UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

GeoGebra no Clique e na palma das mãos: Contribuições de uma dinâmica de aula para Construção de Conceitos Geométricos com Alunos do Ensino Fundamental

MARCOS PAULO HENRIQUE

2017

UFRRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL
DO RIO DE JANEIRO

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

MARCOS PAULO HENRIQUE

GeoGebra no Clique e na Palma das Mãos: Contribuições de uma Dinâmica de Aula para Construção de Conceitos Geométricos com Alunos do Ensino Fundamental

Sob a orientação do Professor Doutor

Marcelo Almeida Bairral

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática**, no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática.

Seropédica, RJ
Janeiro, 2017

H518 Henrg

Henrique, Marcos Paulo, 1982-
GeoGebra no Clique e na Palma das Mãos: Contribuições de uma Dinâmica de Aula para Construção de Conceitos Geométricos com Alunos do Ensino Fundamental / Marcos Paulo Henrique. - 2017.
108 f.: il.

Orientador: Marcelo Almeida Bairral.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Educação em Ciências e Matemática, 2017.

1. Ensino Fundamental. 2. Ambientes de Geometria Dinâmica. 3. Geometria plana. 4. Conceitos geométricos. I. Bairral, Marcelo Almeida, 1969-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Educação em Ciências e Matemática III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

MARCOS PAULO HENRIQUE

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática**, no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 27/01/2017.

Marcelo Almeida Bairral, Prof. Dr UFRRJ
(Orientador)

Dora Soraia Kindel, Profa. Dra. UFRRJ

Agnaldo da Conceição Esquincalha, Prof. Dr UERJ

AGRADECIMENTOS

Enfim é chegada a hora de referenciar todos aqueles que fazem parte deste caminhar. Então, é com satisfação e um enorme sentimento de gratidão, que:

Agradeço a Deus, pela saúde, por me dar forças e a garra necessária para superar os momentos difíceis e por me consentir a oportunidade de viver cada momento desta etapa de forma consciente e ter ao meu lado as pessoas que tanto amo.

Agradeço o meu orientador Marcelo Almeida Bairral por me direcionar no caminho da pesquisa, por me incentivar e pelas valiosas sugestões, pois a cada dúvida e ansiedade minha, soube, sempre com serenidade e sabedoria, apontar o melhor direcionamento.

Agradeço a minha esposa Claudiane pela parceria e o amor incondicional, me incentivando e apoiando nas minhas escolhas e decisões.

Agradeço aos meus pais, Augusto e Maria Cremilda, por me ensinarem o que os livros não ensinam, mas por me ensinarem a importância do livro na minha formação.

Agradeço o meu irmão Leandro, pelo encorajamento, pelas sugestões e o olhar crítico que extrapolam as páginas deste trabalho.

Agradeço os professores Aguinaldo da Conceição Esquincalha e Dora Soraia Kindel por aceitarem fazer parte da qualificação e defesa e pelas sugestões, críticas e apontamentos, essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço todos os professores do PPGEduCIMAT, em especial a professora Ana Cristina Souza dos Santos, por idealizar e nos permitir viver esse sonho.

Agradeço todos os integrantes do Gepeticem com quem tenho aprendido a importância da partilha e do olhar crítico.

Agradeço o Alexandre, amigo com que o convívio tem contribuído para o meu crescer.

Agradeço meu amigo Wagner, por ouvir, aconselhar e também criticar, sempre na medida exata.

Agradeço aos colegas da primeira turma do PPGEduCIMAT, pelo café compartilhado, pela troca, discussões e risadas, em especial a Carol, amiga com que aprendi muito durante os nossos encontros.

Agradeço direção do Colégio Estadual Alfredo Pujol pelo apoio e incentivo para realização das atividades.

Agradeço a todos meus alunos/as das turmas de oitavo e nono ano, dos anos letivos de 2015 e 2016, pela participação, empenho e por tornarem possível a realização deste trabalho.

Agradeço a Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro por conceder licença para estudos durante a realização da pesquisa.

RESUMO

HENRIQUE, MARCOS PAULO. **GeoGebra no Clique e na Palma das Mãos: Contribuições de uma Dinâmica de Aula para Construção de Conceitos Geométricos com Alunos do Ensino Fundamental** 2017. 108 p. Dissertação (Mestre em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2017.

A presente investigação centrou-se na elaboração de atividades, na implementação (no laboratório de informática e em sala de aula) e na análise do aprendizado de alunos do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Rio Claro (RJ). Especificamente, a pesquisa analisou o desenvolvimento conceitual em uma prática docente que valoriza o diálogo, a argumentação e a escrita, entre outras formas de registro em uma reflexão com atividades a partir da utilização do GeoGebra convencional (desktop) e o GeoGebra aplicativo (versão para *smartphones*). A análise não consiste em comparar os dois ambientes utilizados, mas identificar contribuições e desafios atrelados à implementação destes recursos para apropriação do conhecimento. Os conceitos foram polígonos, polígonos regulares e retas paralelas com uma transversal. A coleta de dados foi realizada da seguinte maneira: (a) gravação em áudio, folha de atividades, os arquivos referentes às construções geométricas, registros fotográficos e diário do pesquisador (implementação no laboratório) e (b) gravação em áudio e vídeo, captura da tela dos *smartphones* utilizados pelos estudantes, folha de atividades e diário do pesquisador (implementação em sala de aula). Em relação às implementações de atividades com computadores, destacamos as várias formas de visualização e construção de um objeto geométrico proporcionado pelo ambiente de geometria dinâmica e a mediação, como ferramenta do trabalho docente, como algumas contribuições para a construção e desenvolvimento do conceito de polígono regular. Observamos dificuldades apresentadas pelos estudantes no que se refere ao manuseio do GeoGebra em um computador, assim como desafios para implementação de práticas pedagógicas no laboratório de informática, como vários computadores com defeito. Como contribuições do *smartphone* na implementação de atividades, destacamos o apelo motivador que este recurso traz às aulas. Particularmente, no trabalho com retas paralelas cortadas por transversais, o uso GeoGebra aplicativo mostrou-se instigante por permitir aos alunos a observação de um conjunto de elementos (ângulos, posição de retas etc.) variantes ou invariantes e, juntamente com o manuseio e exploração das formas manuseadas. Como desafios é possível apontar a dificuldade de visualização de propriedades em um constructo para casos em que a tela do *smartphone* é pequena.

Palavras-chave: Ensino Fundamental. Ambientes de Geometria Dinâmica. Geometria plana. Conceitos geométricos.

ABSTRACT

HENRIQUE, MARCOS PAULO. **GeoGebra on click and in your hands' palm: contributions of Classroom's dynamics for constructing Geometric Concepts with Elementary Students,** 2017. 108 p. Dissertation (Mestre em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2017.

This investigation is focused on the development of activities, implementation (in the computer lab and in the classroom) and the analysis of learning of students in the 8^{th} and 9^{th} year of a public school in the city of Rio Claro (RJ). Specifically, the research considered the conceptual development in a teaching practice that values the dialogue, debate and writing, among other ways of registration, in a reflection with activities from the use of traditional GeoGebra (desktop) and GeoGebra application (version for smartphones). This analysis was not done to compare the two environments used, but identify contributions and challenges linked to the implementation of these resources for appropriation of knowledge. The concepts were polygons, regular polygons and parallel lines with a transverse. Data collection was carried out as follows: (a) audio recording, activities, geometric constructions files, photographic records and researcher's journal (implementation in the lab) and (b) audio and video recording, smartphones' screen capture used by students, and daily activities sheet of researcher (implementation in the classroom). In implementations of activities with computers, are highlighted the various forms of visualization and construction around the geometric object provided by dynamic geometry environment and mediation, as a tool of teaching work, as some contributions to the construction and development of the concept of regular polygon. It was observed during the implementation of the survey, some difficulties presented by the students related to handling of GeoGebra on a computer, as well as challenges to implementation of pedagogical practices in the computer lab, where multiple computers were defective. As contributions in the implementation of activities, stands out the motivator appeal, particularly, in working with parallel lines cut by transversal, using GeoGebra application. The experience showed and proved exciting, allowing the students to conclude that there are a set of elements (angles, straight position etc.), variants and invariants, along with the use and exploration of forms handled. As challenges, you can point out the difficulty of viewing properties in a building for cases where smartphone screen is small.

Keywords: Elementary School. Dynamic Geometry environments. Plane geometry. Geometric concepts.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE APÊNDICES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AGD	Ambiente de Geometria Dinâmica
BOLEMA	Boletim de Educação Matemática
EDUCOM	Educação com Computadores
EUA	Estados Unidos da América
FORMAR	Curso de Especialização em Informática na Educação
GEPEM	Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática
JIEEM	Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática
PPGEduCIMAT	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática
PRONINFE	Programa Nacional de Informática Educativa
PROINFO	Programa Nacional de Informática na Educação
REVEMAT	Revista Eletrônica de Educação Matemática
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
UFRRJ	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
VMTcG	Grupos Virtuais de Matemática com o GeoGebra

SUMÁRIO

TELA INICIAL

Na atualidade boa parte das escolas ainda apresentam um ensino pautado na transmissão do conhecimento, com pouca valorização na fala dos estudantes. Em consonância a esse cenário temos pouca, ou quase nenhuma, articulação entre os saberes produzidos em sala de aula. É claro, que alguns conteúdos são ferramentas utilizadas para o entendimento de outros conhecimentos com uma contextualização mais ampla no dia a dia, mas ainda assim este conhecimento representa uma etapa histórica, um olhar revolucionário de alguém que deslumbrava alcançar novos conhecimentos.

A falta de articulação entre os saberes é fortemente evidenciada quando comparamos a evolução tecnológica que vivenciamos com a falta de utilização dessas ferramentas em sala de aula. Quando analisamos o ensino da Matemática observamos um agravamento dessa situação, afinal existe atualmente uma gama de aparatos tecnológicos que podem ser implementados em situações de ensino.

Computadores, calculadoras, *tablets* e os *smartphones* se configuram como potenciais ferramentas com contribuições para o ensino e aprendizado matemático. Em particular, para o aprendizado geométrico temos os Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD) que têm trazido possibilidades de inovação para ensino. Essas possibilidades vão desde variadas formas de visualização e construções de um objeto geométrico, que pode acontecer através do clique (via mouse) com a visualização na tela do computador ou no toque na tela, no caso de ambientes *touchscreen*.

A perspectiva de criar novas possibilidades, incorporando as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) a situações de ensino é apresentada como justificativa para presente pesquisa, desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGEduCIMAT) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro e do GEPETICEM[1].

O presente estudo integra a linha de pesquisa dois[2] do PPGEduCIMAT, e tem por objetivo a elaboração de atividades para o uso do GeoGebra nos estudos de tópicos relacionados à geometria plana, implementação e análise das atividades que foram realizadas em dois momentos distintos: no laboratório de informática através do GeoGebra desktop (convencional), e em sala de aula com o GeoGebra em sua versão aplicativo, por meio do uso

[1] Disponível em <http://www.gepeticem.ufrrj.br/portal/>. Acesso em 15 nov. 2016.
[2] Esta linha, entre outros atributos, busca o entendimento sobre o processo de apropriação dos conceitos e a compreensão do papel da interação na construção conceitual em ciências e matemática, além da introdução das TIC na investigação sobre a aprendizagem de alunos e professores da educação básica.

dos *smartphones* dos próprios participantes. A implementação realizada no laboratório de informática teve como público alvo estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, enquanto que as intervenções em sala de aula contemplaram alunos do 8º ano, ambos de uma escola Pública do Município de Rio Claro (RJ).

Vale fazer um esclarecimento neste momento. Embora realizamos implementações em ambientes com peculiaridades diferentes, como é o caso do GeoGebra convencional e o GeoGebra aplicativo e em turmas diferentes, o propósito da pesquisa não consiste em nenhum tipo de comparação entre os ambientes utilizados (GeoGebra convencional e GeoGebra aplicativo), mas identificar as contribuições para o desenvolvimento conceitual, fruto da utilização destes recursos. Dessa forma, o trabalho visa proporcionar uma prática capaz de tornar o ambiente mais profícuo para aprendizagem, oportunizando aos estudantes a democratização da Matemática mediada pelo uso do AGD, que apresenta como contribuições o uso variado de recursos.

Particularmente, a pesquisa[3] visa analisar a construção de conceitos geométricos dos estudantes analisados através de uma prática docente que valoriza o diálogo, a argumentação e a escrita em uma reflexão investigativa com atividades a partir da utilização do GeoGebra. Como ponto de partida surge, então, a seguinte questão: "que contribuições uma intervenção em aula que inclua AGD (com e sem *touchscreen*) tem para a construção de conceitos geométricos de alunos do 8º e 9º ano de uma escola pública do Rio de Janeiro? "

Como objetivos específicos, a pesquisa visa:

1. Identificar as contribuições e desafios atrelados ao uso do GeoGebra convencional para construção do conceito de polígono regular e identificação de propriedades;
2. Analisar as contribuições do GeoGebra, aplicativo no desenvolvimento de atividades para construção de conceitos relacionados aos estudos de retas paralelas cortadas por uma transversal;
3. Elucidar as dificuldades relacionadas ao reconhecimento de propriedades nos estudos de retas paralelas cortadas por uma transversal.

A seguir descrevemos como a presente dissertação foi organizada de modo a contemplar os objetivos anteriores.

[3] Esta investigação integra o Projeto de Pesquisa Construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos *touchscreen*, financiado pela Faperj. A pesquisa está aprovada na Comissão de Ética na Pesquisa da UFRRJ sob o número 604/2015.

No primeiro capítulo apresentamos a pesquisa bibliográfica realizada e destacamos os trabalhos que dialogam com nossa proposta.

No segundo capítulo discutimos algumas das ideias ligadas ao uso de computadores e *smartphones* na educação. Para isso começamos destacando alguns projetos pioneiros com o objetivo de efetivar a informática na educação; apontamos também o surgimento de novas possibilidades para o ensino e aprendizado matemático através de ambientes *touchscreen*; destacamos o AGD como ferramenta com potencial para a construção do conhecimento geométrico, algumas reflexões para o ensino da Geometria mediado por um AGD e possibilidades para o uso dos *smartphones* na educação.

O terceiro capítulo apresenta a construção de um conceito sob a ótica da neurociência, colocando a mente humana em uma posição de destaque, da linguística por intermédio das metáforas que usamos na construção de uma ideia ou significado e da ciência cognitiva, destacando aspectos relacionados à investigação sobre a formulação de um conceito. Destacamos, também, o uso da escrita, da argumentação e do diálogo como formas de interação e reflexão que ocorreram nas intervenções e uma caracterização das atividades elaboradas.

Os caminhos da pesquisa foram abordados no quarto capítulo. Dessa forma, apontamos a organização do trabalho, a atividade piloto como caminho que conduziu à elaboração das atividades, a metodologia de pesquisa, os métodos que empregamos, e os sujeitos.

O processo analítico destacando as implementações com computadores e *smartphones* constituem o quinto e sexto capítulos e, por fim, considerações, apontamentos, observações e desdobramentos se constituem em algumas conclusões deste trabalho na seção fechando a tela.

CAPÍTULO I – NO CLIQUE OU NO TOQUE: ALGUMAS PESQUISAS

Este capítulo tem como objetivo apresentar o levantamento bibliográfico realizado, destacando os trabalhos selecionados que dialogam e amparam nossa proposta, assim como as estratégias utilizadas para logística de seleção dos textos.

1.1 Organização e Caracterização

Com o objetivo de obter informações sobre o desenvolvimento de pesquisas que tenham relação com o presente trabalho, ou seja, cuja ênfase esteja pautada no ensino e aprendizagem de polígonos regulares e retas paralelas cortadas por uma transversal mediante a utilização de um AGD, realizamos um levantamento bibliográfico a partir de artigos disponíveis em algumas das principais revistas eletrônicas em Educação Matemática, a saber: Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo[4], JIEEM[5], Educação Matemática Pesquisa[6], BOLEMA[7], Boletim GEPEM online[8], Vidya[9], Educação Matemática em Revista[10], Zetetiké[11], Perspectivas da Educação Matemática[12] e REVEMAT[13].

Delegamos à revisão de literatura um período amplo com o intuito de encontrar o suporte adequado tanto para análise quanto para o desenvolvimento da pesquisa, de um modo geral. Dessa forma, realizamos uma primeira busca em que utilizamos as seguintes palavras-chaves: retas cortadas, quadriláteros, triângulo(s)[14], polígonos regulares, ensino de geometria e aprendizagem em geometria. A pesquisa foi realizada nos dias 27 e 28 de janeiro de 2016 e contemplou trabalhos compreendidos no período entre 2011 a 2015. A seguir apresentamos a organização dos dados de acordo com a busca por palavras-chave.

---

[4] Disponível em <http://revistas.pucsp.br/IGISP>. Acesso em 27 jan. 2016.
[5] Disponível em <http://pgsskroton.com.br/seer//index.php/JIEEM>. Acesso em 27 jan. 2016.
[6] Disponível em <http://revistas.pucsp.br/emp>. Acesso em 10 set 2015.
[7] Disponível em <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/>. Acesso em 27 jan. 2016.
[8] Disponível em <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem>. Acesso em 27 jan. 2016.
[9] Disponível em <http://periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/index>. Acesso em 27 jan. 2016.
[10] Disponível em <http://www.sbembrasil.org.br/revista/index.php/emr>. Acesso em 27 jan. 2016.
[11] Disponível em <https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/index.php/zetetike/%3B>. Acesso em 27 jan. 2016.
[12] Disponível em <http://seer.ufms.br/index.php/pedmat>. Acesso em 27 jan. 2016.
[13] Disponível em <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>. Acesso em 27 jan. 2016.
[14] Em relação à palavra-chave em destaque cabe um esclarecimento: identificamos uma variância para a busca entre as palavras triângulo e triângulos. No entanto, mesmo distinguindo os textos, contabilizamos e apresentamos os resultados em um mesmo quadro.

Quadro 1: Organização do levantamento bibliográfico

Palavras-chave	**Retas cortadas**	**Quadriláteros**	**Triângulo(s)**	**Polígonos regulares**	**Ensino de Geometria**	**Aprendizagem em Geometria**
Total de trabalhos	0	11	44	06	115	153

Fonte: Elaboração própria.

Em seguida realizamos um refinamento selecionando pesquisas no âmbito nacional, implementadas com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, em que foi utilizado algum AGD, seja como suporte metodológico, seja para evidenciar suas contribuições ao aprendizado como desenvolvimento de conceitos geométricos. Com esse primeiro refinamento foram selecionados sete textos (apresentados no quadro 2). Entretanto, a fim de evidenciar as possíveis contribuições de cada trabalho à nossa pesquisa realizamos uma análise com objetivo de identificar elementos mais pontuais. Nessa perspectiva, nos pautamos nos seguintes questionamentos: (a) qual abordagem na pesquisa? (b) qual AGD utilizado? (c) além do AGD, quais foram as outras tecnologias utilizadas? (d) qual o embasamento teórico da pesquisa? (e) quais as conclusões obtidas?

No quadro a seguir apresentamos uma síntese dos textos selecionados, destacando o ano e a revista em que foi publicado o trabalho, o(s) autor(es), o título do trabalho, a(s) palavra(s)-chave (em sintonia com nossa busca), e por fim, algumas observações que apontam a escolha dos textos que subsidiaram o desenvolvimento do tema em questão.

Quadro 2: Organização dos trabalhos selecionados (continua)

Ano/Revista	**Autor(es)**	**Título do trabalho**	**Palavra-chave**	**Observações Importantes**
2012 Instituto GeoGebra	Naiane Gajo Silva, André Krindges	Geometria dinâmica GeoGebra – Uma nova maneira de ensinar	Ensino de geometria; aprendizagem em geometria	O relato tem como objetivo evidenciar importância da utilização das TIC em situações de ensino para o aprendizado matemático. As autoras destacam a construção de conceitos geométricos, entretanto ao logo do trabalho esse fato não fica claro.
2012 Instituto GeoGebra	Melissa Meier, Maria Alice Gravina	Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental	Ensino de geometria	A pesquisa ressalta a importância da utilização do GeoGebra na construção do pensamento geométrico a partir da modelagem.

Quadro 2: Organização dos trabalhos selecionados (continuação)

Ano/Revista	Autor(es)	Título do trabalho	Palavra-chave	Observações Importantes
2012 Instituto GeoGebra	Sônia Cristina da Cruz Mendes, Estela Kaufman Fainguelernt, Chang Kuo Rodrigues	GeoGebra e a família dos números metálicos	Ensino de geometria; Aprendizagem em geometria	Pouca ênfase na participação dos estudantes e na implementação das atividades e não apresenta contribuições do AGD utilizado.
2012 REVEMAT	Gerson Pastre Oliveira, Péricles Bedretchuk Araujo	Uma abordagem para o ensino de lugares geométricos com o GeoGebra	Ensino de geometria; aprendizagem em geometria	Ênfase no desenvolvimento das atividades adidáticas a partir da utilização do GeoGebra como agente motivador e facilitador para o processo de aprendizagem.
2013 Boletim GEPEM	Teresinha Aparecida Faccio Padilha, Maria Madalena Dullius, Marli Teresinha Quartieri	Construção de fractais usando o *software* GeoGebra	Ensino de geometria	As autoras apresentam uma experiência com alunos do 8º ano do ensino fundamental integrando geometria e álgebra através de investigações referente à geometria fractal com a utilização do GeoGebra.
2013 REVEMAT	Eliane Teixeira Vargas	Geometria Dinâmica para estudo das relações métricas no triângulo retângulo	Triângulo; ensino de geometria	A autora apresenta uma situação de ensino em que os alunos puderam fazer construções e verificações através da utilização do GeoGebra.
2015 REVEMAT	Rodrigo Sychocki da Silva	O uso da geometria dinâmica em modelagens geométricas: possibilidade de construir conceitos no ensino fundamental	Ensino de geometria	O autor utiliza o GeoGebra como recurso a fim de tornar propício a construção do pensamento matemático através de uma sequência de atividades para o aprendizado geométrico.

Fonte: Elaboração própria

A partir deste levantamento destacamos três textos, em destaque no quadro anterior, (MEIER; GRAVINA, 2012; PADILHA *et al.*, 2013; SILVA, S., 2015) cujas pesquisas evidenciaram a implementação de atividades com alunos dos anos finais do ensino fundamental destacando, entre outros aspectos, contribuições do GeoGebra para o processo de ensino e aprendizagem. Vejamos.

Meier e Gravina (2012) apresentam em sua pesquisa, desenvolvida com alunos do 8º ano do ensino fundamental de uma escola pública de São Leopoldo (RS), um trabalho de modelagem geométrica. O termo modelagem é empregado pelas autoras no sentido de construção (representação) de objetos do cotidiano dos estudantes, como porta pantográfica, janela basculante, balanço vai e vem por meio de conceitos da geometria plana no GeoGebra.

A proposta articula a utilização do AGD com a proposta curricular, peculiar à escola em que foi desenvolvida a pesquisa, através do seguinte objetivo: o desenvolvimento do pensamento geométrico (formulação de conjecturas, estabelecer relações e investigações) dos participantes por meio da utilização dos recursos oferecidos pelo GeoGebra.

A proposta de trabalho foi, inicialmente, apresentada aos estudantes através do site Geometria em Movimento[15], desenvolvido especificamente para o trabalho cujo objetivo principal foi instigar os alunos como um convite à realização das atividades.

Entre outros conteúdos, através do projeto, foi possível trabalhar retas paralelas, ângulos opostos pelo vértice, ângulos formados a partir de duas paralelas cortadas por uma transversal e quadriláteros.

No que tange a realização de atividades por meio do GeoGebra, as autoras destacam que a análise imediata de um objeto geométrico oferecido através da manipulação direto na tela do computador dá ao aluno a possibilidade de entender o resultado de suas ações na medida em que investiga e formula conjecturas (MEIER; GRAVINA, 2012).

Padilha *et al.* (2013) apresentam uma experiência com alunos do 8º ano do ensino fundamental integrando geometria e álgebra através de investigações referente a geometria fractal com a utilização do GeoGebra. A implementação ressalta a importância de aliar o uso de um AGD para o aprendizado geométrico. As pesquisadoras iniciaram a intervenção propondo aos estudantes questionamentos a fim de identificar o que os estudantes já sabiam sobre o tema de estudos (fractal) por meio do uso do registro escrito.

