinto dos progressos e particularidades das atividades; autorização de gravação, em vídeo e áudio, do grupo;***

Fui alertado (a) de que, da pesquisa a se realizar, posso esperar alguns benefícios, tais como: *Evolução de conhecimentos, experimentação de atividade científica e oportunidade de aprendizagem coletiva. Também fui esclarecido de que não há possibilidade de desconfortos físicos durante o processo por se tratar de uma pesquisa de foco educacional.*

Estou ciente de que minha privacidade será respeitada, ou seja, meu nome ou qualquer outro dado ou elemento que possa, de qualquer forma, me identificar, será mantido em sigilo.

Também fui informado (a) de que posso me recusar a participar do estudo, ou retirar meu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar. Caso me sinta incomodado (a), poderei entrar em contato com a pesquisadora para que possamos solucionar.

Os pesquisadores envolvidos com o referido projeto são: nome do orientando (Mestranda) e nome do orientador (Docente/orientadora) e com eles poderei manter contato pelo e-mail <abcdefeg@mail.com>.

Enfim, tendo sido orientado (a) quanto ao teor de todo o aqui mencionado e compreendido a natureza e o objetivo do já referido estudo, manifesto minha autorização em participar, estando totalmente ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou a pagar, pela sua participação.

Este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido é emitido em duas vias que serão assinadas por você (participante da pesquisa) e por ambas pesquisadoras responsáveis, uma das copias continuará com você.

Local, ______ de _____________________ de 20__.

____

(Mestranda, mestrando)

____

(Docente e orientadora/orientador)

ANEXO 2

PRODUTO

UFRRJ

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

$\{\sqrt{\mathbf{1}}\sqrt{\mathbf{2}}, \sqrt{\mathbf{3}}$,...} racional ou irracional?

Guia didático

ISABELA ALCANTARA DO NASCIMENTO

Orientadora: Profª Dora Soraia Kindel

2020

APRESENTAÇÃO

Esse guia didático é resultante de uma dissertação de Mestrado Profissional na linha de na linha de Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática. Tal dissertação prevê como objetivo apresentar um conjunto de tarefas sobre o número irracional que contribuam para a promoção de discussões a respeito da existência dos números irracionais em sala de aula na Educação Básica.

Este material, foi aplicado em um grupo de estudantes do curso de matemática e cada uma das atividades analisadas antes que a segunda fosse aplicada, sofrendo assim adaptações para atender a demanda do grupo. Desta forma, as situações aqui apresentadas apresentam um possível caminho para o estudo dos números irracionais tendo como base aqueles representados na forma de raiz, considerando que os radicandos sejam números naturais. Isto é, $\sqrt{n}$, $n \in N$.

A apresentação oferece ao leitor o sabor do contexto sobre como a autora, Isabela Alcantara sob a orientação de Dora Soraia, faz um estudo de caso com alunos da Licenciatura em Matemática de uma Universidade. Para tanto, ao longo do conteúdo buscou-se desenvolver uma abordagem desse conceito no dia a dia de sala de aula, com possíveis sequências de abordagem metodológicas para a prática do professor.

As atividades estão divididas em duas seções: Mundo dos Números e Descobrindo buracos nas retas e são compostas de três atividades. Na primeira seção: Atividade 1 -Ouvindo os estudantes; Atividade 2 - Os gregos e os números; Já na segunda seção: Atividade 3 - Números na reta.

Outro aspecto a ser considerado é que as atividades foram experimentadas com futuros professores com vistas a serem implementadas no Ensino Básico, que é o que desejamos.

Convidamos o leitor a experimentar esta proposta com os seus alunos.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A preocupação com a aprendizagem em Matemática desafia professores e pesquisadores a encontrarem caminhos para aproximar os estudantes dessa ciência. Nos últimos anos, minha inquietação pessoal a respeito do ensino de números irracionais me levou, sem que eu abandonasse o cenário escolar, a ingressar no mestrado para que pudesse me aprofundar nas reflexões sobre o estudo destes números.