A pesquisa de Silva S. (2015) tem por base o mesmo projeto utilizado na pesquisa que apresentamos de Meier e Gravina (2012), em que os sujeitos e as atividades propostas (modelagem geométrica) se constituem os mesmos. Entretanto, Silva S. (2015) procura evidenciar a construção do hábito do pensamento matemático que pode ser construído por intermédio do uso das TIC em situações de ensino através do desenvolvimento de atividades

[15] Disponível em <http://odin.mat.ufrgs.br/modelagem/>. Acesso em 30 jan. 2016.

para investigação de propriedades geométricas envolvidas na construção do modelo geométrico.

Com base na teoria de Goldenberg (1998), cujo propósito está relacionado ao desenvolvimento do hábito de pensamento matemático por meio da experimentação, testagem, argumentação e formulação de conjecturas que o uso do computador, permite o autor apresenta uma sequência de atividades em que o GeoGebra se torna essencial no desenvolvimento do pensamento matemático.

Em sua pesquisa Silva S. (2015) procurou evidências da contribuição do AGD para reforçar o hábito do pensamento matemático. Outras ferramentas utilizadas pelo autor e que merecem igual destaque são: o uso da linguagem, por intermédio da socialização dos resultados obtidos pelas duplas de alunos, promovida ao final das tarefas, como forma de reflexão, e do registro escrito, através da utilização do *Kompozer* (*software* que pode ser utilizado como editor de texto) como forma de efetivar as descobertas. Outro ponto relevante está no formato das atividades que se configuram como um convite à investigação. Ao final, o autor julgou que a modelagem geométrica mediante a utilização do AGD ofereceu o suporte adequado no desenvolvimento do pensamento matemático para o grupo de alunos analisados.

As pesquisas que selecionamos estão em consonância com nosso trabalho, pois procuraram evidenciar as potencialidades do GeoGebra, formas de interação docente, ênfase nas tarefas desenvolvidas e de certa forma, cada qual com sua proposta, apresentaram as contribuições do AGD à prática docente. Entretanto, os textos que apresentamos não abarcam toda nossa proposta, o que demandou a necessidade de uma nova busca.

A dinâmica oferecida por um AGD mediante a tecnologia *touchscreen* necessita um olhar diferente da dinâmica do computador (convencional). Apoiados nessa ideia e procurando identificar contribuições e dificuldades em pesquisas que tratassem do mesmo tema realizamos nova busca no dia 11 de agosto de 2016 nos mesmos periódicos[16] do primeiro levantamento, a partir das seguintes palavras-chave: GeoGebra e retas paralelas. Neste levantamento foram encontrados quarenta e nove trabalhos tendo o GeoGebra como palavra-chave e dez relacionados a retas paralelas. Em seguida o foco do refinamento centrou-se na seleção de trabalhos com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. No quadro seguinte apresentamos a organização dos textos selecionados.

[16] Com exceção do periódico Vydia que não pôde ser consultado devido a problemas no site.

Quadro 3: Organização dos trabalhos selecionados: Segundo momento da revisão

Ano/Revista	Autores	Título do trabalho	Palavras-chave	Observações Importantes
2012 REVEMAT	Gerson Pastre Oliveira, Péricles Bedretchuk Araujo	Uma abordagem para o ensino de lugares geométricos com o GeoGebra	GeoGebra	Texto analisado no primeiro levantamento bibliográfico (quadro 2)
2014 Educação Matemática em Revista	Juliana Aparecida Gobbi e José Carlos Pinto Leivas	Engenharia Didática e GeoGebra Aliados na Construção de Conceitos Geométricos	GeoGebra	

Fonte: Elaboração própria

Dos dois textos detalhados no quadro anterior, apenas o texto de Gobbi e Leivas, (2014) estavam em consonância com a nossa proposta.

Gobbi e Leivas (2014) parte de um estudo desenvolvido com estudantes do 6º ano do ensino fundamental, realizado por meio de elaboração prévia de um conjunto de atividades (engenharia didática) cuja proposta centrou-se na implementação de atividades para os estudos de área e perímetro de Figuras geométrica por meio do GeoGebra convencional.

Segundo os autores, o estudo de Geometria plana deve ser associado à construção de três habilidades essenciais ao aprendizado geométrico: imaginação, criatividade e abstração (GOBBI; LEIVAS, 2014). Em relação à implementação de atividades com o GeoGebra, os estudiosos afirmam que a utilização do AGD permite o desenvolvimento de conceitos geométricos através da criação de espaços de exploração.

Em síntese, o mapeamento apontou uma quantidade razoável de trabalhos de acordo com busca com as palavras-chave utilizadas, no entanto, houve pouca ênfase na implementação de atividades com estudantes. Além disso encontramos poucos trabalhos no cenário nacional. Dessa forma, na medida em que realizamos a análise de cada implementação, percebemos, em alguns momentos a falta de trabalhos que desse um suporte mais "cômodo" as nossas interpretações, o que evidenciou a necessidade de uma nova estratégia de busca e incremento ao levantamento até aqui realizado.

1.2 Desdobramentos de cada Momento

A carência por trabalhos relacionados com a temática da nossa proposta (polígonos regulares e retas paralelas cortadas por uma transversal) realizados em AGD, tanto em um computador convencional quanto em dispositivos móveis com tecnologia *touchscreen*, ao mesmo tempo em que se tornou um fator complicador reforçou a importância da nossa investigação. Assim como desdobramento da busca inicial optamos por trazer alguns trabalhos que pudessem amparar melhor nossas análises. Nesse enfoque, apresentamos trabalhos que em algum momento evidenciou contribuições de um AGD (com ou sem *touchscreen*) com ênfase em, pelo menos, um dos temas de estudos a que se refere este trabalho. Vale o destaque para o fato de que não encontramos textos que falem exclusivamente de dispositivos móveis e retas paralelas cortadas por uma transversal. Assim, nos valeremos de referências feitas a um determinado ambiente para analisar outro. Em outras palavras, mais adiante usaremos referências feitas em um AGD que utilizou o computador convencional para analisar uma implementação com *smartphone*, por exemplo.

Para chegar aos dois trabalhos que apresentaremos a seguir, fugimos à regra em alguns aspectos que estabelecemos no início do levantamento bibliográfico, ou seja, a busca por pesquisas que enfatizaram intervenções com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental em periódicos de Educação Matemática. Dessa forma, realizamos uma nova busca no seguinte periódico eletrônico: Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia[17], que disponibiliza em seu repositório trabalhos nas mais diversas áreas. Seu objetivo é divulgar pesquisas que tragam ao processo de ensino e aprendizagem com estratégias inovadoras.

Apesar de ter inicialmente orientado o levantamento nos mesmos moldes já realizados (trabalhos com alunos dos anos finais do ensino fundamental) na busca, contudo realizada no periódico citado anteriormente, encontramos dois trabalhos que, como já comentamos, foge à regra, mas nos chamou a atenção.

O primeiro trabalho que destacamos é o de Silva G. (2012), que relata uma experiência realizada com um grupo de futuros professores de matemática que (sob a supervisão do autor) elaboraram e implementaram atividades relacionados à tópicos de geometria plana (perímetro, área e ângulos formados por duas retas concorrentes) através do GeoGebra com estudantes do primeiro ano do ensino médio de uma escola pública. A pesquisa teve como objetivo a análise de contribuições do GeoGebra aos desafios atrelados à possíveis imprevistos que possam ocorrer em situações de ensino quando se empregam as TIC.

A confecção e implementação das atividades se basearam na ideia de investigação em matemática propondo situações em que a reflexão conduzisse à construção de novas questões

[17] Disponível em <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/index>. Acesso em 15 ago. 2016.

e observações relevantes. Outros destaques do trabalho estão relacionados ao contexto histórico do desenvolvimento da geometria dinâmica em ambientes informatizados, estudos em que o autor destaca as potencialidades de um AGD ao aprendizado geométrico, bem como a forma não estática propiciada pela criação de um objeto geométrico pelo usuário, possibilitando desta forma a interação com o constructo (SILVA G., 2012).

O segundo texto selecionado traz o trabalho de Bairral *et al.* (2015b), em que os autores apresentam um levantamento sobre aplicativos para o uso em dispositivos móveis (com tecnologia *touchscreen*), cujo enfoque está no aprendizado matemático e a implementação de atividades com graduandos de matemática por meio dos *softwares Geometric Constructer e Sketchometry* (dois dos *softwares* catalogados).

Bairral *et al.* (2015b) catalogaram os aplicativos separando-os por tipo a temática e os sujeitos a que se destinam. O primeiro tipo é o *software*: aplicativo em que a decisão de criação está nas mãos do usuário, e o segundo o jogo com regras pré-estabelecidas. Durante a implementação das atividades, que ocorreu com três graduandos, foram realizadas construções relacionadas à geometria plana (quadriláteros) em que os autores fizeram uma análise da implementação das atividades por meio de um dispositivo *touchscreen*.

A pesquisa traz aspectos relevantes no que se refere à importância da ambientação dos estudantes, análise do *software* com suas potencialidades e deficiências na confecção de uma atividade. No que se refere à construção de conceitos geométricos dos participantes, não há ênfase uma vez que trabalho centrou-se em verificar as contribuições (curriculares, cognitivas ou epistemológicas) do uso de dispositivos *touchscreen* ao aprendizado matemático. Entretanto, os estudiosos verificaram que a implementação de uma atividade por meio de um dispositivo móvel proporciona a investigação, formulação de conjecturas dos estudantes, gerando mais autonomia com possibilidades de aprendizagem (BAIRRAL *et al.*, 2015b).

A seguir apresentamos a organização dos trabalhos selecionados, destacando as principais contribuições para o desenvolvimento da pesquisa.

Tabela 1: Síntese dos trabalhos selecionados (continua)

Ano	**Autor(es)**	**Temática/Ensino**	**Contribuições**
2012	Meier e Gravina	Modelagem Geométrica	Análise das implementações com computadores
2012	Silva G.	Contribuições pedagógicas de um AGD	Potencialidades de AGD; análise implementações com *smartphones*
2013	Padilha, Dullius e Quartieri,	Construção de fractais	Proposição de atividades para averiguar o conhecimento prévio dos estudantes

Tabela 1: Síntese dos trabalhos selecionados (continuação).

Ano	Autor(es)	Temática/Ensino	Contribuições
2014	Gobbi e Leivas	Perímetros e áreas de Figuras geométricas planas	Análise das implementações com *smartphones*
2015b	Bairral Assis e Silva	Investigação do uso de dispositivos *touchscreen* para o ensino aprendizagem geométrica	Seleção do aplicativo para *smartphone*; Análise das implementações com *smartphones*
2015	Silva S.	Construção de conceitos	Análise das implementações com computadores

Fonte: Elaboração própria.

As contribuições destacadas trouxeram elementos que se constituíram em ferramentas de análise e desenvolvimento da pesquisa. No que segue, se faz necessário algumas reflexões para o uso dos computadores e *smartphones* com AGD, com ênfase ao ensino da geometria.

CAPÍTULO II – COMPUTADORES, *SMARTPHONES* E GEOMETRIA

Neste capítulo apresentamos um breve percurso histórico dos computadores com geometria dinâmica chegando aos ambientes *touchscreen*. Apresentamos também o ambiente escolhido para a realização da pesquisa e algumas contribuições ao ensino e aprendizagem. Por fim, destacamos algumas reflexões sobre o ensino de Geometria.

2.1 Um Clique na Educação: Projetos e Ferramentas

Nos dias atuais parece-nos mais do que válida a premissa de que em um mundo permeado pelas TIC, sua implementação torna-se essencial ao processo de ensino e aprendizagem. No entanto, é possível perceber que a incorporação dessas tecnologias como recurso didático não correspondeu, *a priori*, às expectativas de seus entusiastas. Um exemplo que elucida essa tese é o uso dos computadores na educação. Embora promissor, não houve um avanço significativo em relação à implementação da informática ao processo de ensino e aprendizagem, este como instrumento com a capacidade de mediar e auxiliar o trabalho docente na produção de conhecimento, ainda que tenham ocorrido inúmeras tentativas de efetivar seu uso no âmbito educacional.

No Brasil, ainda na década de 1970, algumas universidades como a UFRJ, UFRGS e UNICAMP começaram a fazer as primeiras experiências com a introdução do computador na educação, conforme sinalizam Almeida e Valente (1997). Embora não seja o foco deste trabalho, enumeramos alguns programas que foram criados com o objetivo de promover o uso da informática na educação. Nesse enfoque, Borba e Penteado (2007) destacam que a iniciação da informática no Brasil teve início com diversas ações governamentais, por exemplo, os programas EDUCOM, FORMAR e PRONINFE. Esses primeiros programas foram elaborados com o objetivo de estimular e promover o uso de tecnologia informática nas escolas brasileiras. Vale evidenciar que esses projetos surgiram a partir de 1981 e a experiência acumulada em ações diversas embasaram o PROINFO, Programa Nacional de Informática na Educação, que visa apoiar e estimular a aplicação da informática nas escolas de nível fundamental e médio.

Como podemos perceber é de longa data a tentativa de introduzir a informática na educação. Mais recentemente, *tablets* e *smartphones* se configuram como ferramentas promissoras ao processo educacional no que tange à implementação das TIC em sala de aula. O que ampara essa afirmação é o fato de que estes aparatos são cada vez mais constantes no dia a dia, em afazeres diários, e estão cada vez mais presentes nas salas de aula por intermédio dos próprios estudantes.

Antes de aprofundarmos a discussão em relação às possibilidades de implementação de atividades com esses recursos, seja em ambientes informatizados (computadores), seja com *touchscreen* (em particular o *smartphone*), vejamos como se desenvolveu o cenário da criação de ambientes informatizados com a capacidade de contribuição ao processo de ensino e aprendizagem, mais especificamente no aprendizado matemático através da geometria dinâmica, chegando aos dispositivos *touchscreen*.

2.2 Ambientes Para Computadores e Tecnologia *Touchscreen*

Em um âmbito global destacamos que as experiências ligadas à evolução da informática, como o aparecimento de ícones na tela do computador e uma nova forma de manusear (manipulando objetos direto na tela do computador, via *mouse*), inaugurou uma nova etapa do uso da informática na sociedade, com uma forma mais simples e dinâmica, o que favoreceu a criação de ambientes informatizados propícios para investigação em Educação Matemática, se apresentando como uma nova possibilidade para o ensino e aprendizado matemático (SILVA, G., 2012).

Com essa nova possibilidade, dois *softwares* deram início à geometria dinâmica em ambientes informatizados: o *Cabri-Géomètre*[18] e o *Sketchpad*[19]. As construções realizadas através desses dois *softwares* e outros que vieram depois como, por exemplo, o régua e compasso (C.a.R)[20], possibilitaram ao usuário modificações através da manipulação, mantendo suas propriedades. Alves e Soares (2003, p.4) explicam que “[...] o termo geometria dinâmica foi inicialmente usado por Nick Jakiw e Steve Rasmussen da *Key Curriculum Press, Inc*. com o objetivo de diferenciar este tipo de *software* dos demais *softwares* geométricos”, o que popularizou o termo *Geometria Dinâmica*. Entretanto, o termo não está ligado ao uso exclusivo de ambientes informatizados. O uso de materiais manipuláveis, de um modo geral para o aprendizado geométrico, compõe o que conhecemos por uma geometria não estática, ou seja, dinâmica.

Com o desenvolvimento da informática e a criação de novas possibilidades para o uso educacional da geometria dinâmica (ainda em ambientes informatizados), é possível encontrar

[18] Disponível em <http://www.cabri.com/fr/>. Acesso em 13 jul. 2015.
[19] Disponível em <http://www.dynamicgeometry.com/>. Acesso em 08 jul. 2015.
[20] Disponível em <https://sourceforge.net/projects/zirkel/>. Acesso em 10 jul. 2015.

na literatura as primeiras aparições do termo *Ambientes de Geometria Dinâmica* (AGD), mesmo que atualmente também seja comum encontrar alguns autores que se refiram a *softwares* de geometria dinâmica ou simplesmente geometria dinâmica. Observamos que essa mudança na terminologia vem de encontro com as ideias de Borba *et al.*,(2014). Para os autores a mudança na terminologia está ligada ao surgimento de inovações tecnológicas. Essa modificação é perceptível, por exemplo, em tecnologias informáticas[21] (quando se pensava exclusivamente em computadores) para tecnologias digitais (em que esse termo é mais amplo e contempla uma gama de aparatos, sejam eles físicos ou virtuais).

Já no início do século, Gravina (2001, p. 82) sinalizava que "[...] os ambientes de geometria dinâmica são ferramentas informáticas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem". Nessa mesma época houve uma grande disseminação da utilização da Internet no campo educacional, o que ampliou as possibilidades da geometria dinâmica. Como exemplo apresentamos o *software* Tabulae[22] desenvolvido na UFRJ. De acordo com Alves e Soares (2003) o Tabulae possibilita a utilização compartilhada e a geração de *Applets* através de uma rede local ou pela Internet. Nesse enfoque, observamos que com essa nova possibilidade, de transição de ambientes, torna-se mais propício o termo Ambientes de Geometria Dinâmica.

Atualmente, o termo AGD vem de encontro a uma nova possibilidade para o ensino de geometria mediante ambientes ainda pouco explorados: a construção e a manipulação de objetos geométricos via dispositivos *touchscreen* (por exemplo o *Sketchometry*[23], o *Geometric Constructer*[24]e mais recentemente o GeoGebra[25] com versões para *tablets* e *Smartphones*).

De acordo com Bairral (2013), realizar uma construção mediante manipulação por meio de toques direto na tela (em ambiente *touchscreen*) é diferente de uma construção realizada através do clicar (*mouse*). Ainda, de acordo com o autor, essas duas ações possuem diferenças no que se refere a ação-reação. Interações a partir da forma de manipular o *software* através do toque direto na tela acontecem por meio de "[...] seis ações básicas com os dedos: tapa (pancadinha, batida, golpe leve) duplo tapa, longo tapa, arrastar, mudança de tela, e múltiplos toques (girar, rotacionar)" (BAIRRAL, 2013, p. 3).

A utilização de um AGD por meio de ambientes *touchscreen* podem facilitar o trabalho docente através da utilização de dispositivos móveis (BAIRRAL, 2013) e se

---

[21] Grifo nosso
[22] Disponível em <http://www.limc.ufrj.br/site/projetos_tabulaecolaborativo.html/>. Acesso em 08 jul. 2015.
[23] Disponível em <http://en.sketchometry.org/index.html. />. Acesso em 15 abr. 2015.
[24] Disponível em <http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc_html5e//>. Acesso em 10 jul. 2015.
[25] Disponível em <http://www.geogebra.org//>. Acesso em 20 jan. 2016.

apresenta como uma nova maneira de se pensar o ensino da Geometria a partir das TIC, isso principalmente se comparado ao uso do computador, que historicamente tornaram-se limitados devido à utilização de equipamentos caros e mantidos em ambientes controlados (UNESCO, 2014), o que geralmente acontece em um laboratório de informática com horário e regras de uso pré-estabelecidas.

Ao contrário da via de mão única, no caso dos computadores, dispositivos com tecnologia *touchscreen*, como *tablets* e *smartphones*, podem ser utilizados dentro da sala de aula ou em espaços menos convencionais (MOURA, 2011), facilitando o planejamento, o tipo de atividade a ser implementada, a organização da turma, além de ser algo que faz parte do uso diário dos estudantes, agregando o interesse na participação em atividades em que estes recursos sejam utilizados como fio condutor.

Destacamos que a mudança ou utilização de uma nova terminologia constituiu alguns passos da evolução da forma de pensar, além de propor atividades com geometria dinâmica. É claro que o computador não substituiu as dobraduras ou os blocos lógicos e tampouco o toque na tela eliminou o clique, no entanto, novas formas de ensinar geometria instigam investigações acerca de suas contribuições e desafios para inserção em situações de ensino.

2.3 *Smartphones:* Uma Nova Possibilidade Para Sala de Aula

Sob a perspectiva do avanço tecnológico que permeia a vida cotidiana, existe um grande questionamento em relação à dicotomia entre esse avanço e a falta de inserção das TIC em sala de aula. Muito provavelmente, boa parte das escolas ao redor do mundo apresenta um modelo tradicional que, em muito, se assemelha com um modelo de, pelo menos, um século atrás. Embora seja tentador questionar o que pode ser feito para reverter essa situação, não temos o enfoque e não conseguiremos responder outros questionamentos que possam surgir dessa indagação.

Dessa forma, nossa intenção é apenas apresentar uma nova proposta que pode amenizar esta situação, ao ser agregada à prática docente, com possibilidades de contribuições ao aprendizado, em particular, o aprendizado matemático.

Essa nova possibilidade, que constitui parcialmente nossa investigação, está no uso do *smartphone* como recurso pedagógico – cada vez mais presente nas salas de aula por intermédio dos estudantes – com probabilidade, de contribuição para construção de conhecimento.

Göttsche (2012) explica que em relação à inserção de um dispositivo móvel em situações de ensino, é necessário identificar potencialidades e limitações do recurso com objetivo de dar ao seu uso o teor adequado a fim de proporcionar um ambiente favorável para que ocorra aprendizagem.

De acordo com Bairral *et al.* (2015) a implementação de recursos diferentes na realização de uma tarefa, apresenta uma contribuição para o desenvolvimento da capacidade cognitiva. Nesse sentido o *smartphone* se assenta com um enorme potencial, seja pelo seu apelo instigador, seja pela gama de possibilidades proporcionada para o uso em sala de aula (MOURA, 2011), por exemplo, a utilização de um AGD para o aprendizado geométrico.

Nessa perspectiva, o uso do *smartphone* como recurso e ferramenta com potencial de aguçar a curiosidade dos estudantes pode promover a criticidade e a autonomia por intermédio de atividades investigativas, agregando significados e contribuindo para uma aprendizagem mais eficiente (BAIRRAL *et al*., 2015).

A seguir elencamos algumas características do *smartphone* com possibilidades de contribuição para realização de atividades em sala de aula.

- Devido à mobilidade pode ser incorporado mais facilmente às práticas de sala de aula;
- Pode estimular a curiosidade e a motivação na realização das atividades;
- É um repositório das mais variadas ferramentas para o ensino de matemática;
- Pode ser utilizado pelo seu próprio dono, o que dispensa o laboratório de informática e não precisa de conexão à Internet.[26]

Entretanto, essas características não eximem o professor de elaborar um plano de trabalho que seja compatível com o perfil dos alunos a que se destina o desenvolvimento das atividades. Pelo contrário, uma proposta que não seja compatível com os estudos pode desestimular a curiosidade e o interesse dos estudantes. Cabe salientar que a proposta apresentada pelo docente deve ter os objetivos bem delimitados, pois, por ser uma ferramenta de uso cotidiano dos estudantes, há também maior probabilidade de que a atividade perca o foco.

[26] É possível fazer o compartilhamento com os usuários via *bluetooth* através do *MyAppSharer* (um aplicativo de compartilhamento de outros aplicativos para sistema Android). Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.yschi.MyAppSharer&hl=pt_BR>. Acesso em 20 abr. 2015.

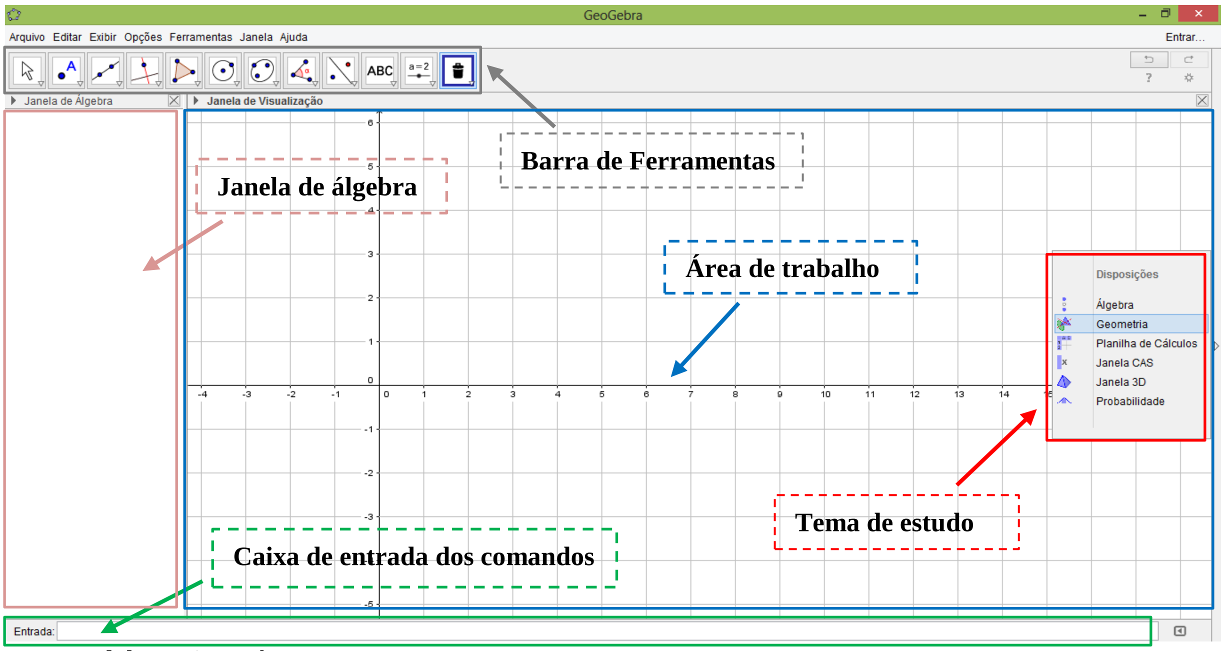
2.4 Um Clique ou Um Toque: Apresentando o GeoGebra

Criado em 2001 por Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburgo (Áustria) e em continuo desenvolvimento na Universidade Atlântica da Flórida (EUA), o GeoGebra é um *software* gratuito de geometria dinâmica que integra Geometria, Álgebra e Estatística.

Neste ambiente, é possível trabalhar desde funções simples ao cálculo de derivadas e integrais, construções de objetos geométricos em duas e três dimensões, além de efetuar cálculos complexos de estatística descritiva e inferência estatística. O *software* também possui uma versão para dispositivos *touchscreen* e o VMTcG (um ambiente virtual colaborativo de construção *online*).

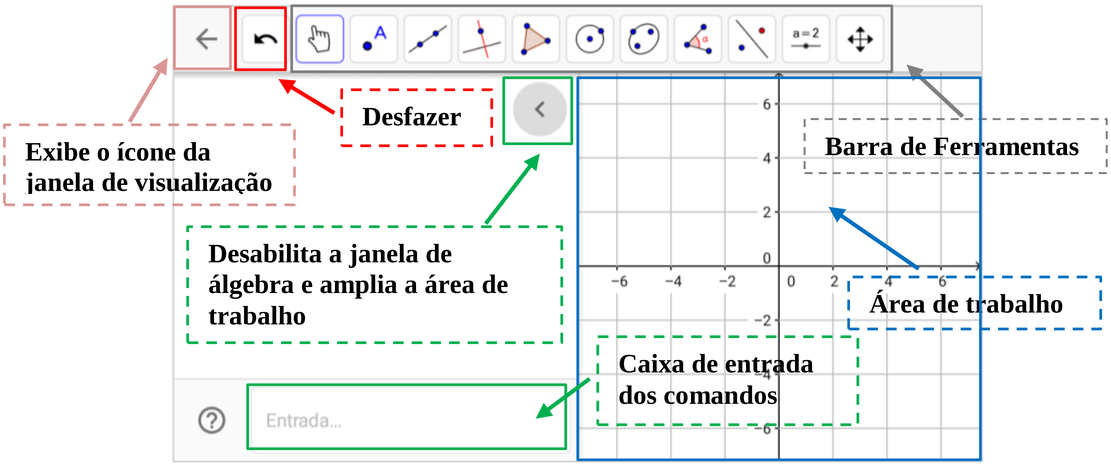
Através do site https://www.geogebra.org/ é possível fazer o *download*, encontrar materiais educacionais, participar de comunidades e obter mais informações através de fóruns, tutoriais e eventos sobre o *software*. A seguir apresentamos a tela inicial das versões utilizadas nessa pesquisa (versão 5.0 para *desktops* e versão 5.0.232.0a para *smartphones*).

Figura 1: Tela inicial do GeoGebra – Versão 5.0



Fonte: Elaboração própria.

Figura 2 – Tela inicial do GeoGebra para *smartphones*



Fonte: Elaboração própria.

Ilustramos algumas características das versões utilizadas em nossa investigação como um convite à construção e implementação de atividades por meio dessa ferramenta. Antes surge, porém, a necessidade de apresentamos algumas contribuições e reflexões acerca de um AGD ao ensino e aprendizado da geometria.

2.5 Ambientes de Geometria Dinâmica: Contribuições ao Arrastar ou Mover

As mudanças na sociedade, provocadas pela TIC, estimulam a busca por novas formas de produção do conhecimento. Este fato vai de encontro a um dos grandes desafios dos profissionais envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, que é tentar minimizar problemas de aprendizado. Uma nova possibilidade para esse desafio em relação ao aprendizado matemático é o uso de AGD.

Em relação às importantes contribuições dos AGD[27], nos pautamos em diversos autores que vem produzindo pesquisas sobre o tema ligado à sua inserção na educação com enfoque no ensino de Geometria. No entanto, antes de prosseguir, acreditamos ser válida a definição de um AGD.

O que é ou quais as características que configuram um AGD? Como destacamos anteriormente o termo utilizado não contempla somente o uso do *software* através da tela do computador. Nesse caso, entendemos por AGD uma plataforma com possibilidades de

[27] Embora algumas pesquisas sejam mais recentes outras nem tanto, optamos em generalizar através do termo AGD - Ambientes de Geometria Dinâmica - mesmo que alguns dos autores citados refiram-se simplesmente a Geometria Dinâmica destacamos que todas contribuições, aqui, apresentadas estão em consonância com a proposta do nosso trabalho.

construção e manuseio de objetos geométricos (mantendo-se suas propriedades ou não, dependendo do tipo de construção), na tela do computador (via *mouse*) ou diretamente no toque na tela em dispositivos com a tecnologia *touchscreen*.

Com o objetivo de elencar singularidades de um AGD, começamos destacando algumas especificidades relacionadas às contribuições. Essa proposta é muito bem destacada por Bairral (2009). Segundo o autor, a utilização de um AGD proporciona a interação entre usuário e TIC; a investigação mediante tentativa e erro; a possibilidade de formulação e verificação de conjecturas e a observação com diferentes formas de visualização e representação (não estáticas) do construto. (BAIRRAL, 2009). O autor também apresenta pontos positivos para a aprendizagem em relação ao seu uso, como a facilidade na construção geométrica, a possibilidade de atividades investigativas e descobertas relacionadas a um determinado conceito, a dinamicidade na visualização e a verificação de propriedades (BAIRRAL, 2015).

Em um AGD temos possibilidades variadas para construções de objetos geométricos. Dependendo do tipo de construção realizada é possível fazer modificações mantendo suas propriedades, o que pode levar o usuário a interagir com o constructo, manipulando, arrastando e modificando (SILVA G., 2012). Essas contribuições também são corroboradas por Meier e Gravina (2012), que acrescentam que a interface interativa do AGD "[...] favorece o espaço para exploração e para experimentos de pensamento" (MEIER; GRAVINA, 2012, p. 2). As autoras ainda acrescentam que a utilização de um AGD possibilita a criação de atividades de investigação.

As contribuições aqui sintetizadas, estão em conformidade com as atividades que implementamos, com teor de investigação em algumas das etapas que compõem a tarefa, como veremos mais adiante. Em relação à ideia de investigação, Ponte *et al.*(2006, p. 83) destacam que a implementação de atividades por meio de um AGD "[...] permite o desenho, a manipulação e a construção de objetos geométricos, facilita a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal".

Uma investigação matemática acontece a partir de um problema proposto com possibilidades de construções de conjecturas e descobertas. Nesse sentido, Borba *et al.* (2014) ressaltam que atividades, cujo a proposta está na construção de objetos mediante o uso de um AGD, propõem a elaboração de cenários propícios para investigação matemática.

Procuramos nesse tópico abordar algumas das contribuições/possibilidades trazidas pelo uso do AGD, no entanto, enfatizamos que em um AGD é possível criar um ambiente que contribua para uma aprendizagem mais efetiva, porém, o *software* por si só não garante o sucesso da aprendizagem. Outros fatores, como a mediação do professor e o tipo de atividade proposta, devem ser considerados.

2.6 Reflexões Sobre o Ensino de Geometria

Este tópico ressalta a importância da Geometria para o desenvolvimento social e cognitivo, destacando a visualização e o desenho (como uma forma de representação) para a aprendizagem geométrica, além de sinalizar dificuldades encontradas no desenvolvimento de um conceito geométrico. Destacamos também o papel do AGD como ferramenta de ensino com possibilidades de minimizar dificuldades identificadas.

Pavanello (2004) apresenta alguns argumentos que justificam a importância de aprender geometria. De acordo com a autora, o aprendizado em geometria possibilita o desenvolvimento da capacidade de generalizar, abstrair, criar e formular conceitos. Diante dessas habilidades podemos destacar o desenho e a visualização como ferramentas essenciais no desenvolvimento do pensamento geométrico.

O desenho como um ente elementar tem função importante para experimentação inicial do estudante além de contribuir na formação de uma imagem mental[28]. De acordo com Pais,

> [...] embora não seja fácil definir formalmente o que seja uma imagem mental, pode-se dizer que o indivíduo tem uma dessas imagens quando ele é capaz de enunciar, de uma forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos (PAIS, 1996, p. 70).

Nesse enfoque, Bairral (2009) destaca que o desenvolvimento do pensamento geométrico possui formas peculiares, tanto na visualização quanto na representação, o que contribui no processo de desenvolvimento conceitual.

Nacarato e Passos (2003) argumentam que a visualização e a representação são dois aspectos interligados e que desempenham um papel fundamental para o desenvolvimento do aprendizado geométrico. Conforme sinalizam as autoras, a visualização e a representação, no que tange ao desenvolvimento do pensamento geométrico, tornam-se entes fundamentais na capacidade de abstrair, estabelecer relações e direcionar o pensamento sobre o objeto (essenciais também para o desenvolvimento cognitivo).

[28] Atribuímos ao termo imagem mental apenas a ideia de construção de Figuras geométricas em relação as suas várias configurações.

As estudiosas também destacam que dificuldades no processo de visualização estão relacionadas à Figura prototípica[29]. Dessa forma, segundo palavras das próprias autoras, “[...] o objeto prototípico ou Figura protótipa (ou estereotipada), sem dúvida, tem sido considerado como um dos grandes obstáculos – tanto didático como epistemológico – para o ensino e aprendizagem de geometria” (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 108).

A pouca visualização de uma Figura pode conduzir a conclusões erradas. Gravina (1996) sinaliza que grande parte das dificuldades encontradas no aprendizado de geometria tem origem na forma estática em que, geralmente, são apresentados os objetos geométricos (representações, desenhos).

Esses argumentos também são reforçados por Dreyfus (1991 *apud* COSTA, 2000) ao destacar a importância da visualização como veículo para o desenvolvimento conceitual. De acordo com o autor o processo de visualização pode acarretar certas dificuldades ao aprendizado geométrico, como erro no discernimento entre um objeto geométrico e sua representação (desenho) e erro na junção entre a visualização e o pensamento analítico.

As dificuldades sinalizadas evidenciam a importância de estratégias de ensino com foco na superação dos obstáculos apresentados. Dessa forma, advogamos pelo uso do AGD como ferramenta pedagógica, com a possibilidade de minimizar essas dificuldades[30].

Em um AGD, as construções não são estáticas, o que pode contribuir para a visualização – propondo novas alternativas diante de uma construção geométrica, como a de modificar ou rotacionar a construção –, a representação e o processo de construção de uma imagem mental acerca do objeto.

Destacamos que a manipulação do objeto construído, seja via *mouse* ou diretamente na tela em dispositivos *touchscreen*, pode contribuir para o entendimento conceitual, o que nem sempre é possível por meio de uma quantidade reduzida de experiências que o estudante tem de um objeto. Por exemplo: na implementação da atividade 1 sobre polígonos regulares, em que iniciamos com o reconhecimento de polígonos regulares dentre vários polígonos que apresentamos, alguns alunos não reconhecerem o quadrado em uma posição diferente do habitual (aquele em que os lados são paralelos as margens da folha) como polígono regular,

[29] No capítulo três aprofundaremos melhor a questão da concepção prototípica.
[30] É claro que o AGD por si só não garante uma aprendizagem mais eficiente. Outros elementos devem ser colocados em jogo, como planejamento, a proposta de atividade, a postura docente (a forma com vai conduzir o trabalho).

enquanto outros associaram uma circunferência como um polígono regular[31], por entenderem regular por algo certo (continuo).

Essa falsa impressão é fruto da pouca visualização e experimentação de um mesmo objeto. Contribuindo com essa discussão, vale trazer Vigotski (2014). Para o autor, quanto maior for o número de visualização e experimentação da criança e quanto mais elementos da realidade estiver ao alcance da criança, melhor será a produção imaginativa da criança (VIGOTSKI, 2014). Além disso, a perspectiva da experiência ajuda a situar não só objetos reais, mas também ideias, sejam estas concretas ou abstratas (DAMÁSIO, 2000).

Kindel (2010) também destaca que é importante que os estudantes sejam submetidos a situações que permitam a experimentação com objetivo de ampliar a capacidade de argumentação, tomada de decisão e conexões lógicas. Dessa forma, para a autora, há a maior possibilidade de abstração de significados e argumentação dos estudantes podendo refletir sobre o seu ponto de vista.

No sentido de romper com essa barreira, a utilização de AGD no ensino da Geometria contrapõem a típica aula de matemática que geralmente inicia-se com uma definição, e segue com aplicação de exercícios e problemas (SANTOS; BAIRRAL, 2015). Dessa forma, os elementos que destacamos (importância, dificuldades e possiblidades) para o ensino e aprendizado geométrico, colocam em destaque a importância do desenvolvimento do pensamento sobre o objeto, como a visualização e a representação, mas também na construção do próprio pensamento. Entretanto, outros elementos devem ser analisados. A seguir apresentamos uma discussão sobre estudos relacionados à construção e formulação de um conceito, assim como a linguagem como ferramenta de mediação.

[31] Um polígono é considerado do tipo regular quando todos os seus lados e ângulos (internos e externos) são iguais.

CAPÍTULO III – CONCEITOS E LINGUAGEM

Apresentamos neste capítulo uma discussão teórica sobre conceitos e algumas ferramentas que utilizamos com o objetivo de conduzir as implementações visando à construção de conceitos geométricos. Começamos destacando algumas formas variadas de conceber a ideia de conceitos, passando pela neurociência, a linguística e a ciência cognitiva. Em seguida enfatizamos a escrita, a argumentação e o diálogo como formas de linguagem e por fim descrevemos as atividades que propusemos como convite à reflexão.

3. 1 Conceitos

Inicialmente, parece-nos plausível argumentar o que estamos propondo ao falar de conceito e quais caminhos transitaremos com objetivo de apresentar uma ideia concreta sobre o assunto. Assim, antes de prosseguir, uma pergunta é essencial: afinal, o que é um conceito? A grosso modo, um conceito está ligado ao entendimento que uma pessoa tem de uma entidade ou uma ideia. Embora essa pareça uma explicação muito óbvia há uma gama de ideias que podemos investigar ao pensar em conceitos.

A primeira forma de conceber um conceito, no campo da neurociência, é a maneira como a mente humana concebe essa criação. Outra e não menos importante, está no campo da linguística com as metáforas que utilizamos no cotidiano por meio das mais variadas formas de comunicação. Existe ainda dentro da ciência cognitiva, estudos dedicado a investigações sobre conceitos. Em nossa pesquisa, estamos olhando a construção conceitual nessas três perspectivas (da neurociência, da linguística e da psicologia cognitiva). Nas linhas seguintes nos dedicaremos a explicar essas ideias.

3.2 Conceitos Primeiros

Do ponto de vista neurobiológico, Damásio (2000) explica que palavras e frases caracterizam eventos, objetos, entidades, ações e relações. O autor também esclarece que palavras e frases representam os conceitos, que por sua vez traduzem em uma ideia não linguística do que vem a ser ações, relações e eventos. O estudioso ainda acrescenta que “necessariamente, os conceitos precedem as palavras e as sentenças tanto na evolução da espécie como na experiência cotidiana de cada um de nós” (DAMÁSIO, 2000 p. 239).

Ainda segundo o mesmo autor, independente da concepção admitida na construção conceitual, a mente humana tem sempre um lugar de destaque nesse processo (DAMÁSIO, 1996). Essa ideia apresentada pelo estudioso está embasada nas interações (organismo-objeto, organismo-organismo) que ocorrem previamente à formulação de um conceito.

A fim de esclarecer melhor essas ideias, vamos pensar no conceito de cubo: certamente palavras e sentenças (sejam metafóricas ou não) servirão de ferramentas para expressar qual o conceito construímos para esse objeto, no entanto essas ideias serão formuladas de forma não linguística, inicialmente, na mente a partir das interações que tivemos com o objeto. Essas interações desencadearão um novo tipo de interação (organismo-organismo) para construção de imagens[32], que será formulada de acordo com o tipo de experiência que tivemos ao manipular ou visualizar um cubo.

Alguém que pensou no cubo mágico, por exemplo, poderia dizer que é um objeto colorido composto por vários cubinhos de tamanhos iguais, alguns de mesma cor, sendo que os de mesma cor compõem uma das seis faces, etc., entretanto um professor de matemática poderia até pensar no cubo mágico, mais muito provavelmente, classificaria o objeto como um hexaedro regular em que todos os polígonos que constituem as faces são quadrados, e poderia até acrescentar que este é um dos sólidos de Platão, etc. além de formar uma rede de teorias sobre o objeto, como as possíveis retas paralelas, concorrentes ou transversais que existe no imaginário.

Uma ideia interessante que vai de encontro a essa compreensão pode ser apresentada a partir da rede de significados construídos por outras palavras, conceitos, sons, odores e imagens que associamos e construímos na mente ao pensar em uma determinada palavra (LÉVY, 2010). Em suma o que estamos colocando em jogo é que a gênese[33] de um conceito é formulada na mente a partir das interações, e o conceito que formamos de uma entidade está entrelaçada ao tipo de interação que realizamos com esse objeto. Essas interações evocam as imagens que constituem a ideia não linguística que temos de um objeto ou entidade.

Nesse sentido, entendemos que parte do conceito que construímos sobre algo está ligado também ao contexto em que este está inserido, assim vale trazer para discussão os aspectos que os conceitos metafóricos assumem na formulação do próprio conceito.

---

[35] Segundo Damásio (2010, p 97 - 99) as imagens nas nossas mentes são os mapas instantâneos do cérebro para tudo e mais alguma coisa, dentro do corpo e à sua volta, tanto concreto como abstrato, do presente ou daquilo que foi anteriormente gravado na memória, [...] as imagens representam propriedades físicas de entidades, e as suas relações espaciais e temporais, bem como as suas ações.

[33] A fim de esclarecer o leitor mais crítico, destacamos que a ideia de **gênese do conceito** que empregamos está relacionada a primeira forma de construção de um conceito (com conexões, interações) todas diretamente ligadas ao cérebro, o que coloca a ideia no âmbito da ontogênese, já que a filogênese analisa o processo histórico da evolução humana.

3.3 Conceitos Como Metáforas

As metáforas fazem parte da vida cotidiana e normalmente são caracterizadas através da linguagem, mas de modo análogo, também é possível afirmar que as metáforas compõem nossos pensamentos e ações (LAKOFF; JOHNSON, 1980). Nesse sentido procuramos identificar o uso das metáforas na construção conceitual.

De acordo com Lakoff e Johnson (1980) a essência da metáfora é entender, dizer e experimentar uma ideia expressa por meio de outra. Assim o conceito e a linguagem se estruturam metaforicamente. Os autores argumentam que a metáfora não está ligada somente ao ato da linguagem, mas no processo de pensamento humano que, em grande parte, são metafóricos, o que os autores sustentam é a ideia de que o sistema conceitual humano está organizado e se define a partir do uso metafórico. Dito de outra forma, antes de formularmos o conceito para uma entidade estruturamos e organizamos o conceito de forma não verbal por meio de metáforas. Esses argumentos vão de encontro ao exposto anteriormente quando (DAMÁSIO, 1996) apresenta a ideia de que a mente estrutura nossa construção conceitual a partir de interações.

Do ponto de vista de sala de aula é bem comum o uso de metáforas através da comunicação professor-estudantes e estudantes-estudantes, seja através dos gestos, da comunicação verbal e até mesmo da escrita. Nesse sentido vale trazer novamente Lakoff e Johnson (1980). Para os autores o uso da metáfora é algo que deve ser entendido a partir de uma subcultura. Por exemplo: uma expressão usual de um determinado grupo pode não ser compreendida por outro grupo que não esteja imerso na mesma subcultura.

Por exemplo, na implementação de atividades que realizamos com alunos do 8º ano estávamos interessados em verificar o que os alunos entendiam previamente por concorrente, paralelo e transversal. Observamos que vários alunos não souberam o significado de transversal. Vale destacar que essas palavras não foram apresentadas no contexto da Geometria. Acreditamos que esse fato pode estar relacionado à localidade (subcultura) onde os alunos estão inseridos. Na localidade não há ruas transversais e isso torna a palavra pouco usual e com nenhuma compreensão para os estudantes. Dessa forma, na conceituação usamos um grupo de entidades para representar outras.

A essa altura é possível surgir o seguinte questionamento: é possível ter essa dualidade na Matemática?

Como veremos mais adiante, a matemática, como conhecimento científico, se enquadra em uma concepção específica dos estudos sobre conceitos, a concepção clássica.

Mas para o entendimento de como ocorre a construção de conceitos geométricos através de uma situação de ensino, é valido analisar todas as formas de comunicação a fim de uma melhor interpretação das ideias propostas por estudantes, e ainda que informalmente ou metaforicamente, como eles constroem esses conceitos. Assim, acreditamos que a conceituação metafórica consiste em uma importante fonte para identificar a aprendizagem.

3.4 Três Concepções Sobre Conceitos

A tradição roschiana, que recebe o nome da psicóloga e antropóloga Eleanor Rosch, expoente principal nos estudos sobre conceitos, no interior da ciência cognitiva, inaugura uma história bem recente das investigações sobre conceitos, que pode ser dividida em três etapas, a saber, a concepção clássica, a concepção prototípica e a concepção teórica.

Cada uma das concepções segue uma organização teórica acerca da definição, entendimento e construção dos conceitos (OLIVEIRA, 1999). A investigação das concepções sobre conceitos pode ser dividida em três momentos distintos da história. A concepção clássica marcada pelo período que se estendeu desde Aristóteles até o início da década de 1970 do século XX, momento em que surge a concepção prototípica dos conceitos – marcada pelos questionamentos de Rosch – que dura até o ano de 1985, e a partir deste ponto em diante chegando aos dias atuais temos a concepção teórica, conforme destaca Oliveira (1999).

Nas linhas seguintes faremos uma breve descrição dos pontos principais de cada uma das concepções usando alguns exemplos, no contexto da Geometria, com o objetivo de elucidar melhor as ideias.

3.4.1 Concepção clássica

De acordo com essa visão, um conceito é algo preciso e é construído a partir de uma lista de propriedades necessárias e suficientes para definir uma entidade[34] (OLIVEIRA, 1999). Corroborando com essa ideia Macedo (2002) destaca que a concepção clássica tem por base a existência de categorias organizadas com o que a autora chamou de um tudo ou nada. Dessa forma, para pertencer a um conceito o objeto deverá atender simultaneamente às propriedades necessárias e suficientes que delimitam o conceito. Por exemplo, se possuir ângulos internos

[34] O sentido da palavra entidade, nesse texto, é mais amplo do que simplesmente a essência de algo real, podendo, por exemplo, uma abstração ser considerada uma entidade. Nesse sentido, um cubo mágico ou um polígono (como a representação de algo concreto), constituem-se entidades.

iguais e lados de mesma medida, constitui-se nas propriedades necessárias e suficientes que conceituam um polígono regular, obviamente, que para ser polígono regular, é necessário atender as duas propriedades anteriores e é condição suficiente para que um polígono se enquadre no tipo regular. No entanto, ser um pentágono regular ou hexágono regular em nada interfere no conceito de polígono regular, essas são apenas especificidades de tipos diferentes do conceito de polígono regular. Dito de outra forma, pentágono regular e hexágono regular são casos particulares, exemplos de polígonos regulares.