O presente trabalho tem como proposta produzir um guia didático para os professores. O material é elaborado a partir da pesquisa sobre Números na forma de raiz considerando-se aqueles cujos radicandos sejam números naturais. Isto é, $\sqrt{n}$, $n \in N$, com autoria de Isabela Alcantara e orientação de Dora Soraia, onde se é realizado um estudo de caso com alunos da Licenciatura em Matemática de uma Universidade. Para tanto, ao longo do conteúdo buscou-se desenvolver uma abordagem desse conceito no dia a dia de sala de aula, com possíveis sequências de abordagem metodológicas para a prática do professor. Desejamos que o material aqui elaborado integre o ensino básico e embora seja direcionado para professores de matemática desse nível, também recomendamos para alunos de licenciatura em matemática, alunos de pós-graduação em ensino ou educação matemática e professores que ensinam matemática. Tal abordagem se enquadra no novo ano do Ensino Fundamental para introduzir números irracionais como é orientado na BNCC ou como revisão durante todo o Ensino Médio.

A ação do professor que ensina Matemática, de um modo geral, se baseia nos conteúdos apresentados nos livros didáticos escolhidos por ele ou pela equipe da escola em que atua. Entretanto, muitas vezes o caminho percorrido não atende à real necessidade dos estudantes e o professor se vê com necessidade de fazer adaptações. Nesta busca por soluções, nem sempre o professor encontra respostas para as suas perguntas pois envolve modificar rotinas, conhecer novos materiais, experienciar tarefas; observar e intervir nas ações dos alunos; modificar, quando necessário, as propostas iniciais; avaliar; aprofundar o estudo sobre o tema. Desta forma a organização das tarefas foi idealizada para favorecer a dinâmica do trabalho do professor. Assim, este guia foi estruturado com as seguintes seções:

Material de apoio para a realização da tarefa; Papo aberto com o professor; Tarefa ou descrição da atividade; Objetivos; Sugestões complementares. Veja o quadro com os ícones associados à cada seção e sua respectiva explicação.

Tabela 1-1 – Seções do guia didático.

 [19]	**Material de apoio para a realização da tarefa** Esse ícone lança os conteúdos que selecionamos para apoiar o trabalho indicado na ficha de atividade. São materiais que podem ser diretamente relacionados em sala de aula.
 [20]	**Papo aberto com o professor** Esse ícone marca o início do tópico papo aberto com o professor, onde é realizada uma conversa direcionada. Esperamos que o leitor, aproveite essas ideias, utilizando-a e aprimorando-a na sua sala de aula, acontecendo uma intersecção de ideias entre o conteúdo apresentado e as do professor.
 [21]	**Ficha de atividade ou Descrição da atividade** Esse ícone prevê uma ficha de atividade ou a descrição da que pode ser utilizada em sua sala de aula.
 [22]	**Objetivo da atividade** Essa seção descreve os objetivos pensados de cada atividade, que podem também ser incrementados por você professor.
 [23]	**Sugestões complementares** São materiais selecionados para aprofundar o estudo.

Fonte: Fonte: Elaborada pela autora.

[19] Fonte da imagem: https://publicdomainvectors.org/pt/vetorial-gratis/Lupa-de-desenhos-animados/47276.html
[20] Fonte da imagem: https://pixabay.com/pt/illustrations/conversa%C3%A7%C3%A3o-di%C3%A1logo-entrevista-1262311/
[21] Fonte da imagem: https://pixabay.com/pt/illustrations/relat%C3%B3rios-arquivo-dados-san%C3%A7%C3%A3o-1420210/
[22] Fonte da imagem: https://pixabay.com/pt/illustrations/criatividade-elemento-desenho-3813611/
[23] Fonte da imagem: https://www.google.com/save?ved=0ahUKEwj0sdzqovTmAhVBA9QKHVVuDu4Q7XUIHw&authuser=0

Mundo dos Números

Para iniciar o trabalho com os estudantes sugerimos que o professor elabore situações familiares ou não familiares para saber o que os estudantes conhecem sobre os números. Entendemos como atividades não familiares, a leitura de extratos de livros ou de capítulos de livros que apresentem, por exemplo, a origem dos números, o desenvolvimento dos números ao longo da história, uma curiosidade sobre o número pi, o número de ouro, os palíndromos, ou qualquer outra ideia que ajude os estudantes a se sentirem à vontade para conversar sobre o que conhecem sobre os números.