Esse tipo de definição conceitual que estrutura a geometria euclidiana, e nos chega aos dias atuais, certamente, tem sua origem na matemática grega e “[...] é claramente um pressuposto fundamental da lógica aristotélica, e predominou ao longo de quase toda a história da lógica e da filosofia” (OLIVEIRA, 1999, p. 18).

Mantendo uma relação com os estudos da linguagem, [...] “a concepção clássica manifesta-se no domínio da semântica como o pressuposto fundamental da abordagem [...] que são as propriedades necessárias e suficientes da concepção clássica” (OLIVEIRA, 1999, p. 19).

Nesse enfoque poderíamos, por exemplo, verificar a lexicografia[35] da palavra regular para uma melhor elucidação da forma como essa concepção interfere na nossa forma de conceber os conceitos. Em nossa pesquisa observamos como é marcante a presença dessa concepção. Por exemplo, quando perguntamos aos alunos do 9º ano o que entendiam por polígono regular, os estudantes que responderam, apresentaram atributos como ângulos iguais, lados iguais e linhas retas para caracterizar um polígono regular. Vejamos a próxima concepção.

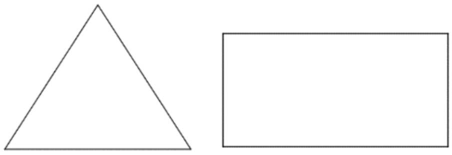
3.4.2 Concepção prototípica

Contrapondo-se a categorização descrita na concepção clássica, embora a concepção prototípica também seja vista como um conjunto de propriedades, Eleanor Rosch contesta a concepção clássica dos conceitos questionando, por exemplo, que “[...] se as categorias são definidas exclusivamente com base em propriedades compartilhadas igualmente por todos os membros, então não deveria haver membros considerados melhores exemplares do que outros [...]” (MACEDO, 2002, p. 90).

[35] Trabalho de elaboração de dicionários e vocabulários. Para maior compreensão do sentido exposto para o termo, ver Sayeg (1999).

A fim de exemplificar propomos ao leitor que feche os olhos e tente construir uma imagem mental para cada uma das seguintes entidades: (1) triângulo e (2) retângulo. Muito provavelmente sua visão estereotipada, ou seja, a atuação da concepção prototípica para essas entidades – que faz com que construamos a ideia de que alguns exemplares são melhores do que outros – tenha te conduzido a representações semelhantes as apresentadas a seguir.

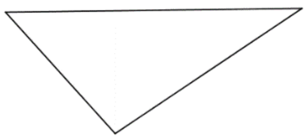
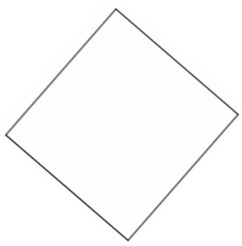
Figura 3 – Representações prototípicas



Fonte: Elaboração própria.

As discussões se encontram justamente na contraposição dessa visão. O que faz com que em um primeiro momento tenhamos, por exemplo, representações como as anteriores? A seguir apresentamos um quadro comparativo com outras formas de apresentar/representar os objetos (entidades) destacados anteriormente e seus respectivos conceitos (ou conjuntos de propriedades que os definem).

Quadro 4– Comparação entre representação e definição

Objeto/representação	**Definição/atributos**
	**Triângulo** – Polígono que possui três lados e três ângulos.
	**Retângulo** – É um quadrilátero cujos ângulos são retos.

Fonte: Elaboração própria.

Considerando que as Figuras atendem os atributos necessários destacados no quadro anterior, muito provavelmente, a maior parte das pessoas não construirão a imagem mental de Figuras com esses formatos. Certamente o número reduzido de experimentações faz com que as representações da Figura 1 sejam melhores exemplares. No entanto, cabe um esclarecimento: não queremos com o exposto afirmar que as representações da Figura 3 estejam erradas, apenas que elas nos limitam em relação a outras representações para a mesma entidade.

A concepção prototípica também considera uma lista de atributos relevantes que um conceito pode ter. Hershkowitz (1994) sinaliza que cada conceito possui um ou mais exemplos prototípicos. Para a autora, os exemplos prototípicos são aqueles que possuem maior número de atributos de um conceito e possuem fortes características visuais (HERSHKOWITZ,1994). Como exemplo, podemos destacar o quadrado, principalmente na posição em que os lados são paralelos à margem da folha, como clássico exemplo de quadrilátero. Em estudo sobre o uso de exemplos na ampliação de um conceito, Zazkis e Leikin (2008) encontraram treze atributos que fazem do quadrado um melhor exemplar de quadrilátero.

Como implicações para o ensino, Hershkowitz (1994) destaca a forma como os estudantes se apropriam dos conceitos geométricos, que segundo a estudiosa, pode ser por meio de uma maneira estruturada com experiências de aprendizagens escolares ou através de situações informais, como na interação com os responsáveis ou com jogos, por exemplo. A autora também apresenta alguns pontos que convergem para formulação de exemplos prototípicos, como: (a) falta de completude, quando há um restrito número de visualizações e atributos; (b) falta de consciência, no caso da falta de elementos adicionais, seja por parte do professor ou do material didático e das dificuldades dos alunos diante da construção de conceitos errôneos; (c) generalização sem reflexão, no caso em que as definições são realizadas tendo o aluno como receptor passivo (HERSHKOWITZ,1994).

Outro ponto fundamental diz respeito de casos limítrofes (OLIVEIRA, 1999). No exemplo anterior é possível identificar o quadrado como um caso limítrofe para o conceito de retângulo. Por exemplo, se ser quadrilátero cujo os quatro ângulos são retos é condição necessária e suficiente para ser retângulo e já que o quadrado atende esses mesmos atributos, obviamente, um quadrado também é um retângulo, o que o torna um caso limítrofe para o conceito de retângulo.

Todas essas constatações trazem importantes implicações ao aprendizado geométrico, o que torna a experimentação, a construção de representações e análise de variadas situações a partir de um mesmo objeto, pertinentes com o objetivo de romper a barreira da representação prototípica. A seguir o terceiro e último caso das investigações sobre conceitos, a concepção teórica.

3.4.3 Concepção teórica

Como uma crítica à concepção prototípica e representando o último marco da tradição roschiana, nasce a concepção teórica. Como observamos anteriormente, ambas as concepções: clássica e prototípica apresentavam um ponto comum, em que os conceitos se estabelecem como um agregado de propriedades. E é justamente nesse ponto que a concepção teórica se difere das anteriores (OLIVEIRA, 1999).

Para concepção teórica, um conceito não é constituído apenas de propriedades, mas sim de uma relação existente entre conceitos, explica Oliveira (1999). Ainda segundo o estudioso, o agregado dessas relações estabelece, entre si, redes que formam teorias. Para o autor, o significado de teorias, nesse contexto, não apenas as teorias científicas, mas as estruturas cognitivas que formam explicações para o que chamamos de senso comum (OLIVEIRA, 1999). É importante destacar, que "[...] o princípio básico da concepção teórica, então, é de que cada conceito deve ser visto como parte da teoria em que se encontra inserido – e de que, na verdade, é elemento construtivo" (OLIVEIRA, 1999, p. 26).

É importante destacar que esses conceitos não terão o mesmo significado para todas as pessoas. Como exemplo, podemos voltar a ideia do cubo que apresentamos anteriormente. Pessoas com conhecimentos distintos relacionados à matemática, por exemplo, construirão redes distintas de teorias.

Um outro exemplo que podemos apresentar está relacionado à dimensão contextual na produção de um conceito. Durante a segunda implementação de atividades que realizamos, perguntamos aos estudantes o que eles entendiam por concorrente. De um modo geral, os estudantes associaram o termo ao comercio, destacando a competitividade entre duas empresas e a disputa entre candidatos que participam de uma prova, como atletismo ou concurso.

Sayeg (1999) explica que a diferença conceitual impregnada a exemplos, como os anteriores, está relacionada a maneira com que cada pessoa forma uma teoria (ou conjunto de explicações) acerca de uma entidade, ou seja, suas interações com o objeto ou o uso de metáforas para atribuir um conceito a uma entidade ou ideia.

Até aqui falamos da construção e estudos sobre conceitos. No entanto, é através do uso da linguagem que o indivíduo desenvolve e compartilha os conceitos que foram constituídos, primeiro, na mente. Nessa perspectiva, faz-se necessário tratar da linguagem como fonte para construção e desenvolvimento conceitual em sala de aula, afinal é por meio da linguagem que os indivíduos se relacionam. Dessa forma, destacamos a seguir os aspectos da linguagem que nos propusemos a analisar as atividades propostas como ponto de partida para a reflexão, fruto da escrita, da argumentação e o diálogo.

3.5 Escrita, Argumentação e Diálogo

A fim de melhor compreender o processo analítico que tem por base o alinhamento entre a escrita, a argumentação e o diálogo como algumas das ferramentas identificadas na construção de conceitos, tanto para polígonos regulares e suas propriedades quanto relações entre duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Oriundo das implementações realizadas no GeoGebra, teceremos, inicialmente, alguns comentários sobre a escrita produzida como fonte de construção do conhecimento matemático, sendo esta, um instrumento potencializador na aprendizagem e na avaliação (POWELL; BAIRRAL, 2006); na argumentação e interação com a tecnologia (SCHEFFER, 2012; 2013) e para o diálogo fruto da mediação pedagógica (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010).

Embora alguns dos questionamentos propostos nas atividades sejam peculiares ao que esta sendo abordado e pode ser entendido como uma escrita fechada, propusemos também questionamentos mais abrangentes e a produção de pequenos textos com objetivo de produzir conhecimento mediante a escrita. A ideia de propor questionamentos que incentive a escrita dos estudantes é apresentada por Powell e Bairral (2006) da seguinte forma:

> [...] quando propomos atividades de escrita na aula de matemática, aplicamos de maneira diversificada um importante princípio pedagógico: o aprendizado é otimizado quando alunos refletem criticamente sobre suas experiências matemáticas, reagindo a situações matemáticas e questões que são pessoais e de seu próprio arbítrio (POWELL; BAIRRAL, 2006, p. 74).

Dessa forma procuramos articular a escrita no decorrer da realização das atividades, a partir dos questionamentos propostos, com o desenvolvimento dos estudantes, procurando incitar a produção do conhecimento matemático nos aprendizes.

Powell e Bairral (2006) apresentam formas diferentes da produção da escrita em uma aula convencional ou na interação à distância. Em uma análise a partir de atividades propostas na sala de aula os autores identificam dois tipos de escrita: a escrita livre e a crônica. Segundo os estudiosos, esses dois tipos de produção apresentam, em sua maioria, funções expressivas. No entanto, enquanto a crônica apresenta comentários sobre a disciplina, como explicações de soluções de problemas, construções de conjecturas e conclusões dos estudantes e serve como resumo, assegurando o que de fato, o estudante aprendeu. A escrita livre é mais simples com caráter menos objetivo, se configurando como um texto mais superficial em relação à crônica, pelo fato de não focar em procedimentos de resolução, mas podendo assumir um enfoque mediador e complementar em relação a crônica.

Outra função importante no uso da escrita para o aprendizado matemático está relacionada à potencialidade da sua utilização no processo de reflexão conceitual. Para os autores "[...] a escrita é uma ferramenta potencial para reforçar essa reflexão conceitual" (POWELL; BAIRRAL, 2006, p. 54).

Em nosso trabalho apresentamos de que forma a escrita tornou-se um instrumento de aprendizagem, servindo tanto ao professor/pesquisador para elaborar o encadeamento das atividades quanto na construção conceitual dos estudantes acerca dos temas de estudo.

Outra importante ferramenta utilizada no desenvolvimento do trabalho e como fonte do processo analítico é a interação em suas várias configurações (professor-estudantes, estudantes-estudantes e estudantes-GeoGebra). Para a interação professor-estudantes e estudantes-estudantes, buscamos subsídios a partir da forma argumentativa em que ocorre as interações. Nessa interpretação vale considerar Scheffer (2012), ao destacar que os argumentos são produzidos como uma forma de viabilizar o pensamento agrupando em níveis mais cognoscíveis para o entendimento. Assim, segundo a autora as conclusões provenientes das experiências são apresentadas pelos discentes de forma consciente a partir das palavras.

Diante desse cenário em que escrita e argumentação são evidenciados a partir do uso do AGD, podemos pensar de que maneira as TIC se inserem nesse contexto com o objetivo de caminhar para o terceiro tipo de interação, estudantes-GeoGebra. Segundo Scheffer (2013) a utilização das TIC assume um papel fundamental no incentivo a argumentação e que é papel do docente incentivar os alunos a argumentarem.

Nesse enfoque, podemos trazer elementos das outras interações, por exemplo, o diálogo como linguagem para o aprendizado matemático, conforme salientam Arlo e Skovsmose (2010). Segundo esses autores o diálogo deve ser entendido como uma espécie de conversação que conduz à aprendizagem. Os autores também destacam que em um diálogo o professor deve propor questionamentos provocativos, ou seja, assumindo uma postura argumentativa (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010). Colaborando com essa visão, Santos (2005, p. 119) destaca que "no ensino e aprendizagem da matemática, os aspectos linguísticos precisam ser considerados inseparáveis dos aspectos conceituais para que a comunicação e, por extensão, a aprendizagem aconteçam [...]".

Dessa forma, a linguagem em um sentido mais amplo, que engloba a escrita, o diálogo e a argumentação (pertencentes à escrita e ao diálogo ou separadamente) pode se caracterizar como uma ferramenta com potencial de se ajustar e situar melhor o uso das TIC na educação.

Pois bem, vejamos agora, as atividades como uma forma de condução desse processo e que se caracterizou como um convite à reflexão.

3.6 Atividades Como um Convite à Reflexão

As atividades que implementamos apresentam os ícones das ferramentas de construção do GeoGebra, juntamente com os questionamentos propostos, com objetivo de tornar a realização da tarefa, no que tange às construções, compreensível e acessível aos estudantes. No que diz respeito ao objetivo principal, aprendizagem geométrica, iniciamos o estudo de cada tema com uma sondagem preliminar a fim de valorizar o conhecimento informal dos discentes e para algumas etapas, que compõem as demais tarefas, procuramos dar um tom investigativo e reflexivo.

A síntese das ideias inseridas na confecção de algumas etapas, visando a provocação e reflexão dos estudantes, tem por base princípios da investigação em matemática (PONTE *et al*., 2006), atividades ricas (GORGORIÓ *et al.*, 2000) e atividades instigadoras (MARQUES; BAIRRAL, 2014). A seguir apresentaremos uma breve descrição dos principais pontos apresentados em cada proposta e como articulamos com a elaboração das nossas atividades.

Uma investigação matemática consiste em um convite à formulação de conjecturas e hipóteses ou verificação de regularidades. Esse convite pode acontecer a partir de um problema ou uma atividade (que pode ser oral ou escrito), explicam Ponte, Brocardo e Oliveira (2006). Para os autores, uma atividade (que pode ser uma aula ou um conjunto de aulas) como propósito de investigação deve ocorrer em três fases, a saber: (a) a introdução da tarefa pelo docente, (b) a investigação, que pode ocorrer, individualmente ou em pequenos grupos, de forma a atender o objetivo da atividade e (c) uma fase final para discussão do grupo acerca dos resultados obtidos e descobertas dos estudantes.

Outra fonte de inspiração para confecção das nossas atividades tem por base a elaboração de atividades propostas por Gorgorió *et al*. (2000) as quais os autores chamaram de atividades ricas. De acordo com os estudiosos, entre outros atributos, em uma atividade rica é possível destacar os seguintes pontos:

- Possuir relação com o conteúdo curricular;
- Se apresentar como uma motivação e introdução para um conteúdo mais elementar;
- Não apresentar respostas diretas, mas permitir aos estudantes formularem novas perguntas;

- Permitir aos estudantes tornarem consciente do aprendizado por meio de reflexões com conhecimentos anteriores e uma compreensão para uma aprendizagem efetiva.

Marques e Bairral (2014) definem como atividades instigadoras aquelas cujo objetivo é motivar o estudante a partir de situações que tenham conexões com a realidade ou se aproxime dela, a partir de problemas, de forma que seja possível estabelecer uma relação entre os conhecimentos já adquiridos a fim de possibilitar novas descobertas.

Os estudiosos elencam quatro características principais de uma atividade instigadora: a averiguação do uso ou aplicação de conhecimentos já adquiridos pelos estudantes; estímulo proporcionado através do interesse em aprender; constitui-se em uma ferramenta com possibilidades para construção do conhecimento e por fim incentiva à reflexão pertinente a verdades matemática (MARQUES; BAIRRAL, 2014). Vejamos de que forma é possível estabelecer uma relação a partir das propostas apresentadas pelos autores.

No contexto da investigação, destacamos que parte de cada atividade que implementamos possui uma essência investigativa, uma vez que buscam possibilitar a descoberta por meio das construções realizadas a partir da experimentação. Para implementação de atividades com um cunho investigativo, julgamos ser necessário iniciar a partir de conceitos elementares ou conhecimentos já vistos pelos estudantes, valorizando seu conhecimento cotidiano, assim como destacam Marques e Bairral (2014).

A proposta de atividades para serem implementadas com o uso do GeoGebra como recurso pode se tornar um ponto convergente entre as atividades ricas (GORGORIÓ *et al.*, 2000) e instigadoras (MARQUES; BAIRRAL, 2014), já que ambos os autores prezam pela motivação. Outro ponto de convergência está na organização das atividades. Em nossa proposta, as atividades estão organizadas de forma a apresentar os objetivos, a série a que se destina[36] a sequência didática. Cabe ressaltar que nosso direcionamento para as atividades apresentadas não está somente para o *smartphone* ou para o uso no computador e sim para ambientes onde podemos transitar com atividades que, embora tenham sido sugeridas para um AGD específico, o GeoGebra, pode ser adaptada para um outro AGD. A seguir elencamos as principais características das atividades que implementamos:

- Assumem um papel de convite à participação e reflexão com possibilidades de descobertas;

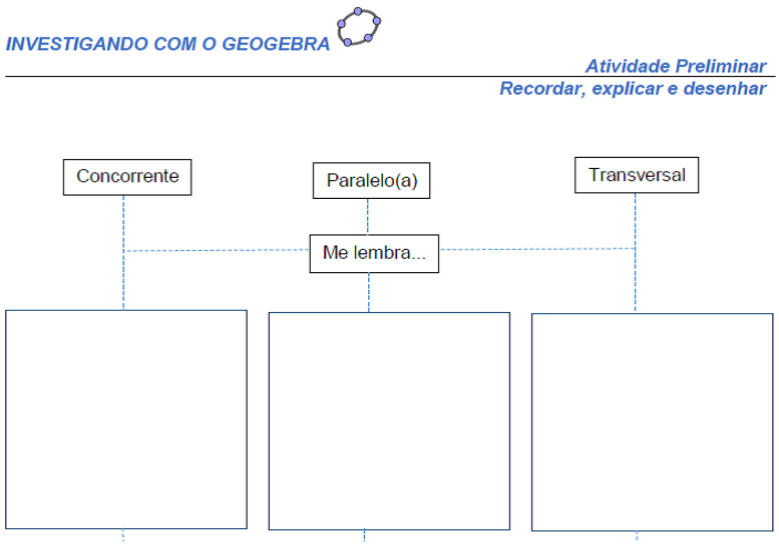
[36] Vale destacar que a sequência didática segue o currículo da Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro, peculiar as séries em que foram desenvolvidas as atividades.

- Motivam por romper a barreira de um modelo habitual de atividade incitando a participação;
- Constituem uma sequência didática dando subsídio para o aluno avançar na medida que relaciona o que sabe com novos conhecimentos.

Apresentados esses pontos, destacamos que nossa intenção é propor atividades que permitam a descoberta, a mediação e o diálogo, como elementos que estão presentes durante o desenvolvimento do trabalho. A fim de melhor esclarecer nossas ideias destacamos etapas de duas das atividades [37] implementadas e tecemos comentários sobre o formato, a implementação e os objetivos.

Na atividade preliminar – *Recordar, explicar e desenhar* (Figura 4), inicialmente a ênfase está no entendimento prévio do estudante, valorizando também a escrita, além de propor um formato não habitual. A atividade seguinte, Duas retas paralelas e uma transversal, o que têm em comum? (Figura 5), além de se constituir em uma sequência didática, tem um cunho investigativo, com um convite à reflexão, a conjectura e a escrita.

Figura 4: Atividade preliminar – retas paralelas cortadas por uma transversal



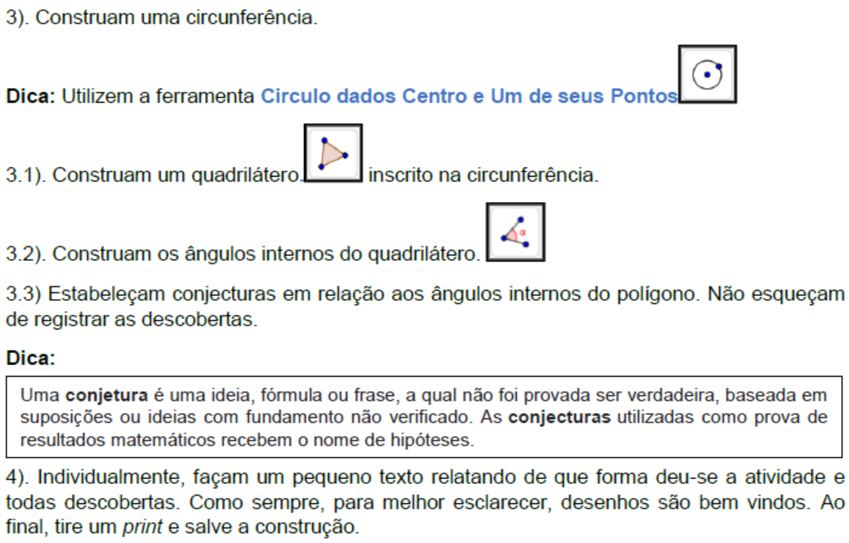
Fonte: Elaboração própria.

Em um primeiro momento é muito comum esse tipo de atividade trazer estranheza ao aluno, já que não é muito habitual. Entretanto consiste em uma oportunidade para o convite à reflexão e também para a reflexão do docente para (re)design e adaptação das próximas atividades, já que o docente poderá colher informações que os estudantes têm previamente sobre o assunto de estudo.

[37] Atividades completas: em Apêndice.

Em nossas implementações, as atividades preliminares se apresentaram como uma excelente oportunidade, tanto para (re)design das demais atividades quanto para construção de conceitos geométricos. A seguir apresentamos uma parte da Atividade 2 em que os estudantes estavam diante de uma proposta de investigação a partir da construção no GeoGebra.

Figura 5: Atividade 2 - Duas retas paralelas e uma transversal



3). Construam uma circunferência.

Dica: Utilizem a ferramenta **Circulo dados Centro e Um de seus Pontos**

3.1). Construam um quadrilátero inscrito na circunferência.

3.2). Construam os ângulos internos do quadrilátero.

3.3) Estabeleçam conjecturas em relação aos ângulos internos do polígono. Não esqueçam de registrar as descobertas.

Dica:

Uma **conjetura** é uma ideia, fórmula ou frase, a qual não foi provada ser verdadeira, baseada em suposições ou ideias com fundamento não verificado. As **conjecturas** utilizadas como prova de resultados matemáticos recebem o nome de hipóteses.

4). Individualmente, façam um pequeno texto relatando de que forma deu-se a atividade e todas descobertas. Como sempre, para melhor esclarecer, desenhos são bem vindos. Ao final, tire um *print* e salve a construção.

Fonte: Elaboração própria.

A parte inicial da atividade consiste na investigação de relações entre os ângulos formados a partir de duas paralelas cortadas por uma transversal. A parte seguinte, que apresentamos da figura anterior, traz uma investigação com enfoque diferente. Se na primeira o estudante deveria descobrir, na segunda aplicar a descoberta anterior. Por fim, salientamos que ambas atividades se constituem como parte de uma sequência didática e convite à reflexão, no entanto, separadamente cada qual tem sua peculiaridade. Enquanto a primeira busca averiguar os conhecimentos prévios dos estudantes a segunda tem um caráter investigativo e reflexivo com possibilidade de conexões com conhecimentos estudados anteriormente.

Procuramos ao longo deste capítulo destacar algumas reflexões sobre a formulação de conceitos, e aspectos inerentes à prática docente, como a linguagem utilizada para conduzir à aprendizagem e o tipo de tarefa. Surgem, então, alguns desafios de ordem prática. Vejamos de que forma organizamos o trabalho.

CAPÍTULO IV – CAMINHOS DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos os caminhos que percorremos para o desenvolvimento da pesquisa, destacando ao longo da caminhada a organização; a experiência piloto, como início do percurso; a metodologia de pesquisa que empregamos; os sujeitos e, de que maneira coletamos os dados a partir das implementações.

4.1 Organização

A presente pesquisa foi motivada sob a perspectiva de explorar o ensino de geometria mediada pela utilização de um AGD – GeoGebra convencional, com atividades implementadas no laboratório de informática e com o GeoGebra para *smartphones* com atividades realizadas em sala de aula – por meio de investigações do processo de aprendizagem de estudantes do 8º e 9º ano do ensino fundamental. Trabalhamos os seguintes conteúdos: polígonos regulares (9º ano) e retas paralelas cortadas por uma transversal (8º ano). Vale ressaltar que a escolha dos conteúdos está em consonância com o currículo[38] da secretaria estadual de educação do Rio de Janeiro.

A análise foi realizada com o objetivo de identificar a construção de conceitos geométricos em uma prática docente que valoriza o diálogo, a argumentação a escrita em uma reflexão investigativa com atividades a partir da utilização do GeoGebra. Com base nessa proposta, temos os seguintes objetivos específicos: (i) verificar contribuições e desafios do uso do GeoGebra convencional e do GeoGebra para *smartphones* ao aprendizado de geometria e (ii) analisar o desenvolvimento e construção dos conceitos geométricos para os temas de estudos. Destacamos, porém, que não temos o objetivo de comparar os dois ambientes utilizados.

Organizamos o trabalho em três grandes momentos: elaboração de atividades, implementação em sala de aula e análise dos dados. Como parte do processo cíclico de construção das atividades, com adaptações na medida em que ocorreram as implementações, destacamos a implementação piloto que se constituiu como uma fagulha inicial propondo novos caminhos para pesquisa, e separamos a análise em dois momentos. O primeiro enfatiza as atividades trabalhadas a partir do GeoGebra convencional (no laboratório de informática) e o segundo, busca evidenciar as contribuições oriundas da utilização do GeoGebra para

[38] Disponível em: <http://conexaoescola.rj.gov.br/curriculo-basico/matematica>. Acesso em 08 ago. 2015.

smartphones. Sobre este fato, já de antemão, destacamos que o segundo momento traz uma dinâmica diferente, já que, embora utilizado em um espaço formal de ensino (a sala de aula), estamos utilizando um aparato não convencional de ensino e que muitas vezes é o estopim de alguns impasses na sala de aula, o que demanda novos olhares por parte do pesquisador. No quadro a seguir destacamos a organização da pesquisa.

Quadro 5 – Resumo dos instrumentos utilizados

	Software	**Número de Atividades**	**Série**	**Instrumentos de Coleta de Dados**	**Conteúdo**
Atividade Piloto	*Sketchometry*	02	8º ano	Folha de atividades e registro fotográfico.	Nomenclatura e propriedades dos quadriláteros.
Implementação 1	GeoGebra Convencional	05	9º ano	Folha de atividades, gravação em áudio e registro fotográfico.	Polígonos regulares
Implementação 2	GeoGebra para *Smartphones*	04	8º ano	Folha de atividades, gravação em áudio e vídeo, captura da tela do *smartphones* de alguns dos participantes e registro fotográfico.	Retas paralelas cortadas por uma transversal

Fonte: Elaboração própria.

4.2 Os Primeiros Passos: Experiência Piloto

Iniciamos a trilhar o caminho da construção da pesquisa a partir de uma atividade piloto realizada na mesma escola onde está inserida a investigação com uma turma do 8º ano do ensino fundamental do ano letivo de 2015, utilizando o *smartphone* para aprender geometria.

O planejamento da aula foi elaborado com os seguintes objetivos: trabalhar a classificação de um quadrilátero em relação aos seus lados e ângulos e verificar a propriedade que relaciona a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo. A atividade aconteceu em duas etapas totalizando quatro aulas de 50 minutos cada.

A primeira etapa (duas aulas) consistiu no compartilhamento[39] e apresentação do *software* utilizado, o *Sketchometry* –AGD no qual é possível fazer construções geométricas em dispositivos *touchscreen* – e um momento para ambientação. Durante a ambientação os estudantes tiveram a oportunidade de fazer o reconhecimento do *software* através da manipulação em algumas construções, como por exemplo, retas e polígonos.

A segunda etapa da atividade iniciou-se com apresentação de um pequeno vídeo[40] sobre quadriláteros (aproximadamente dez minutos – atendendo a especificidade do planejamento) que, além apresentar a ideia do que é um quadrilátero, abordou a nomenclatura de alguns quadriláteros especiais, como quadrado, retângulo, losango e trapézio e a relação entre seus lados e ângulos. Em seguida, os alunos, trabalhando em duplas, receberam uma folha de atividade que propusemos a construção de um quadrilátero, seus ângulos internos e observações realizadas pela dupla.

A proposta teve como objetivo que os alunos verificassem a propriedade comum a todos quadriláteros convexos (soma dos ângulos internos) e em outras etapas, especificidades de alguns dos quadriláteros apresentados no vídeo. No quadro a seguir destacamos o registro fotográfico de duas das etapas descritas anteriormente.

Tabela 2 – Registro fotográfico da atividade piloto.

	Apresentação do vídeo para introdução do conteúdo (quadriláteros)
	Alunos realizando a atividade proposta no *Sketchometry*.

Fonte: Elaboração própria.

[39] Atividade realizada via *bluetooth* por meio do *MyAppSharer*, um aplicativo de compartilhamento de outros aplicativos. Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.yschi.MyAppSharer&hl=pt_BR>. Acesso em 10 mai. 2015

[40] Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=MDovVK3BIHU>. Acesso em: 10 de mai. 2015.

Nessa primeira atividade destacamos o tipo de interação proporcionada pelo AGD. Essa interação em suas várias possibilidades, estudantes-professor, estudantes-estudantes e estudantes-tecnologia encaminhou a pesquisa para novas investigações acerca do uso do *smartphone* em sala de aula. A partir dessas observações nos propusemos a olhar também as contribuições oriundas de implementações no laboratório, além de dar um caráter reflexivo para cada atividade. Sintetizando, destacamos que a atividade piloto apontou algumas contribuições do AGD no aprendizado de geometria e orientou o professor/pesquisador sobre estratégias didáticas e sobre planejamentos informáticos que precisavam ser tomados, sejam no âmbito do ensino, sejam no da pesquisa.

4.3 Dois Toques Metodológicos: Abordagem e Caracterização

Atribuindo à interação um importante papel para o desenvolvimento conceitual e reconhecendo as dificuldades enfrentadas por um pesquisador no que tange à metodologia que abarca e proporciona as ferramentas adequadas, tanto para o desenvolvimento quanto análise do trabalho, utilizamos a pesquisa de *design*, mediante a elaboração de experimentos de ensino[41] (COBB *et al*., 2003). Uma pesquisa de *design* (MATTA *et al*., 2014), como abordagem de investigação, além de trazer um olhar para solução de problemas de ordem prática, se configura com possibilidades de oferecer ferramentas adequadas para avaliar e recriar os passos da investigação a partir do *feedback* de cada intervenção, o que em nosso entendimento nos fornece o suporte para construção e implementação de atividades, fazendo reajustes e adaptações como parte do processo cíclico de reelaboração das atividades, na medida em que desenvolvemos o trabalho.

Para Matta *et al.* (2014) a DBR tem como objetivo investigações cujo fim está em aplicações e no desenvolvimento de soluções de ordem prática para problemas relacionados à educação. Nesse sentido, a utilização da DBR permite a criação de novas formas de trabalho, novos princípios e produtos que sejam uteis não só a pesquisadores, mas a professores em sua prática (DOERR; WOOD, 2006).

Cobb *et al*. (2003) identificaram cinco características essenciais acerca da utilização da DBR como abordagem de pesquisa. De acordo com os autores, a DBR visa:

---

[41] Matta *et al*. (2014) se referem a esta metodologia como *Design-Based Research* (DBR) (ou *pesquisa de desenvolvimento*, como termo que melhor se adequa ao nosso idioma), enquanto Doerr e Wood (2006), pesquisa projeto como uma tradução de *design research.* Devido à grande variedade de expressões utilizadas e a fim de facilitar o entendimento do leitor, em nosso trabalho optamos por utilizar o termo DBR independente da referência utilizada.

- O desenvolvimento de uma classe de teorias sobre a aprendizagem, com meios necessários como suporte à aprendizagem;
- A investigação de melhorias para campo educacional, com utilização de novas formas de aprendizagem;
- As etapas do desenvolvimento da pesquisa assumem uma fase prospectiva e outra reflexiva, com intuito de reavaliar cada implementação;
- Na medida em que há o refinamento novas implementações são realizadas a partir do aprimoramento realizado com as reflexões da implementação anterior;
- As teorias oriundas do processo de experimentação são simples e visam o design das atividades.

A DBR não se configura em etapas rígidas, mas é possível descrever alguns passos que orientam sua utilização. Para Matta *et al*. (2014) a DBR é composta por quatro fases para o desdobramento das investigações. Vejamos: (1) identificação e definição do problema; (2) busca por soluções para o problema; (3) refinamento e novas implementações e (4) uma reflexão sobre o *design* utilizado. Os autores também destacam que o problema em questão deve ser oriundo de uma necessidade prática e com uma solução que beneficie a comunidade envolvida. Nesse processo não há uma rigidez nas etapas, as atividades podem sofrer adequações no decorrer da pesquisa com o objetivo de melhor contemplar o desenvolvimento do trabalho (MATTA *et al.,* 2014).

Dessa forma, a busca por soluções para o problema se constitui em um processo cíclico que ocorre a partir das novas intervenções. Com isso, destacamos o processo de iteração que deve ocorrer a fim de melhor refinar as implementações, uma vez que na DBR apenas uma implementação não trará evidências conclusivas acerca das intervenções. Nessa perspectiva "um estudo DBR deve ter dois ou mais ciclos de aplicação, os quais vão, a partir da análise da aplicação anterior, provocar alterações e refinamentos na intervenção proposta, que assim vai se desenvolvendo [...]" (MATTA *et al*., 2014 p. 9).

Ainda que sucintamente, procuramos na tabela a seguir destacar as fases da DBR no contexto da presente pesquisa.

Tabela 3 – Fases da DBR.

Fases da DBR	Apontamentos para pesquisa
Identificação e definição do problema	O problema de estudo foi identificado a partir de observações realizadas pelo docente, com objetivo de oportunizar os estudantes à uma aprendizagem geométrica mais eficiente.
Busca por soluções para o problema	Implementações de atividades por meio do GeoGebra.
Refinamento e novas implementações	A partir de cada implementação as atividades seguintes sofreram adaptações
Reflexão sobre o *design* utilizado	As análises foram orientadas a partir de observações e fundamentos qualitativos que apontam para reflexões sobre o estudo a partir do *design* utilizado – sequência de atividades, interações, reflexões sobre o estudo e novas intervenções.

Fonte: Elaboração própria.

A etapa de (re)criação constitui-se em um momento de reflexão acerca das implementações já realizadas (MATTA *et al*, 2014), com elementos que podem ser inseridos no (re)design das atividades assim como a identificação de um fator importante em cada implementação. Como desdobramento da pesquisa e fruto das implementações realizadas elaboramos um caderno de atividades para AGD[42] como produto educativo. A tabela a seguir traz um resumo da organização do processo cíclico em que ocorreram as implementações.

Tabela 4 – Processo cíclico utilizado para avaliação e (re)criação das atividades.

Intervenções	Atividade Piloto	Primeira Intervenção	Segunda Intervenção	Próximas Intervenções
Software	*Sktchometry*	GeoGebra Convencional	GeoGebra para *Smartphones*	GeoGebra para *Smartphones*
Conteúdo	Quadriláteros	Polígonos Regulares	Retas paralelas com uma transversal	Em aberto
Número de Atividades	02	06	04	Em aberto
Fator(es) importante(s)	O uso do *smartphone* como recurso em atividades	Potencialidades de um AGD para o aprendizado	*Smartphone* com GeoGebra; propor multitarefas	

Fonte: Elaboração própria.

[42] Nesse caderno sugerimos tarefas para temas que se fizeram presente no decorrer deste percurso, tanto no âmbito da investigação quanto de nossa prática. Além do AGD sugerido com especificidades que buscam auxiliar a realização das atividades direcionamos a proposta ao trabalho docente com orientações para implementação.

Como podemos observar, cada intervenção abordou tópicos diferentes como implementações em formatos distintos. Entretanto, cada intervenção trouxe contribuições tanto na (re)criação das atividades quanto no trabalho docente.

A escolha da abordagem de pesquisa se constitui um desafio, no entanto, ajustar o método que se encaixe nos objetivos da pesquisa não é tarefa fácil. É necessário destacar o posicionamento do pesquisador em relação ao modelo de pesquisa utilizado e de que forma se deu o desenvolvimento. Em nossas análises não seguimos um critério prévio para seleção dos dados analisados. Nos deixamos conduzir por fatos que se configuraram importantes no decorrer das implementações. Por exemplo, o diálogo entre professor e estudantes e os registros escritos apresentados ao longo da análise deram uma característica e interpretação peculiar de cada atividade. Dessa forma, procuramos em cada atividade um foco diferente a fim de tornar mais claras situações que evidenciassem as contribuições e desafios de um AGD.

A linguagem em um contexto mais amplo (registros e diálogos) permearam nossas observações, sempre ressaltando a participação do professor no processo. Assim, entendemos o desenvolvimento da pesquisa como uma observação participante, uma vez que o professor se torna pesquisador, imerso no próprio ambiente da pesquisa. De acordo com Alves e Mazzotti (2001, p. 166, *apud* ALLEVATO, 2008), em uma pesquisa de natureza participante "o pesquisador se torna parte da situação observada, interagindo por longos períodos com os sujeitos, buscando partilhar seu cotidiano [...]".

Vale trazer novamente Allevato (2008). Para autora "um cenário contém fatos que ocorreram, em geral, em momentos diferentes e que tiveram origem nas diferentes formas de registro dos dados: diário de campo, documentos e gravações" (ALLEVATO, 2008, p. 193). Dessa forma, para melhor elucidar as conclusões sugeridas a partir da implementação das atividades vamos, no decorrer da análise, descrever algumas das tarefas propostas ou parte delas, diálogos e excertos (transcrição da resposta ou imagem da folha de atividade) de alguns registros realizados que identificam a subjetividade de cada atividade de acordo com os objetivos propostos e algumas observações dos pesquisadores mediante a implementação e/ou diário de campo. A seguir faremos uma descrição dos sujeitos participantes e da coleta de dados.

4.4 Os Sujeitos

As tarefas[43] foram propostas para duas turmas na qual o primeiro autor é o professor regente. A primeira implementação ocorreu com uma turma de quinze alunos com idade entre 14 e 16 anos do 9º ano do ensino fundamental, durante o ano letivo de 2015, e a segunda com uma turma de quatorze alunos com idade entre 12 e 13 anos do 8º ano, em 2016, ambas de uma escola pública do município de Rio Claro (RJ).

De um modo geral, os sujeitos de ambas as turmas são alunos participativos e durante a implementação das atividades tiveram comprometimento e engajamento, no entanto, é importante destacar que alguns estudantes têm aversão ao aprendizado da matemática se colocando em uma posição de incapacidade e com dificuldade.

As atividades foram realizadas no laboratório de informática da escola através da utilização do *software* GeoGebra convencional (implementação 1) e em sala de aula por meio do GeoGebra para *smartphones* (implementação 2), onde em sua maioria os alunos trabalhavam em duplas e/ou trios e tiveram autonomia para escolher os colegas com quem iriam trabalhar. Vale destacar que para preservar o anonimato dos participantes, durante a análise dos diálogos[44] e registros apresentados, adotamos o seguinte critério para identificação: letras iniciais de seus respectivos nomes e para nomes repetidos as iniciais do nome e sobrenome.

4.5 Coleta de Dados

Para recolhimento dos dados, o pesquisador utilizou gravação em áudio e vídeo; captura da tela do *smartphone* utilizado[45] (implementação 2); folha de atividades com as anotações realizadas pelos estudantes; os arquivos referentes as construções geométricas que foram salvos pelos estudantes em uma pasta específica com o nome da atividade e os nomes dos responsáveis pela construção (implementação 1); registros fotográficos e por último as observações de campo, que foram realizadas em seguida à implementação das atividades ou

[43] Adotaremos no decorrer do texto o mesmo sentido utilizado por Powell e Bairral (2006) para distinguir tarefa de atividade. Segundo esses estudiosos a tarefa é uma elaboração docente que exige reflexão acerca dos objetivos pedagógicos propostos, enquanto a atividade é a realização da tarefa (dinâmica e interativa) condicionada a participação de professores e alunos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

[44] A noção de diálogo que apresentamos é a mesma utilizada por Arlo e Skovsmose (2010). Segundo os autores um diálogo é uma forma de conversação com o intuito de promover a aprendizagem.

[45] Utilizamos o aplicativo AZ *Screen Recorder*. Disponível em: <http://az-screen-recorder.br.uptodown.com/android>. Acesso em 10 out. 2015.

em casos pontuais durante a implementação. Cabe ressaltar que, embora alguns autores como Borba (2004) e Javaroni *et al*. (2011) destaquem a importância do uso da gravação em vídeo à pesquisa em educação matemática, na Implementação 1, por se tratar de uma aula em um laboratório, em que o espaço físico dificultava esse tipo de recurso, optamos por abrir mão dessa ferramenta.

4.6 Um Clique na Primeira Implementação

A fim de apontar peculiaridades de cada um AGD utilizado separamos a análise em dois momentos: atividades com computadores, primeiro momento e atividades com *smartphones*, segundo momento. Como já destacamos, nosso intuito não é o de comparar, mas sim buscar evidências de contribuições e desafios em cada ambiente de acordo com as especificidades e dinâmica de cada um. No quadro a seguir apresentamos uma síntese das atividades do primeiro momento, com objetivos e tempo de duração.

Quadro 6 - Resumo da implementação 1.

Atividades GeoGebra Convencional – Laboratório de Informática		
Atividade/Data	**Objetivo(s)**	**Tempo de Duração**
Atividade 1 22/10/2015	Averiguar o conhecimento prévio dos estudantes sobre polígonos regulares; Ambientação no GeoGebra e Introdução da ideia de polígonos regulares.	100 min
Atividade 2 04/11/2015	Identificar um polígono regular.	50 min
Atividade 2 04/11/2015	Reconhecer características que define um polígono como regular.	50 min
Atividade 3 05/11/2015	Investigar a construção da relação que permite encontrar a soma dos ângulos internos de um polígono regular.	100 min
Atividade 4 11/11/2015	Identificar uma extensão para fórmula construída na atividade anterior	100 min
Atividade 5 12/11/2015	Determinar a soma dos ângulos externos de um polígono regular	100 min
Atividade 6 18/11/2015	Avaliar aprendizado e as atividades mediante a fala dos estudantes.	100 min

Fonte: Elaboração própria.

4.7 Um Toque na Segunda Implementação

Em uma configuração diferente da anterior, as atividades que compõem a Implementação 2 foram realizadas em um ambiente *touchscreen* (GeoGebra para *smartphones*) por meio da utilização dos dispositivos dos próprios participantes: estudantes do 8º ano do ensino fundamental, o que não modifica a ideia inicial das atividades, ou seja, começar averiguando o que os estudantes conhecem sobre os assuntos abordados e a partir das respostas ter um direcionamento para as atividades. Assim, as indagações permearam a fase inicial da implementação. Questionamentos como <u>O que você entende por concorrente?</u> e <u>O que você entende por paralelo?</u> tornaram-se ferramentas importantes no (re)design das atividades.

É importante destacar que iniciar uma atividade introduzindo uma pergunta é algo que os estudantes não estão acostumados. Principalmente quando a pergunta não exige um grau de complexidade, mas é necessário construir uma resposta que atenda não somente o objetivo da tarefa, mas a própria ideia que o emissor tem em relação à palavra ou tema em questão. É possível que o medo em errar cause certo desconforto no estudante que está mais acostumado a primeiro receber a informação para depois responder.

Iniciamos as atividades sobre retas paralelas cortadas por uma transversal apresentando uma atividade preliminar que buscou entender melhor de que forma palavras como concorrentes, paralelo(a) e transversal poderiam estar relacionadas ao cotidiano dos alunos, e como eles visualizavam as mesmas palavras no contexto da geometria, para em seguida realizar as demais atividades que enfatizaram propriedades que puderam ser investigadas a partir de relações entre retas concorrentes, e paralelas com uma transversal.

Em nossa analise destacamos de que forma os alunos **B** e **G** dialogaram, interagiram e desenvolveram as atividades. A justificativa pela escolha da dupla se deu devido ao fato das gravações em vídeo e áudio e a captura da tela do *smartphone* utilizado na realização das atividades propostas foram realizados com os dois aprendizes. Sobre o fato de que em vários momentos a analise prioriza apenas esses estudantes, entendemos com um exercício válido e nos amparamos nas ideias de Ponte (2006). Para o autor a análise de um caso se apresenta como um exemplo, tanto positivo ou negativo, que busca compreender, elucidar, clarear as ideias de um estudo mais amplo. Vejamos de que forma as atividades foram organizadas.

Quadro 7 - Resumo da implementação 2 (continua).

Atividades GeoGebra para *Smartphones* – Sala de aula		
Atividade/Data	**Objetivo(s)**	**Tempo de Duração**
Atividade preliminar 1 19/02/2016	Averiguar o conhecimento prévio dos estudantes sobre as palavras concorrente, paralelo(a) e transversal.	50 min
Atividade preliminar 2 19/02/2016	Averiguar de que maneira os estudantes relacionam as palavras concorrente, paralelo(a) e transversal no contexto da geometria.	50 min

Quadro 7 - Resumo da implementação 2 (continuação).

Atividades GeoGebra para *Smartphones* – Sala de aula		
Atividade 3 25/02/2016	Identificar a relação existente entre os ângulos formados entre duas retas concorrentes.	100 min
Atividade 4 26/02/2016	Identificar relações existentes entre duas retas paralelas com uma transversal	100 min

Fonte: Elaboração própria.

Como podemos perceber, esse caminhar traz a organização e as ferramentas empregadas na implementação e análise. A seguir destacaremos o desenvolvimento de computadores na ação, percepções e análise.

CAPÍTULO V – COMPUTADORES NA AÇÃO

Neste capítulo apresentamos a análise do primeiro conjunto de implementações. Nosso objetivo é evidenciar as contribuições e desafios atrelados ao uso do AGD em computadores. Destacamos os registros escritos produzidos pelos estudantes e os diálogos a fim de apontar indícios para o desenvolvimento conceitual. Para uma melhor compreensão das contribuições e dificuldades apresentadas a partir das implementações realizadas, durante o processo analítico em vários momentos os alunos **E** e **J**, serão nossos convidados, no entanto, a participação de outros alunos também será analisada. A justificativa pela escolha é devido ao fato de que esses estudantes compareceram a todos os encontros, o que em nosso entendimento traz uma maior contribuição à compreensão da dinâmica das implementações, com maior visibilidade a aspectos inerentes a toda proposta. A seguir apresentamos as situações de ensino e episódios que se destacaram durante as implementações.

5.1 Polígono é Toda Forma Geométrica?

Nessa atividade, realizada individualmente, focamos a análise na escrita produzida pelos alunos **E** e **J** a fim de compreender a concepção prévia dos estudantes sobre polígono e polígono regular. Investigamos também a representação utilizada pelos estudantes durante a atividade.

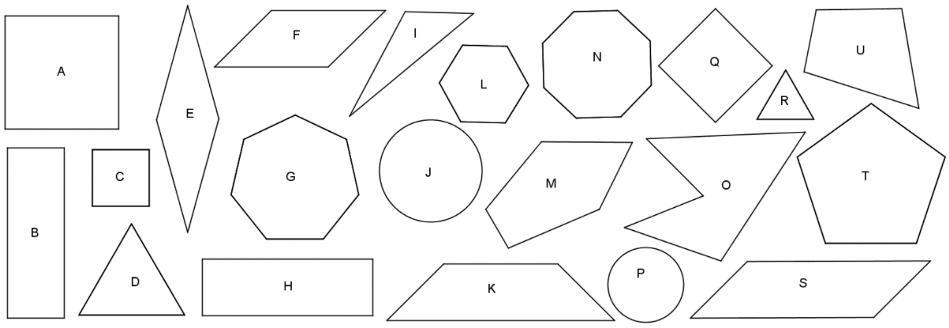
A tarefa um foi dividida em três etapas: (i) identificar o que os estudantes conheciam sobre o tema. Essa etapa foi proposta em forma de um breve questionário com duração de aproximadamente quinze minutos para realização, que além do objetivo descrito buscou apontar um direcionamento para os questionamentos realizados pelo docente durante as aulas; (ii) ambientação para que os alunos se familiarizassem com o GeoGebra, o que durou cerca de dez minutos; (iii) uma atividade para construção por meio do GeoGebra em que os estudantes realizaram medições e responderam alguns questionamentos referente as construções realizadas. A seguir detalharemos cada uma das etapas anteriores.

A fim de explicar a proposta da etapa (i), apresentamos as questões que compõem o questionário respondido pelos discentes e em seguida destacamos as principais observações acerca da realização:

1) O que você entende por polígono? Desenhe, pelo menos, dois exemplos.
2) O que você entende por polígono regular? Faça um desenho.

3) Dentre as formas geométricas abaixo assinale as que você considera polígono regular (Figura 6).

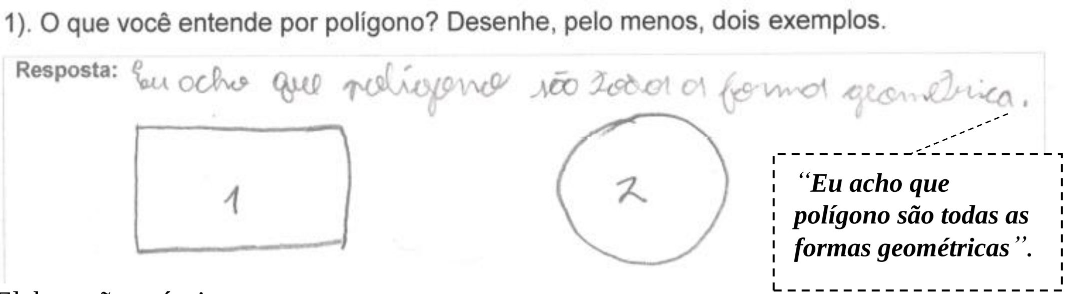
Figura 6 – Reconhecendo Polígonos: Atividade 1



Fonte: Elaboração própria.

A pergunta que nomeia o subtítulo desta sessão está no âmbito das discussões realizadas durante o desenvolvimento da atividade. Na questão um, com base nas respostas dos alunos, observamos que, de modo geral, os estudantes entendem um polígono como uma forma geométrica. No entanto, alguns estudantes conceituam um polígono "o conjunto de todas as formas geométricas[46]". A maioria dos discentes desenhou o retângulo como sendo a representação de polígono. Na Figura[47] a seguir apresentamos a resposta do estudante **J** que desenhou uma circunferência como representação de um polígono.

Figura 7 – Resposta da atividade 1 pelo aluno J (15 anos)



Fonte: Elaboração própria.

É possível que a presença marcante do retângulo no dia a dia dos estudantes, como, por exemplo, a lousa, portas, janelas, o formato de uma quadra de esportes, pode se constituir em um fator determinante para que esta representação se torne um melhor exemplar do que outros polígonos. De acordo com Oliveira (1999) a concepção prototípica estabelece uma

---

46 Todas as respostas foram transcritas na sua forma original.

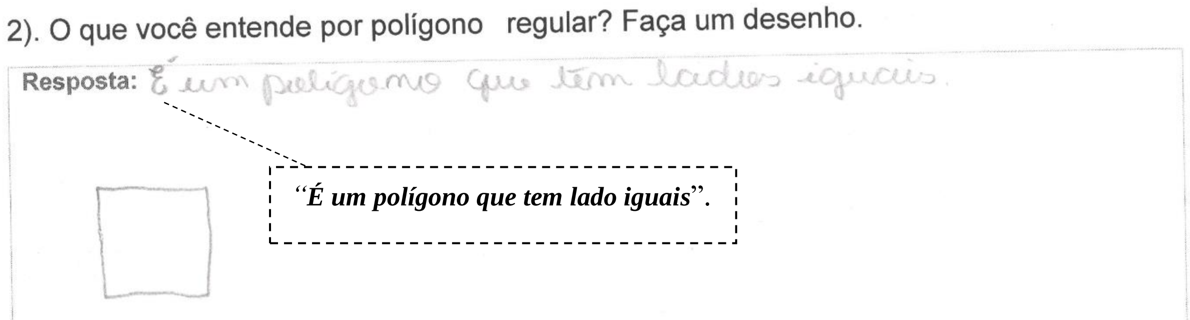
47 Em alguns casos para maior compreensão do leitor apresentamos no corpo do texto, parcialmente ou na íntegra, as respostas dos estudantes. Em outros momentos destacamos as respostas no formato de imagens. Em casos em que as imagens não estão legíveis apresentamos a transcrição ao lado da Figura ou como nota de rodapé.

natureza contínua e gradual aos conceitos. Segundo o autor para cada conceito existem representantes mais ou menos típicos e não existe uma linha óbvia que separa casos exemplares de não exemplares (OLIVEIRA, 1999).

Em relação à circunferência apresentada pelo estudante **J**, é possível extrair duas observações: (a) a presença da circunferência no quadro apresentado aos estudantes pode ter confundido o estudante ou (b) não está muito bem definido para o aluno o conceito de polígono, embora anteriormente ele tenha apresentado um exemplar modelo. No entanto, esse fato carece de averiguações acerca do conceito de polígono utilizado pelo estudante nas demais implementações. A seguir apresentamos como se desenvolveram as demais etapas da atividade.

A questão dois chama atenção pelo fato de que boa parte dos estudantes – mais especificamente oito de um total de doze presentes – responderam que não sabiam do que se tratava ou não se lembravam. No entanto, dois desses estudantes, em seus desenhos, apresentaram figuras que se aproximam de um hexágono regular e um octógono regular. E os alunos que apresentaram uma definição, disseram se tratar de um polígono com lados e ângulos iguais, porém sem descrição no desenho apresentado. A Figura a seguir é a resposta da aluna **E**, que embora seu entendimento esteja incompleto, ela tenta elucidar melhor suas ideias com o desenho de um quadrilátero que se assemelha a um quadrado. Vejamos:

Figura 8 – Resposta da atividade 1 pela aluna E (14 anos)



Fonte: Elaboração própria.

A resposta apresentada sugere uma tentativa da estudante em desenhar uma Figura com lados e ângulos iguais. Na questão três, os polígonos G, L, N e T (Figura 6) foram os mais apontados como regular.

Gravina (1996) sinaliza que grande parte das dificuldades encontradas no aprendizado de geometria tem origem na forma estática em que geralmente são apresentados os objetos geométricos (representações, desenhos), o que acaba de certa forma, conduzindo os alunos a um número reduzido de visualização de um mesmo objeto, reforçando a ideia dos chamados desenhos prototípicos. Essa primeira observação dá indícios de que boa parte dos estudantes analisados não tiveram contato com outras formas de representações de um mesmo objeto geométrico, por exemplo, o quadrado em uma posição diferente da que as bordas estão paralelas a folha.

Cabe ressaltar algumas observações importantes referentes ao tempo de ambientação e a resposta de dois discentes investigados nessa atividade. Embora os estudantes já tivessem certa familiaridade em manipular o GeoGebra (o que aconteceu em outro momento com uma aula sobre o teorema de Pitágoras por meio da utilização do GeoGebra para *tablets*) a dinâmica no computador foi bem diferente e o tempo para ambientação se mostrou essencial para o desenvolvimento das atividades.

Os estudantes que tiveram suas respostas radiografadas[48] serão em outras atividades observados de perto a fim de buscar generalizações sobre o avanço na construção do conceito de polígono regular e as contribuições e desafios do AGD mediante a realização das atividades.

A parte final da aula consistiu nas construções realizadas no GeoGebra. Para tal objetivo os alunos foram convidados a construir polígonos de três, quatro e cinco lados; fazer as medições dos ângulos internos; modificar as construções e escrever duas observações e por último – utilizando a malha da janela de visualização do GeoGebra – foi solicitado que os discentes modificassem os polígonos de forma a ter um polígono de lados e ângulos iguais. Essa etapa teve como objetivo identificar se a parte escrita apresentada pelos aprendizes (atividade inicial) estava em consonância com as construções. Todos os estudantes apontaram o quadrilátero como aquele em é possível fazer modificações de modo a obter um polígono que atende as especificações exigidas na tarefa.

Ao final da aula, o professor levantou alguns questionamentos com base nas respostas dos estudantes, possibilitando, dessa forma, um melhor entendimento sobre polígonos e formas geométricas. Para exemplificar e enriquecer o debate, o docente utilizou o espaço físico da sala de aula a fim de identificar uma representação de polígono por meio de objetos e paredes da sala de aula. O conjunto de propriedades necessárias para definir as entidades foram apresentadas pelos estudantes. Algumas formas arredondadas como a lixeira, os pés das mesas e das cadeiras foram utilizados como exemplos de formas geométricas.

---

[48] Em trabalho com o uso da calculadora para alunos do ensino médio profissionalizante do curso técnico de eletromecânica, Marques e Bairral (2014) implementam atividades e analisam as respostas dos alunos (radiografando) através da interação entre os sujeitos envolvidos para melhor entender o processo de ensino-aprendizagem. Dessa forma utilizamos o termo em sintonia com as ideias dos autores, ou seja, para referenciar uma análise que tem por base a interação e ação do pesquisador sobre o processo de ensino-aprendizagem.

Essa primeira atividade apontou novos direcionamentos para a pesquisa no que se refere ao desenvolvimento das atividades, enfatizou a presença marcante das concepções clássica e prototípica (OLIVEIRA, 1999), além de deixar explícito para os estudantes que nem toda forma geométrica é um polígono.

5.2 Um Clique no Ícone Polígono Regular

No encontro seguinte realizamos as seguintes tarefas: Descobrindo novos polígonos e descobrindo novas propriedades (Atividade 2). A primeira com objetivo de complementar a atividade anterior de forma que os estudantes pudessem identificar as características que define um polígono regular. Dessa forma, foi proposto aos alunos a construção de um triângulo, um quadrilátero e um pentágono utilizando a ferramenta polígono regular do GeoGebra, e em seguida realizassem as medições dos ângulos internos e modificassem livremente os polígonos construídos.

Os aprendizes foram questionados sobre qual observação identificaram em relação as construções da atividade anterior. Todos concordaram que ao modificar o polígono construído os ângulos não alteram. Vejamos, por exemplo, as respostas dos estudantes **J** e **E** em relação as construções da Atividade 1 (utilizando a ferramenta polígono) e Atividade 2 (ferramenta polígono regular):

> Estudante J: ‘‘Eu observei que na aula passada que os polígonos mudavam o ângulo e o lado, e nessa aula os polígonos não mudam os lados e as medidas”.
> Estudante E: “Que nos polígonos da atividade anterior os ângulos poderiam ser mudados e nessa atividade os ângulos dos polígonos permanecem os mesmos”.

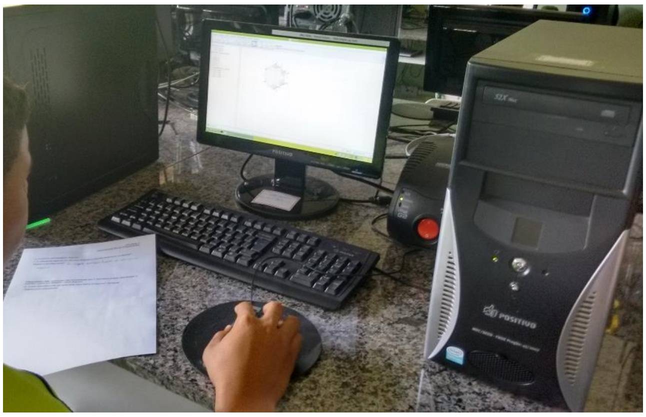
Em seguida, o professor chamou atenção para o fato de que a construção dos polígonos foi realizada por meio da ferramenta polígono regular. Com base no significado da ferramenta utilizada e a reflexão da atividade anterior os estudantes foram questionados sobre o motivo pelo qual os polígonos construídos são classificados como regulares. Vejamos o que disseram os discentes analisados:

> Estudante J: “Chamamos de polígono regular porque os ângulos e os lados não mudam”.
> Estudante E: “Por que as medidas dos lados e dos ângulos são iguais e quando modificamos a Figura os ângulos não mudam”.

As respostas apresentadas sugerem que houve um avanço tanto em relação ao aluno **J** que inicialmente não recordava do que se tratava quanto da aluna **E** que apresentou uma ideia incompleta de polígono regular.

A segunda etapa da tarefa teve como objetivo avançar nos estudos sobre polígonos regulares a partir da identificação de algumas propriedades. Os alunos foram convidados a construir um hexágono regular. Questionamos, inicialmente, se medindo apenas um dos ângulos do polígono seria possível construir os demais, e por último os estudantes foram questionados se o que observaram poderia ser estendido para demais polígonos regulares. A seguir elencamos alguns registros fotográficos que sintetizam a realização da atividade proposta.

Figura 9 – Participação do aluno J (15 anos)



Fonte: Elaboração própria.

Figura 10 – Participação da aluna E (14 anos)

Fonte: Elaboração própria.

Essa etapa foi realizada sem dificuldades e propiciou subsídios para etapa final em que o docente propôs à turma um pequeno debate acerca do conceito de polígono regular. Essa estratégia buscou deixar evidente o que todos estavam produzindo, à medida que as definições foram apresentadas pelos próprios estudantes.

Observamos que, em certa medida, a própria atividade contribuiu para uma conceituação de polígono regular pautada em uma lista de propriedades (concepção clássica), o que de certa forma é bem peculiar da Matemática. Observamos também que a própria natureza do ícone utilizado (polígono regular) facilitou o entendimento, e que as construções realizadas no GeoGebra ajudaram na identificação de polígonos regulares em posições variadas, o que ajuda fortalecer o entendimento conceitual. Nesse enfoque destacamos a dinamicidade e a construção de Figuras geométricas mantendo-se suas propriedades como ferramentas utilizadas na realização das tarefas (MEIER; GRAVINA, 2012) como contribuição do AGD ao desenvolvimento da atividade.

5.3 Um Diálogo Sobre Ângulos Internos

Para compreender o processo de desenvolvimento conceitual a partir do diálogo e da escrita, apresentamos a interação da turma na leitura inicial da Atividade três, e destacamos aspectos inerentes à escrita realizada pelos estudantes em alguns questionamentos que compõem a tarefa.

O objetivo central da atividade foi a identificação de uma relação que permitisse determinar a soma dos ângulos internos de um polígono regular. A realização das etapas que compõem a tarefa buscou dar uma sequência lógica para que à medida que os estudantes progredissem eles pudessem investigar uma relação entre o número de lados e ângulos a partir da decomposição (em triângulos) que pode ser submetida um polígono, seja ele regular ou não. Dessa forma, a partir das construções e experimentações, buscamos facilitar o entendimento e conduzir os estudantes ao objetivo proposto.

A primeira etapa da tarefa teve como intuito evidenciar duas propriedades já conhecidas pelos estudantes – soma dos ângulos internos de um triângulo e a soma dos ângulos internos de um quadrilátero – e a relação entre elas. A ideia que estava implícita foi fazer com que os discentes percebessem que os demais polígonos (construções realizadas na atividade) poderiam ser decompostos em unidades menores (triângulos) o que acarretaria em uma ampliação da propriedade para os demais polígonos.

Destacamos que durante a implementação das atividades anteriores os discentes apresentaram certa dependência em relação ao docente no que diz respeito à autonomia para iniciar e dar continuidade na realização das etapas. O que entendemos como natural, pois os alunos não estavam acostumados com a realização desse tipo de atividade. Dessa forma, com objetivo de solucionar esse obstáculo, o professor iniciou a realização da atividade sugerindo aos estudantes que fizessem a leitura prévia das etapas da tarefa a fim de incentivar a autonomia durante a realização da atividade. No que segue, logo no início da leitura, a estudante **N** não entende a questão (soma dos ângulos internos de um triângulo) proposta e solicita explicação ao professor. Essa iniciativa se constituiu em um momento de reflexão a partir do diálogo que segue entre professor e estudantes. Vejamos o trecho obtido a partir do áudio da implementação:

> Estudante N: Marcos Paulo, como assim? Mas eu não entendi... (Comunicando ao professor que não havia entendido a questão).
> Professor: leitura do enunciado.
> Professor: Quando você soma os ângulos internos de um triangulo... (Procurando esclarecer o que estava proposto).
> Estudante E: 180 graus
> Professor: Quanto?
> Estudante E: 180 graus
> Estudante J: O quê professor?
> Professor: Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer vai dar sempre ...quanto...?
> Estudante J: Igual a 180 graus
> Professor: E o quadrilátero? (Se referindo a segunda parte da questão)
> Estudantes AF, E, F, GA e N: 360 graus
> Professor: Por quê? ... (Houve um breve intervalo sem resposta).
> Professor: Façam um quadrilátero e vamos verificar isso. (Sugerindo uma construção no GeoGebra)

O diálogo retratado até aqui evidencia que os alunos conheciam as propriedades, porém ainda não haviam realizado uma reflexão sobre a relação existente entre as duas. Assim, após algum tempo refletindo a estudante **P** apresenta uma justificativa. Vejamos:

> Estudante P: Duas vezes o triângulo. (Tentando explicar a partir da soma dos ângulos internos do triângulo)
> Professor: Escutaram o que a P falou? Por que é 360 graus?
> Estudante N: Porque é 180 graus mais 180 graus?
> Professor: Por que o quadrilátero tem quantos triângulos?
> Estudante N: Dois. Aí soma ou multiplica por dois.

Dessa forma, a primeira questão da atividade foi concluída com êxito, o que contribuiu para o entendimento nas etapas subsequentes. O episódio selecionado procura enfatizar o engajamento da turma em relação a realização da atividade e a importância do diálogo na atuação docente como processo de mediação e incitação aos estudantes com o objetivo de aguçar a curiosidade. Esse fato é destacado a partir do início da fala e a conclusão de **N** ao final da etapa.

A culminância da tarefa se deu por meio do registro escrito, na folha de atividades, com observações e conclusões dos estudantes. Oportunizar os estudantes à reflexão pode-se tornar um passo fundamental para construção do conhecimento. Para Powell e Bairral (2006) a escrita é uma ferramenta potencializada que tem a função de reforçar e ampliar uma reflexão conceitual.

No quadro a seguir destacamos como os alunos se valeram do diálogo para o entendimento, a partir do registro apresentado para o seguinte questionamento: Existe alguma relação entre o resultado da propriedade para os polígonos descritos anteriormente?

Quadro 8 – Resposta apresentada pelos estudantes: etapa 1 da atividade 3

A e N: Sim. Porque somando 2 vezes 180° do triângulo dá a soma de 360° do quadrilátero. AC e P: A soma da medida de dois triângulos é a medida de um quadrilátero. AF e GA: Dividindo um quadrilátero em dois forma-se dois triângulos. Somando 180° + 180°, que é a medida do triângulo, temos 360°. E e FC: Sim, porque a soma de 2 triângulos terá o resultado de um quadrilátero. F e J: Sim porque as medidas de 2 triângulos 180 + 180 = 360 que é igual a um quadrilátero. GL e R: Multiplicando 180°de um triângulo é igual a 360° do quadrilátero.

Fonte: Elaboração própria.

As respostas apresentadas pelos estudantes após a reflexão inicial apontam para um possível entendimento acerca do que havia sido relatado no diálogo apresentado, sugerindo assim uma efetiva contribuição do diálogo entre professor e estudantes, o que em nosso entendimento ocorre como uma forma de convite para participação da atividade.

A segunda questão da atividade solicitou que os estudantes construíssem um pentágono regular; em seguida determinassem as diagonais do polígono; escolhessem um dos três triângulos que foram criados a partir da construção das diagonais para medir os ângulos internos deste. A proposta desta etapa está em conformidade com a primeira questão, ou seja, com base na decomposição de um polígono em triângulos, cuja soma dos ângulos internos é conhecido, encontrar a soma dos ângulos internos do pentágono. O quadro a seguir destaca a resposta dos estudantes a partir da seguinte proposta: Verifiquem se é possível determinar a soma dos ângulos internos do Pentágono Regular a partir dos triângulos construídos. Se sim, descrevam os procedimentos.

Quadro 9 – Resposta apresentada pelos estudantes: etapa 2 da atividade 3

A e N: Multiplicar 180° da medida interna por 3 vezes. AC e P: Foram feitos três triângulos internos, a soma dos três é de 540°, que foi a soma dos três triângulos. AF e G: Foram formados 3 triângulos inteiros, a soma dos ângulos inteiros foi de 540°. Porque foram somados os ângulos dos triângulos. E e FC: Sim, multiplicando a medida interna dos ângulos do triângulo = 180° por 3, porque o pentágono foi dividido em 3 triângulos. F e J: Multiplica os três triângulos que medem 180° que vai dar o resultado do ângulo inteiro do ângulo inteiro do polígono é 540°. GL e R: Sim. Somamos o valor dos ângulos dos 3 triângulos é igual a 540°.

Fonte: Elaboração própria.

Podemos perceber a partir do quadro anterior que os estudantes conseguiram visualizar a relação entre a construção (pentágono regular) e a decomposição em triângulos para determinar a soma dos ângulos internos do polígono construído. Com o objetivo de consolidar essas observações para uma melhor compreensão conceitual, a etapa seguinte da tarefa fez um convite para que os estudantes investigassem outra maneira de determinar a soma dos ângulos internos do pentágono regular.

O docente procurou incentivar os discentes para que apresentassem um procedimento que se baseasse em propriedades dos polígonos regulares, com a ideia de trabalhar um processo intuitivo mediado pelas observações anteriores dos estudantes. Outra sugestão foi que os estudantes explorassem a dinamicidade do AGD utilizado, fazendo verificação ao final – através da construção do objeto geométrico, seus ângulos internos e a soma destes – e modificando a construção através da função <u>mover</u> para melhor comprovação. Apresentamos as respostas dos alunos:

Quadro 10 – Resposta apresentada pelos estudantes: etapa 3 da atividade 3

GL e R: Multiplicamos o valor de um ângulo do pentágono por 5 que vai ser igual a 540°. AC e P: Um ângulo é de 108°, e outra maneira de determinar a soma é multiplicar 108 por 5, já que um pentágono tem todos os ângulos iguais. F e J: Como um polígono regular todos os ângulos são iguais, a gente só precisou descobrir um ângulo e multiplicar por cinco. AF e GA: O pentágono tem todos os ângulos iguais, medindo 108. Multiplicando por 5 temos o resultado. A e N: Multiplicando o ângulo do pentágono que deu 108° e multiplicamos por 5 que é a quantidade de lados e de ângulos. E e FC: <u>Como o pentágono é um polígono regular seus ângulos são iguais, sendo assim se descobrirmos apenas a medida de um ângulo é só multiplica-lo por 5 devido aos seus ângulos</u>.

Fonte: Elaboração própria.

As respostas no quadro anterior, exceto a resposta em destaque, procuram evidenciar uma maneira de encontrar a soma dos ângulos internos a partir da utilização do GeoGebra como meio de interação na construção do raciocínio. Dessa forma, com base em uma característica específica dos polígonos regulares – ângulos congruentes – os estudantes utilizaram o *software* para determinar um dos ângulos e explicar o processo para chegar à soma de todos ângulos internos. No entanto, a dupla em destaque apresenta um tipo de escrita que sugere uma tentativa de conjecturar o que constataram. A fim de colher mais dados que possibilite melhor entendimento do registro produzido pela dupla apresentamos a etapa final e de que forma o desenvolvimento da atividade pode ser comparada ao exposto pelos alunos. Cabe destacar que nessa etapa foi solicitado aos alunos que calculassem a soma dos ângulos internos para três polígonos regulares: com seis, sete e oito lados. Em seguida os estudantes preencheram uma tabela (Figura 11) que relaciona o número de lados e a soma dos ângulos internos para cada polígono.

Figura 11 – Tabela que relaciona o número de lados e a soma dos ângulos internos de um polígono regular: resposta dos estudantes E e FC.

4.1). A tabela seguinte relaciona o número de lados e a soma dos ângulos internos de alguns polígonos regulares.

Completem a tabela.

Número de Lados	***Soma dos ângulos internos***
3	180°
4	360°
5	540°
6	720°
7	900°
8	1 080°

180°
360°
720°
900°
1080°

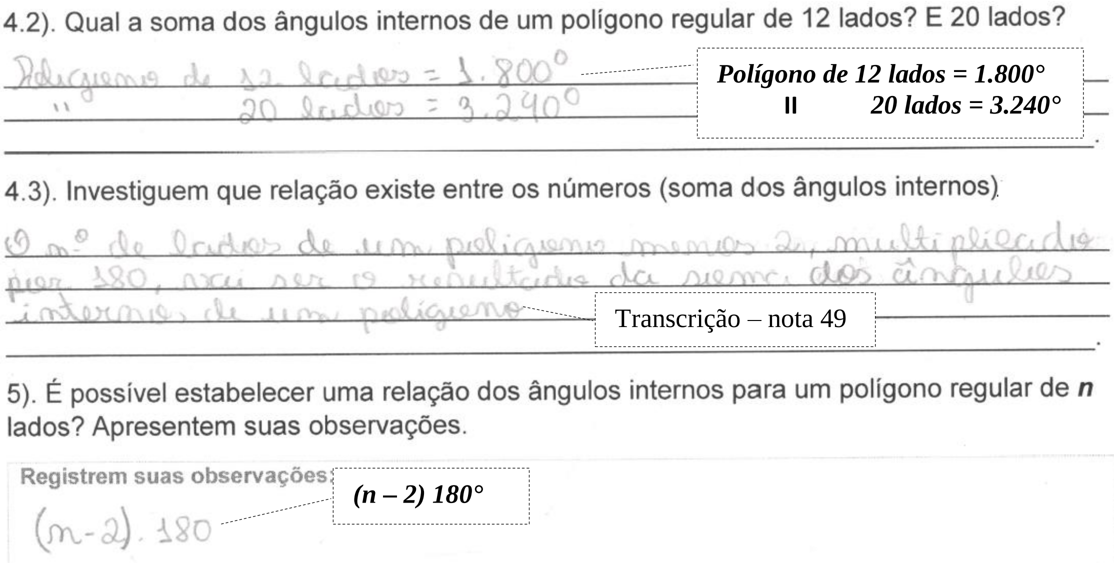
Dica: Procure preencher a tabela a partir de vossas observações na atividade 2.3.

Fonte: Elaboração própria.

O objetivo da etapa foi possibilitar os estudantes a conjecturarem uma relação entre número de lados e a soma dos ângulos internos de um polígono regular. Durante esse processo o professor sugeriu aos estudantes que observassem os procedimentos descritos por eles anteriormente e tentassem relacionar os valores da tabela (número de lados e soma dos ângulos). Dessa forma, a fim criar novos questionamentos a atividade solicitou na etapa final que os estudantes determinem a soma dos ângulos internos de polígonos regulares de doze e vinte lados e por último apresentassem uma relação através das observações para um polígono regular de n lados.

Nessa etapa os estudantes se valeram de dois processos distintos: alguns construíram o polígono e determinaram apenas um ângulo para encontrar a soma e outros construíram o polígono e usam o processo de decomposição em triângulos (se valendo da soma dos ângulos internos do triângulo). Vejamos a resposta apresentada pela dupla **E** e **FC**:

Figura 12[49] – Etapa final da tarefa: Resposta dos estudantes E e FC (ambos 14 anos)


4.2). Qual a soma dos ângulos internos de um polígono regular de 12 lados? E 20 lados?

Polígono de 12 lados = 1.800°
" 20 lados = 3.240°

Polígono de 12 lados = 1.800°
" 20 lados = 3.240°

4.3). Investiguem que relação existe entre os números (soma dos ângulos internos).

O nº de lados de um polígono menos 2, multiplicado por 180, vai ser o resultado da soma dos ângulos internos de um polígono

Transcrição – nota 49

5). É possível estabelecer uma relação dos ângulos internos para um polígono regular de ***n*** lados? Apresentem suas observações.

Registrem suas observações:

(n-2). 180

(n – 2) 180°

Fonte: Elaboração própria.

As respostas apresentadas pelos estudantes dão indícios de que eles compreenderam e construíram um entendimento bastante satisfatório para o que estava proposto. Com objetivo de estabelecer uma relação entre as respostas apresentadas pelos mesmos alunos nas etapas três (Quadro 10) e final (Figura 12) percebemos que a tentativa de conjecturar na primeira é concretizada na segunda.

Nessa atividade percebemos como o diálogo e a escrita podem tornar-se instrumentos potenciais na construção do conhecimento matemático. Essa possibilidade foi concretizada a partir da interação entre estudantes-GeoGebra, promovido através da dinamicidade que o *software* oferece. Destacamos também a argumentação (estudantes-AGD) como um processo de mediação (SCHEFFER, 2012) estabelecida a partir da linguagem (escrita ou oral) torna-se um fator importante na prática docente.

5.4 Construindo Polígonos e Ampliando Conclusões

A atividade analisada teve como objetivo expandir a compreensão sobre a soma dos ângulos internos de um polígono regular para qualquer polígono convexo. Inicialmente foram apresentadas aos estudantes algumas conclusões (respostas escritas apresentadas pelos discentes) obtidas na atividade anterior acerca da soma dos ângulos internos de um polígono regular.

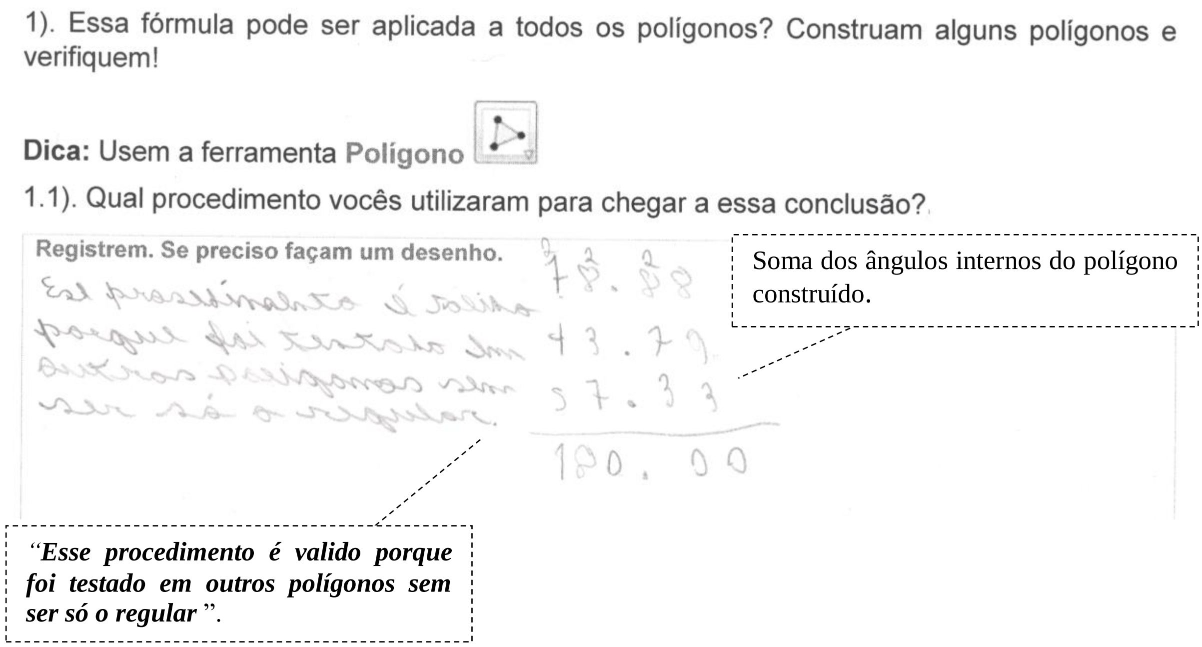
[49] Transcrição etapa 4.3. – Figura 12: *"O nº de lados de um polígono menos 2, multiplicado por 180, vai ser o resultado da soma dos ângulos internos de um polígono".*

A intenção foi que os alunos verificassem que com a mesma fórmula é possível determinar a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer. No entanto, sem falar em prova ou formalização dos resultados as etapas da tarefa convidaram os estudantes a realizar um procedimento similar ao que fizeram anteriormente.

Ao final foi-lhes apresentado um hexágono com dois de seus ângulos internos e questionado se o polígono é regular. Solicitamos que os alunos determinassem a soma dos ângulos internos e explicassem o desenvolvimento apresentado. Essa etapa procurou entender como os estudantes puderam articular o aprendizado sobre polígonos regulares por meio da reflexão produzida mediante a escrita. Vale ressaltar que essa atividade foi um ponto importante, como parâmetro para o desenvolvimento do trabalho, uma vez que nenhuma das atividades anteriores houve a utilização da lousa para explicação de procedimentos.

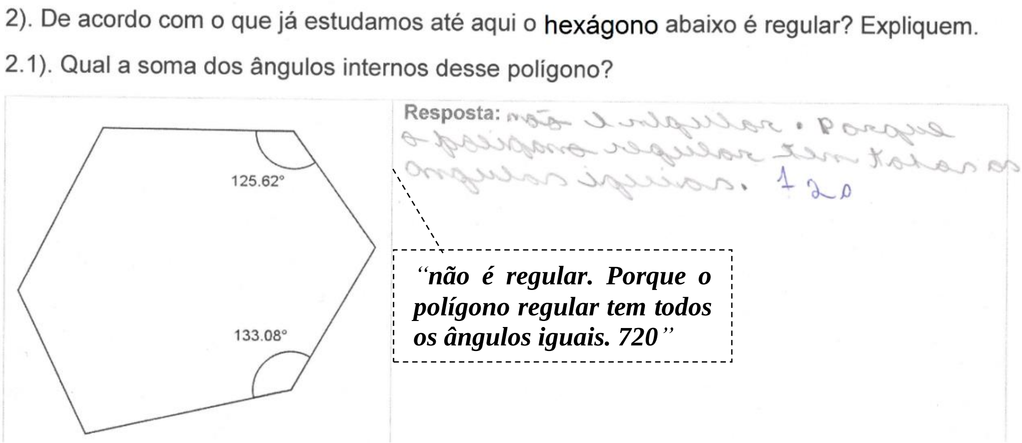
A fim de entender de que forma se desenvolveu a atividade sob a ótica dos estudantes, analisamos uma dupla (**F** e **J)** e um trio de (**A**, **E** e **FC**) de alunos. Focamos na escrita e na contribuição do AGD para as conclusões. A seguir destacamos a resposta dos estudantes para a atividade proposta.

Figura 13 – Análise das respostas dos estudantes J e F na questão 1



Fonte: Elaboração própria.

Figura 14 – Análise das respostas dos estudantes J e F na questão 2

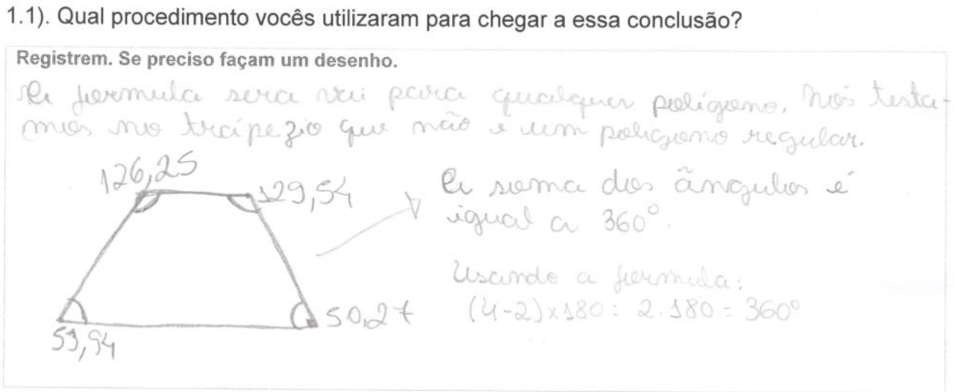


Fonte: Elaboração própria.

Os registros apresentados pelos estudantes **J** e **F** sugere a tentativa de formular uma conclusão a partir das observações identificadas na construção de um triângulo. Pelo menos, esse foi o registro apresentados pelos discentes. No que se segue, os estudantes identificaram corretamente que o hexágono apresentado não é regular, entretanto não está claro a maneira como eles determinaram a soma dos ângulos internos do polígono.

A seguir apresentamos as observações do trio de alunos. Cabe ressaltar que nosso objetivo não é comparar as respostas, mas verificar formas diferentes de apropriação do AGD na construção do pensamento matemático. Vejamos os registros apresentados pelos estudantes **A**, **E** e **FC**.

Figura 15[50] – Análise das respostas dos estudantes A, E e FC na questão 1



Fonte: Elaboração própria.

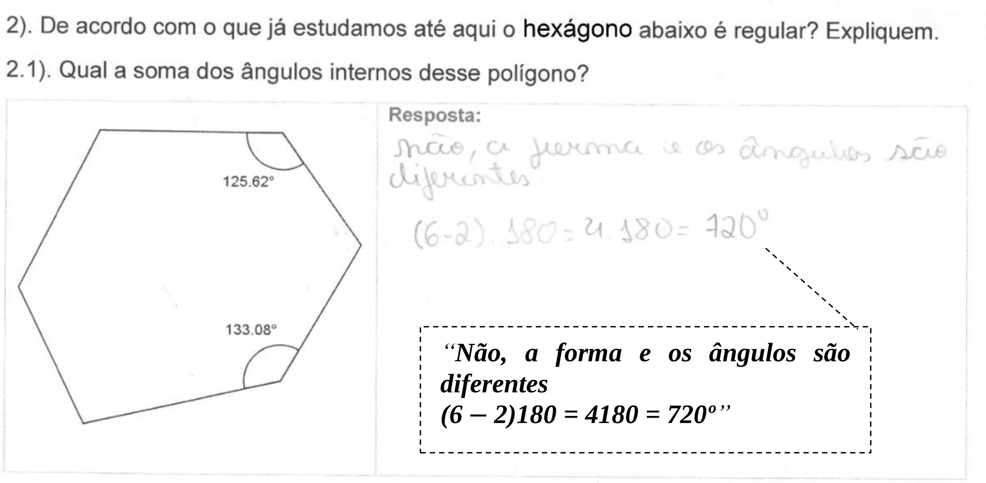
De acordo com a resposta apresentada, é possível perceber que os estudantes se valeram de dois procedimentos distintos. Construíram um trapézio, mediram os ângulos

[50] Transcrição Figura 15: "A fórmula servirá para qualquer polígono. Nós testamos no trapézio que não é um polígono regular" (desenho da Figura com a medida dos ângulos internos). "A soma dos ângulos é igual a 360°. Usamos a fórmula (4 – 2) ·180 = 2 ·180 = 360°".

internos e realizaram a soma, e como segundo procedimento, utilizaram a fórmula. A proposta dos estudantes dá indícios de que a soma foi utilizada como forma de confirmar a veracidade da fórmula.

Na etapa seguinte os aprendizes classificam o hexágono não regular devido ao fato dos ângulos serem diferentes e, aceitando a veracidade da fórmula, fazem uso deste recurso para identificação da soma dos ângulos internos do polígono.

Figura 16 – Análise das respostas dos estudantes A, E e FC na questão 2



Fonte: Elaboração própria.

A situação de ensino que apresentamos evidencia a utilização da linguagem – seja na fala ou na escrita, mas também em um sentido mais amplo, como a representação semiótica – utilizada pelos estudantes para validar suas conclusões. A utilização dessas ferramentas possibilita aos estudantes o desenvolvimento da operação mental no desenvolvimento e construção conceitual sobre polígonos regulares.

De igual importância, destacamos a dinamicidade proporcionada pelo GeoGebra para fazer verificações a partir das construções e modificações dos polígonos construídos. Nessa perspectiva, Silva S. (2015) enfatiza que a interface interativa de um AGD tem o potencial de proporcionar a criação adequada para o aprendizado geométrico. Para o autor, a resposta imediata a partir manipulação de um objeto geométrico direto na tela do computador contribui para o desenvolvimento do pensamento matemático.

5.5 Arrastando Para os Ângulos Externos

A implementação da atividade cinco além de dar continuidade das conclusões da atividade anterior procurou possibilitar aos aprendizes a reflexão acerca do que já conheciam sobre polígonos regulares com intuito de investigar alguma relação que permitisse o cálculo dos ângulos externos de um polígono regular qualquer e expandir a descoberta para os demais polígonos convexos.

A primeira etapa da tarefa propôs que os estudantes construíssem um polígono regular e medissem um ângulo interno e o externo adjacente. Destacamos que embora a elaboração da atividade se apresentasse de forma instrutiva, com o passo a passo e uma ilustração para facilitar o trabalho[51], este foi um processo que demandou do professor orientações aos aprendizes, por se tratar de um processo trabalhoso que exige do usuário o conhecimento peculiar da ferramenta do GeoGebra que permite este tipo de construção.

Superado esta dificuldade, os alunos foram convidados a modificar suas construções e em seguida verificar a soma dos ângulos construídos. A ideia, implícita nessa etapa, foi possibilitar que os alunos observassem que a soma de um ângulo interno com seu externo adjacente resulta em 180 graus (ângulos suplementares).

Na etapa seguinte da tarefa apresentamos o questionamento: A partir de vossas observações sobre polígonos regulares, é possível determinar os demais ângulos externos? Expliquem. No quadro a seguir destacamos as respostas dos estudantes para análise posterior.

Quadro 11 – Resposta apresentada pelos estudantes para atividade 4

GA e M: Sim, porque o polígono regular sempre tem os ângulos iguais.
F e J: Sim é possível, porque os polígonos regular tem mesmo ângulo.
AJ e P: É possível identificar porque todos os ângulos são iguais
C e N: Sim. Porque os ângulos internos são 6 lados. Sendo que o externo cada um mede 60º e o interno 120º.
GL e R: Sim porque todos os polígonos regulares são iguais.
A; E e F: Sim, porque um polígono regular tem os ângulos iguais.
AF e AC: Sim porque é um polígono regular, e as medidas dos ângulos são sempre iguais.

Fonte: Elaboração própria

Com exceção dos estudantes **C** e **N** (resposta em destaque) que direcionaram suas observações a partir do polígono construído, nesse caso um hexágono regular, os demais alunos concordam que existe a possibilidade de determinar os ângulos externos de um polígono regular com base em uma característica peculiar dos polígonos regulares (ângulos internos congruentes).

Nas etapas seguintes os estudantes foram questionados sobre o resultado da soma dos ângulos externos do polígono regular que haviam construído. Sob orientação do professor, todos realizaram a adição utilizando como recurso o campo de entrada para digitação de

---

[51] Ver Apêndice C – Atividade 5

comandos do GeoGebra. Esta foi uma excelente oportunidade para socializar com a turma os resultados obtidos, uma vez que a construção do polígono foi de livre escolha e os estudantes construíram polígonos diferentes.

Ao final, como forma de socializar os resultados, o docente questionou dos alunos qual o resultado da adição dos ângulos externos para os polígonos construídos. Todos apontaram o mesmo resultado (trezentos e sessenta graus) independente do polígono, o que propiciou um excelente momento de reflexão uma vez que as construções, em grande maioria, foram diferentes. Alguns estudantes realizaram mais de uma testagem verificado a soma para polígonos regulares e não regulares.

Um ponto comum foi que os estudantes realizaram modificações a fim de verificar se o resultado continuava o mesmo. Embora não tenha sido utilizado nenhum processo de prova para conclusão apresentada pelos discentes, a experimentação geométrica propiciada pelo manuseio no GeoGebra mostrou-se rico para conjecturas e reflexões. Para Meier e Gravina (2012) os AGD se apresentam como excelentes ferramentas na confecção de atividades de investigação, proporcionando uma organização do processo de aprendizagem na forma de espiral, que ocorre com as etapas de ação, de formulação e validação.

Como observamos até aqui, a construção conceitual de polígono regular e suas propriedades foi mediado pelo uso da linguagem e o uso do GeoGebra. Em alguns momentos optamos pela provocação individual, outras em grupo, sempre incentivando a interação. As provocações formaram as múltiplas entradas com objetivo de proporcionar uma aprendizagem mais eficiente. A seguir apresentamos uma atividade avaliativa que foi elaborada para melhor compreender a aprendizagem geométrica e as contribuições proporcionadas pelo AGD utilizado.

5.6 Um Clique Para Avaliar

A culminância das etapas anteriores ocorreu no formato de uma tarefa um pouco diferente. Tarefa esta que dominamos Atividade avaliativa[52]. Seu objetivo foi possibilitar uma reflexão a partir da produção de um pequeno texto em que os alunos tiveram a oportunidade de tecer comentários sobre seu interesse/motivação em relação aos estudos da Matemática, o que aprenderam durante os encontros, de que forma foram desenvolvidas a atividades, entre

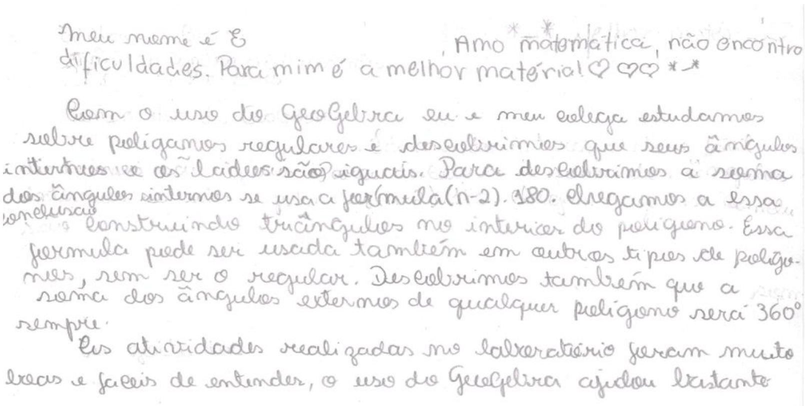
[52] Ver Apêndice A.

outros. Nessa etapa os alunos construiriam um pequeno relatório[53], que seguiu um roteiro para orientação.

Nosso objetivo foi conduzir os estudantes a escrita no formato de crônica. Para Powell e Bairral (2006, p. 19) “[...] as crônicas contêm comentários sobre a disciplina bem como questões e descrições de soluções, conjecturas e descobertas”. Ainda segundo os estudiosos as crônicas podem ser utilizadas para apresentação de novas definições, enfatizar o que foi aprendido e construir uma espécie de resumo além de certificar o que o autor da crônica aprendeu (POWELL; BAIRRAL, 2006).

Em seguida apresentamos um problema rotineiro[54] de cunho reflexivo e que sintetizava o que foi explorado no decorrer das atividades. O que estava implícito com a proposta é verificar se os estudantes já estavam conscientes da aprendizagem obtida no decorrer das etapas. Para melhor compreensão de como se deu este processo, novamente, analisaremos as repostas dos estudantes **E** e **J**. Iniciamos com a resposta do relatório produzido pela estudante **E** (Figura 17), vejamos:

Figura 17 [55]– Relatório elaborado pela aluna E (14 anos).


Meu nome é E , Amo matemática, não encontro dificuldades. Para mim é a melhor matéria! ♡♡♡ *-*
Com o uso do GeoGebra eu e meu colega estudamos sobre polígonos regulares e descobrimos que seus ângulos internos e os lados são iguais. Para descobrirmos a soma dos ângulos internos se usa a fórmula (n-2). 180. Chegamos a essa conclusão construindo triângulos no interior do polígono. Essa fórmula pode ser usada também em outros tipos de polígonos, sem ser o regular. Descobrimos também que a soma dos ângulos externos de qualquer polígono será 360° sempre.
As atividades realizadas no laboratório foram muito boas e fáceis de entender, o uso do GeoGebra ajudou bastante

Fonte: Elaboração própria.

O texto da estudante **E** contém uma breve apresentação, traz a sua motivação e o seu entusiasmo em relação à Matemática. Em seguida faz uma descrição das descobertas, como se

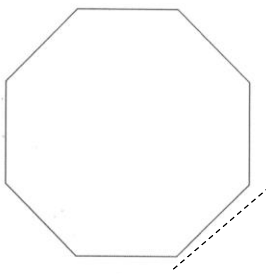
[53] Ver Ponte, Brocardo e Oliveira (2006).

[54] Adotamos como problema rotineiro um exercício, algo que está claro para os alunos de seus procedimentos. Para melhor compreensão ver Polya (2006).

[55] Transcrição Figura 17: “Meu nome é E. Amo matemática, não encontro dificuldades. Para mim é a melhor matéria. Com o uso do GeoGebra eu e meu colega estudamos sobre polígonos regulares e descobrimos que seus ângulos internos e os lados são iguais. Para descobrirmos a soma dos ângulos internos se usa a fórmula (n – 2) · 180. Chegamos a essa conclusão construindo triângulos nos interiores do polígono. Essa fórmula pode ser usada também em outros tipos de polígonos, sem ser o regular. Descobrimos também que a soma dos ângulos internos de qualquer polígono será 360 ° sempre. As atividades realizadas no laboratório foram muito boas e fáceis de entender, o uso do GeoGebra ajudou bastante”.

desenvolveu e a contribuição do GeoGebra durante as atividades. Embora curto, o texto, retrata de forma simples e direta o que foi trabalhado durante as atividades. A seguir analisaremos a resposta da estudante no exercício proposto a fim de entender de que maneira ela articula as ideias apresentadas em seu relatório com o desenvolvimento do exercício.

Figura 18 – Resolução apresentada pela aluna E.


A figura a seguir representa um octógono regular.

“360°
$(n-2)180 = (8-2)180 = 6 \cdot 180 = 1080°$
$1080 \div 8 = 135°$
$1080 \div 8 = 45°$”

Determine os seguintes itens e discorra sobre os procedimentos que foram utilizados:

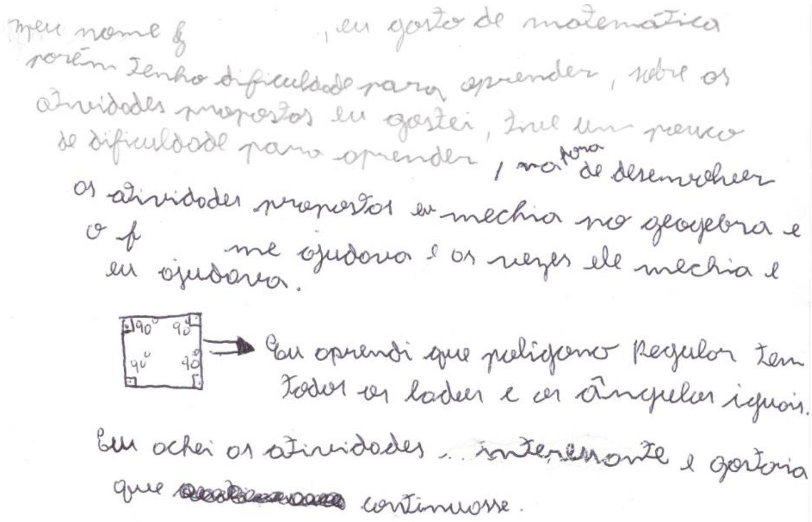
a) Soma dos ângulos externos; 360°
b) Soma dos ângulos internos; $(n-2).180 = (8-2).180 = 6.180 = 1080°$
c) A medida de cada ângulo interno; $1080 : 8 = 135°$
d) A medida de cada ângulo externo; $1080 : 8 = 45°$

Fonte: Elaboração própria.

De certa forma, a resposta apresentada como solução do exercício caracteriza o que a discente destacou no relatório. Identificou corretamente a soma dos ângulos externos (item a), fez aplicabilidade da fórmula construída na atividade três (item b), realizou o procedimento correto, valendo-se do resultado anterior para determinar a medida de cada ângulo interno (item c), entretanto, na etapa final, a estudante repete o procedimento anterior, porém com o resultado diferente, mas correto. É possível que a estudante tenha usado o fato dos ângulos (interno e externo) serem suplementares e colocou a resposta final sem se dar conta do procedimento utilizado.

Destacamos agora as respostas apresentadas pelo estudante **J**:

Figura 19[56] – Relatório elaborado pelo aluno J (15 anos).


Meu nome é , eu gosto de matemática porém tenho dificuldade para aprender, sobre as atividades propostas eu gostei, tive um pouco de dificuldade para aprender, na hora de desenvolver as atividades propostas eu mechia no geogebra e o F me ajudava e as vezes ele mechia e eu ajudava.

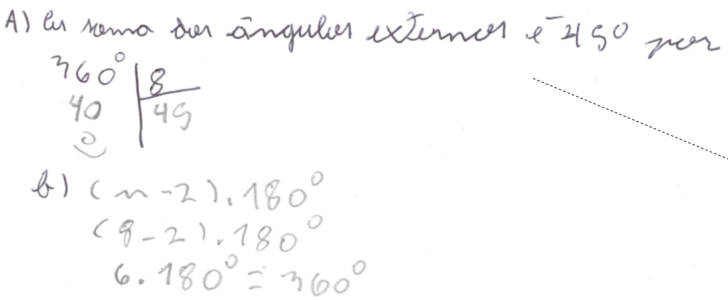
Eu aprendi que polígono regular tem todos os lados e os ângulos iguais.

Eu achei as atividades interessante e gostaria que continuasse.

Fonte: Elaboração própria.

Na primeira parte do relatório o estudante relata seu gosto e sua dificuldade pela matemática. Descreve de que forma realizou as atividades destacando a cumplicidade em relação ao seu colega durante a realização da atividade. Ao final o estudante relata uma propriedade geral para polígonos regulares sem detalhar de que forma chegou a essa conclusão, apresenta o desenho de um quadrado na tentativa de ilustrar o que foi enunciado. Vale destacar que este estudante no início das atividades apontou a circunferência como polígono regular. Na segunda etapa da atividade analisaremos a articulação entre relatório e aplicabilidade em outro contexto.

Figura 20 – Resolução apresentado pelo aluno J.



"A) A soma dos ângulos externos é 45° grau

360° | 8

40 | 45

0

B) (n -2) ·180°

(8 -2) ·180°

6 ·180° = 360°"

Fonte: Elaboração própria.

---

[56] Transcrição Figura 19: "Meu nome é J, eu gosto de matemática porém tenho dificuldade para aprender, sobre as atividades propostas eu gostei, tive um pouco de dificuldade para aprender, na hora de desenvolver as atividades eu mexia no geogebra e o F me ajudava. Eu aprendi que polígono regular tem todos os lados e os ângulos iguais. Eu achei as atividades interessantes e gostaria que continuasse".

Como é possível perceber o discente realizou apenas parte da atividade. O resultado do item a sugere que o aluno confundiu a soma dos ângulos externos com a medida de apenas um dos ângulos externos. No cálculo da soma dos ângulos internos, mesmo sem fazer menção no relatório, o estudante demostra saber utilizar a fórmula, realizando a substituição correta, porém comete um erro de cálculo.

Entendemos como positivo o resultado apresentado pelo estudante, uma vez que ele apresentou uma construção conceitual referente a um polígono regular. Vale ressaltar que no início das atividades este estudante não apresentava de forma clara o que era um polígono e tampouco reconhecia um polígono regular.

Em conformidade com a importância da geometria para o desenvolvimento de outras habilidades, Leivas e Gobbi (2014) sinalizam que noções geométricas ajudam na aprendizagem de números e medidas, além de possibilitar que novas situações sejam exploradas, visando à compreensão. Para os autores, o estudo da geometria também contribui na observação, percepção de semelhanças e identificação de regularidades (LEIVAS; GOBBI, 2014). Dessa forma, avaliamos como positiva a trajetória dos estudantes no decorrer das atividades. É claro que esta atividade não caracteriza exclusivamente a avaliação. Ao longo das atividades, os diálogos, os registros, e a desenvoltura dos estudantes conforme avançamos foram ferramentas importantíssimas neste processo.

A primeira implementação evidenciou uma forma peculiar de construção conceitual dos estudantes sobre polígono regular, esse resultado sugere que o próprio formato das atividades contribuiu para este fato, entretanto o (re)design das atividades no decorrer das implementações superou essa dificuldade. Percebemos também como o uso da linguagem pode contribuir para mediação, seja por meio da escrita ou das construções e manuseio no GeoGebra.

Como forma de sintetizar contribuições e desafios atrelados ao primeiro conjunto de implementações, no quadro a seguir destacamos observações importantes identificadas durante a nossa investigação.

Quadro 12 – Resultados obtidos a partir da análise da implementação 1

Implementações com GeoGebra Convencional – Síntese da Análise		
Atividade	**Desafios**	**Contribuições**
Atividade 1	Presença marcante da concepção prototípica.	Novos apontamentos para o trabalho docente e desenvolvimento da pesquisa.
Atividade 2	Não identificamos desafios atrelados ao desenvolvimento das atividades.	A utilização das ferramentas de construção do GeoGebra como meio de desenvolvimento conceitual; A mediação, o diálogo e argumentação mediante o AGD como ferramentas para o trabalho docente.
Atividade 3	Não identificamos desafios atrelados ao desenvolvimento da atividade.	O AGD como ferramenta potencializadora para o desenvolvimento do pensamento matemático; A utilização da escrita como forma de reflexão.
Atividade 4	Não identificamos desafios atrelados ao desenvolvimento da atividade.	Investigações realizadas a partir das construções; Dinamicidade proporcionada pelo AGD para fazer verificações a partir das construções e modificações dos polígonos construídos.
Atividade 5	Dificuldades relacionadas ao manuseio do GeoGebra na construção de ângulos externos de um polígono.	O uso da experimentação geométrica propiciada pelo manuseio no AGD para reflexões e formulação de conjecturas.
Atividade 6	Dificuldades relacionadas a resolução do exercício proposto.	O uso da escrita como forma de reflexão para o desenvolvimento conceitual.

Fonte: Elaboração própria

Embora nossos apontamentos se direcionaram mais as contribuições, com poucos desafios ligados à utilização do AGD para as atividades que implementamos, existe, porém, uma dificuldade de ordem organizacional e que deve ser sinalizada, pois há uma enorme dificuldade em relação ao uso do laboratório de informática em uma escola pública que deve ser superada. Computadores com defeito, além de dividir o espaço como depósito de vários materiais são alguns deles. Essas evidências tornaram-se subsídios para elaboração das atividades que compõem a implementação dois. Nesse enfoque, procuramos superar esse obstáculo fazendo da sala de aula o laboratório de informática com a implementação de atividades com um “computador” bem mais acessível e que faz parte do dia a dia de boa parte dos estudantes, o *smartphone*.

CAPÍTULO VI – *SMARTPHONES* NA AÇÃO

Neste conjunto de atividades apresentamos para análise as implementações realizadas por meio dos *smartphones* dos próprios participantes. A intenção desta proposta pedagógica é colocar em destaque as contribuições e desafios de um AGD, no entanto, nos valemos de outros aspectos durante as intervenções como as metáforas que surgem como fonte de uma ideia inicial para formulação de um conceito geométrico.

6.1 Uma Metáfora Para Concorrente

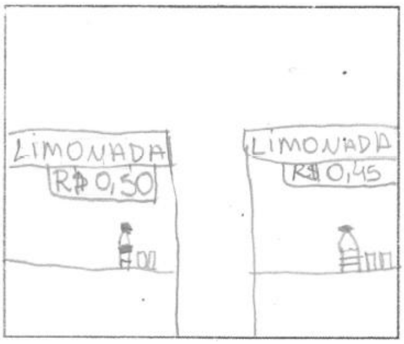
Para o desenvolvimento das atividades preliminares, por intermédio de folha de atividades, procuramos identificar o que os estudantes já conheciam a respeito de palavras que formam a base do tema de estudos (retas paralelas com uma transversal).

Na primeira atividade preliminar apresentamos três palavras: concorrente, paralelo(a) e transversal. Em seguida, solicitamos aos estudantes que descrevessem o que conheciam sobre cada uma das palavras apresentadas.

A fim de dar alguns indícios do que os aprendizes deveriam fazer, a tarefa foi composta por algumas frases na forma de um convite à reflexão. Para cada uma das palavras, os estudantes foram convidados a formular o significado a partir dos seguintes tópicos: (i) me lembra, (ii) porquê e (iii) um desenho possível seria. Por exemplo, para apresentar a ideia sobre concorrente os estudantes foram encorajados a refletir/escrever sobre o que a palavra remetia (i), associar a um significado (ii) e por fim fazer uma representação (iii).

A realização desta atividade demandou um olhar diferenciado para cada elemento colocado em destaque. Durante a realização o foco estava na formulação da ideia inicial que cada estudante já possuía sobre o tema. Assim, além de incentivar, foi necessário valorizar o conhecimento prévio de cada aluno com objetivo de dar significado ao que estava proposto no trabalho. Para a construção do significado de concorrente, por exemplo, os aprendizes apresentaram ideias de competitividade, o que gerou uma boa discussão no momento de socialização. Vejamos o desenho (etapa: um desenho possível seria) de uma dupla de estudantes.

Tabela 5 – Desenhos como metáforas

	Legenda da imagem
	Desenho apresentado pela estudante B (13 anos) para representar o significado de concorrência.
	Desenho apresentado pelo estudante G (13 anos)

Fonte: Elaboração própria

De acordo com os desenhos, observamos que os estudantes ressaltaram a ideia de concorrência através da disputa entre “barracas de limonada” (aluna **B**) e “empresas e negócios” (aluno **G**). Em vários momentos o docente chamou a atenção da turma para o fato de que o objetivo da atividade não consistia em apresentar uma resposta única e certa, mas uma ideia inicial que cada um poderia formular sobre o assunto.

As respostas apresentadas para as etapas anteriores da tarefa (i) e (ii) sugere a relação de competitividade por um ponto em comum (para ambos atrair clientes) no que se refere à ideia inicial de concorrentes. Vejamos:

> Estudante B: “Barracas em concorrência por preços”.
> Estudante G: “Porque elas trabalham na mesma área”.

Em relação à palavra <u>paralelo(a)</u>, os alunos associaram a dois contextos diferentes: alguns relacionaram com retas paralelas (no contexto da geometria) e outros a ruas paralelas (como sistema de localização). Além da convergência entre os estudantes no que se refere ao significado de <u>concorrentes</u> e <u>paralelo(a)</u>, vários deles sinalizaram não saber ou não remeter a ideia alguma a palavra transversal. Como na resposta dos estudantes analisados, de modo geral, observamos que os discentes tentaram relacionar as palavras com algo que lhes fosse comum no dia a dia. No entanto, a palavra <u>transversal</u> é utilizada com muita frequência na identificação de ruas e a escola está situada em uma região rural de difícil acesso onde praticamente toda parte central da localidade é composta, basicamente, por uma avenida. Dessa forma, interpretamos que transversal não é uma palavra usual no cotidiano desses estudantes.

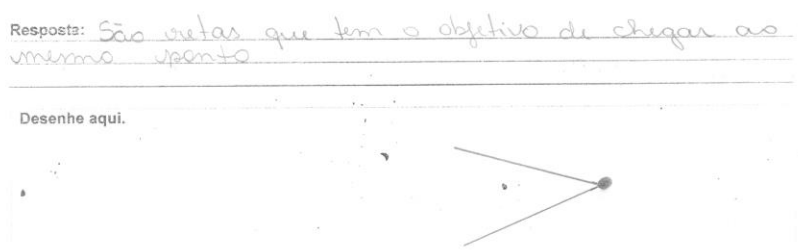
Cabe destacar que durante a realização da tarefa houve muita inquietação por parte dos alunos, alguns com dúvidas e inseguros em relação à realização da atividade e outros formulando mais ideias. É possível que o formato da atividade tenha causado esse comportamento, o que em nosso entendimento é positivo, uma vez que em vários momentos professor e os estudantes se valeram do diálogo e da mediação como fonte de condução ao aprendizado. Destacamos também que tanto os alunos analisados quanto os demais estudantes se valeram de uma ideia para explicar outra, ou seja, o uso de metáforas como fonte de construção e desenvolvimento conceitual (LAKOFF; JOHNSON, 1980).

6.2 Das Metáforas Para os Conceitos Geométricos

Em relação à segunda atividade preliminar, demos um direcionamento mais específico e solicitamos que os estudantes escrevessem sobre o que sabiam a respeito de retas concorrentes, retas paralelas, retas transversais e fizessem um desenho para cada item. Como destacamos, na atividade anterior procuramos evidenciar algumas ideias relacionadas a concorrentes, paralelo(a) e transversal que os alunos apresentaram. Nessa etapa, o foco centrou-se em investigar de que maneira os estudantes poderiam associar as mesmas palavras no contexto específico da geometria. Dessa forma, por meio da atividade introduzimos as seguintes perguntas: (1) O que você entende por retas concorrentes? (2) O que você entende por retas paralelas? (3) O que você entende por retas transversais? E ao final de cada pergunta solicitamos a construção de um desenho para melhor compreender as ideias dos estudantes. Procuramos, com isso, estreitar o objetivo da atividade ao relacioná-la exclusivamente ao contexto da geometria.

Com objetivo de buscar evidências, analisaremos as respostas dos estudantes **B** e **G** para a questão (1). O intuito é verificar se a há indícios de que primeira atividade contribuiu para a construção de um conceito geométrico.

Tabela 6 –Respostas estudantes B e G

Resposta/desenho	**Legenda**
	Estudante B (13 anos) “São retas que tem o objetivo de chegar ao mesmo ponto”.
	Estudante G (13 anos) “Duas retas que tem o mesmo objetivo”.

Fonte: Elaboração própria.

Cabe destacar que embora a atividade tenha sido elaborada para que os estudantes respondessem individualmente, eles estavam organizados em duplas, o que pode ter influenciado as respostas.

As respostas sugerem que os alunos se apropriaram da ideia inicial de concorrente para construir o conceito apresentado nesta etapa. Após a entrega da folha de atividade o docente levantou algumas questões a fim de criar um momento de reflexão. Os discentes foram questionados, por exemplo, sobre o significado que atribuíram à palavra concorrente. Como na atividade anterior eles apresentaram exemplos relacionados ao comércio, o professor procurou colher informações sobre o significado atribuído em relação ao contexto geométrico para palavra concorrente. Os estudantes relataram a importância em vender, conquistar novos clientes como uma relação que apresenta um ponto em comum, que é atrair clientes. O que, em certa medida, deu indícios para construção de um significado do ponto de vista da geometria (retas com um ponto em comum).

As etapas seguintes da atividade se apresentaram com o mesmo cunho da etapa ilustrada anteriormente, ou seja, os estudantes procuraram evidenciar o que foi discutido na primeira atividade preliminar em suas respostas.

Cabe destacar que em uma aula que usa elementos não convencionais para o ensino, gera um tipo de interação que não é tão habitual em um modelo tradicional. Por exemplo, uma atividade provocativa, como a que sugerimos instiga os alunos a descreverem seus conhecimentos prévios na mediada que realizam a atividade, compartilham suas descobertas, perguntam, esclarecem as dúvidas dos colegas e conversam mais sobre o assunto. Dessa forma essa primeira atividade, embora não tenha o AGD como agente principal deixa claro a importância de outros recursos, como a escrita para o desenvolvimento do pensamento matemático (POWELL; BAIRRAL, 2006), a importância do diálogo como ferramenta que conduz à aprendizagem (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010), o uso de metáforas que constitui o nosso sistema conceptual (LAKOFF; JOHNSON, 1980) e pode ser utilizado como forma de identificar os conceitos primeiros para uma ideia, entre outros elementos que poderiam ser destacados, mas fogem a alçada deste trabalho.

A seguir buscaremos indícios das contribuições e desafios da utilização de um AGD a partir do desenvolvimento de atividades realizadas por meio dos *smartphone* dos próprios alunos.

6.3 Um Toque Duplo: Retas Concorrentes com Ângulos

A proposta da atividade centrou-se na construção de retas concorrentes e a investigação entre a relação dos ângulos possíveis (opostos pelo vértice e suplementares). Inicialmente os estudantes realizaram a leitura das etapas que compõem a tarefa. Por se tratar da primeira atividade em que os alunos utilizariam o GeoGebra por meio dos *smartphones*, com objetivo de esclarecer possíveis dúvidas o docente conectou um *tablet* ao datashow para auxiliar os estudantes na medida que surgissem dúvidas na realização das construções.

Antes de prosseguirmos vale fazer dois esclarecimentos: primeiro que durante a preparação para as implementações, que aconteceu quando realizamos o compartilhamento do GeoGebra com os estudantes, eles tiveram um momento de ambientação para conhecer algumas ferramentas essências do GeoGebra, em segundo, embora o *software* utilizado pelos estudantes tenha sido uma versão diferente da utilizada pelo professor para auxiliar nas dúvidas, é importante destacar que os ícones (em grande maioria) não apresentam formatos diferentes, cumprindo assim o objetivo proposto. A Figura a seguir destaca as múltiplas entradas (o *datashow* conectado ao *tablet* e a lousa como suporte) que buscamos para auxiliar os estudantes.

Figura 21 – Datashow conectado ao *tablet* utilizado como apoio no início da atividade

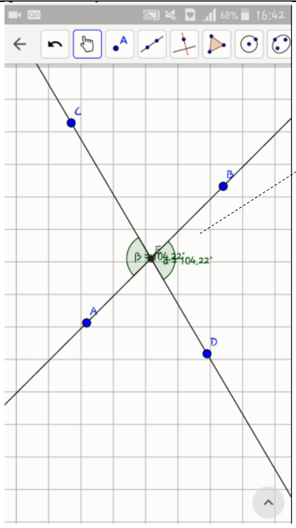
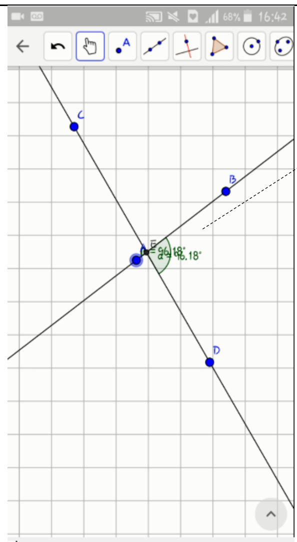
Fonte: Elaboração própria.

No que tange o desenvolvimento da atividade, inicialmente os estudantes apresentaram muita dificuldade principalmente na construção dos ângulos opostos pelo vértice, devido a pouca experiência de utilização das ferramentas do GeoGebra. No entanto, na medida em que a aula foi se desenvolvendo o professor procurou esclarecer as dúvidas dos alunos que estavam com dificuldades e incentivar as duplas que apresentaram melhor desempenho, propondo novos questionamentos. Vale destacar a não linearidade que acontece em uma situação de ensino, como impasses e dificuldades, o que geralmente desestabiliza os estudantes que muito possivelmente não estão acostumados com esse tipo de atividade. A fim de entender como se desenvolveu as etapas, vejamos de que forma os estudantes **B** e **G** verificaram a relação entre ângulos opostos pelo vértice. Segue o diálogo extraído da gravação em áudio realizada por meio de um dos *smartphones* da dupla:

> Professor: Qual observação dá para fazer? G... B.... ângulos opostos pelo vértice, que observação dá para fazer sobre eles?
> Estudante B: Que se você mexer com a reta ou tirar ela do lugar e pôr em outro...
> Estudante G: O valor continua o mesmo.
> Vozes... (alunos chamando o professor)
> Estudante B: O valor dos ângulos continua o mesmo.

De fato, a justificativa apresentada pelos estudantes está em consonância com o procedimento realizado no GeoGebra. A seguir apresentamos trecho do vídeo, capturado através da tela do *smartphone* utilizado pela dupla, que retrata as observações dos estudantes descritas no diálogo anterior.

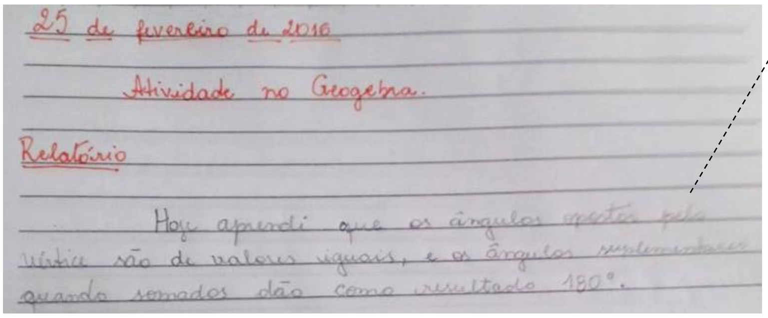
Quadro 13 – Ações realizadas pelos estudantes na Atividade 1

Descrição	Vídeo - Tempo	Imagem
Alunos **B** e **G** modificando o construto.	12:22	 Medida dos ângulos: 104,22°
	12:34	 Medida dos ângulos: 96,18°

Fonte: Elaboração própria.

Destacamos que embora em alguns momentos os alunos