Embora não seja muito comum a leitura de livros de literatura em ambientes de aula de matemática, sugerimos esta estratégia como forma de enriquecer a aula e investigar o que os estudantes conhecem, aprenderam sobre números. Assim, nosso

OBJETIVOS

- ✓ Investigar a resposta dos estudantes;
- ✓ Identificar de que forma os estudantes entendem números.

TAREFA 1: Ouvindo os estudantes

Consiste em ouvir o que os estudantes sabem sobre números. Você, professor, deve conduzir como julgar melhor e pode partir dos materiais aqui selecionados. A ideia desta tarefa é partir do que os estudantes conhecem. Saber um pouco sobre sua realidade, avaliar conhecimentos prévios, identificar quais as concepções de números que eles possuem. É possível saber se eles conhecem e usam outros números além dos números naturais e no caso dos números racionais que tipo de representações lhes é familiar. E para o caso do $\sqrt{n}$, com n maior ou igual a 1, essa representação é uma operação ou um número irracional?

A seguir apresentamos algumas sugestões de atividades que foram realizadas para este fim. Nesta atividade, queremos indicar a tarefa pronta.

Material de apoio

No trabalho realizado por Silva (2019), você encontra um questionário realizado com estudantes do 9º ano em que o professor levanta uma série de questões para tomar conhecimento do que os estudantes conhecem sobre os números em particular sobre números irracionais. Um outro tipo de questionário você encontrará no trabalho de Rocha (2018). Para consulta, veja:

ROCHA, R. R. M.; **Sensibilização para existência dos números irracionais.**

SILVA, F. R.; **Estudantes do 9.º Ano do Ensino Fundamental Explorando Situações com os Números Irracionais *Pi* e *Phi*.**

Você também encontrará um roteiro de atividades a partir do uso de vídeos disponíveis gratuitamente no *YouTube*. Para este trabalho usamos Donald no país da Matemágica; a história do número 1 e o número de ouro.

Na pesquisa realizada por Kindel (2012), você encontra o passo-a-passo de como se elaborar uma Tempestade de ideias. Ver sobre em:

KINDEL, D. S.; **Um ambiente colaborativo a distância: licenciandos dialogando sobre os infinitos**.

Sobre como elaborar atividade usando extratos de livro, você encontra exemplo no texto de Silva (2019). A partir da pesquisa realizada por ele, usamos um trecho do livro 20.000 léguas matemáticas.

Leitura do **Livro do professor de matemática volume I: números naturais.**

TAREFA 2: Os gregos e os números.

A aritmética tem a ver com números e a geometria, com comprimentos. Para todo comprimento havia um número privilegiado, um inteiro, que o expressava. E todo inteiro, mais cedo ou mais tarde, revelaria ser o comprimento disto ou daquilo.

> Para os gregos antigos, a aritmética e a geometria já eram tidas como aspectos de uma mesma realidade fundamental. Ou seja, uma cesta de figos continha um número definido de figos, e uma pedra tinha sempre um tamanho definido. Ora, o primeiro tipo de número era o inteiro. Mas, que tipo de número se poderia atribuir à pedra? (DEWDNEY, 2000, p.27)

Qual a sua opinião sobre o texto acima? Discuta com o seu grupo e, comente o texto concordando ou discordando e justificando seu ponto de vista. Elaborem um texto e entregue ao professor.

Descobrindo buracos na reta

Nesta sequência de atividades propomos questionamentos aos estudantes para saber se a reta tem ou não todos os números? Ou se para cada um dos pontos da reta existe um número associado a ele? Ou ainda, todos os pontos possuem um número associado a ele e vice-versa?

Para Pommer (2012), os conjuntos numéricos são apresentados, na maioria das vezes, em uma Fonte: dados da pesquisa, elaborada pela autora ordem diferente da ordem em que apareceram historicamente. Ou seja, de um modo geral os conjuntos são apresentados como tendo sido criados na seguinte ordem: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathrm{I}, \mathbb{R}$. Quando de fato temos, que historicamente os números seguiram na seguinte ordem: $\mathbb{N}, \mathbb{Q}_+, \mathbb{Z}\ e\ \mathbb{R}$. Mas, que foram sendo permeados pela descoberta de alguns exemplares de números irracionais ao longo do caminho. Desta forma, Kindel (1998) afirma que é preciso estabelecer conexões históricas em busca dos postos-chave que surgiram ao longo do caminho para se compreender conceitos matemáticos elaborados e complexos como é o caso dos números irracionais.

Por outro lado, para os estudantes a reta é racional, pois sempre é possível encontrar a metade do segmento e, portanto, a metade associada à soma dos extremos do intervalo. Com base nisso, pode-se mostrar aos estudantes que a reta possui buracos, os irracionais.

Assim, nosso OBJETIVO com a tarefa 3, foi dar início ao trabalho para mostrar que existem outros números, os irracionais, além daqueles conhecidos para poder:

- ✓ Verificar de que formas os estudantes localizam os números na reta em que a unidade é dada;
- ✓ Verificar que estratégias os licenciandos usam para determinar o intervalo de localização dos números dado

TAREFA 3: Números nas retas

(Responda individualmente)

5) Escolha cinco números inteiros de sua preferência e os localize em cada uma das retas abaixo. São dadas as retas *r* e *s* com a unidade u = 2cm e unidade u = 2,5cm, respetivamente.

a) reta *r*

b) reta *s*

6) Desenhe a reta *t*, e marque os números escolhidos considerando agora a unidade u = 3cm.

7) Descreva como você faria para localizar exatamente os seguintes números na reta?

a) $\sqrt{2}$?

b) $\sqrt{3}$?

c) $\sqrt{4}$?

d) $\sqrt{5}$?

8) Localize os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ e $\sqrt{5}$ na reta *r*.

5) Sabendo que 2 está entre os números 1 e 3, podemos dizer que o número 2 está localizado no intervalo (1,3) ou ainda [1,3]. No primeiro caso, os números 1 e 3 não pertencem ao intervalo e no segundo, eles pertencem. Com base nesta informação, identifique o menor intervalo em que os extremos sejam inteiros para localizar cada um dos seguintes números: $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{19}$, $\sqrt{20}$ e $\sqrt{21}$.

Responda:

a) Quais dos números acima, representam um número inteiro?

b) Todos os intervalos inteiros apresentaram a mesma quantidade de números representados na forma de radicais? Explique.

c) Veja que os números $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5},\ldots, \sqrt{18}, \sqrt{19}, \sqrt{20}, \sqrt{21}\}$ também podem ser representados da seguinte forma:

$$\{\sqrt{n},\ n \in \mathrm{N} \ / \ 1 \leq n \leq 21\}.$$

Agora, trace a reta *r* e usando como unidade u = 1,5 cm, localize os números $\sqrt{n}$, em que $\{n \in \mathrm{N} / \ 3 \leq n \leq 28\}$.

REFERÊNCIAS

BRASIL: CinePlayers. **Donald no País da Matemágica**.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – BNCC – Ensino Fundamental. Homologado em 2017.

DEWDNEY, A. K. **20.000 léguas matemática: um passeio pelo misterioso mundo dos números**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2000.

EDUCAÇÃO DOCUMENTÁRIOS. **Donald no País da Matemágica** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=wbftu093Yqk>. Acesso em: mar/2020.

KINDEL, D. S.; **Um Ambiente Colaborativo a Distância: Licenciandos Dialogando sobre os Infinitos/** São Paulo:[s.n.], 2012.

RIPOLL, C. C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V.; **Livro do professor de matemática volume I: números naturais.** Rio de Janeiro: SBM, 2015.

REDE CATARINENSE. **A História do Número 1 - Como Tudo Começou.** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=ZWZKJb06CTU>. Acesso em: mar/2020.

ROCHA, R. R. M. **Sensibilização para existência dos números irracionais**. 2018. 154f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica.

SILVA, F. R.; **Estudantes do 9.º Ano do Ensino Fundamental Explorando Situações com os Números Irracionais *Pi* e *Phi*.** 2019. 205f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica.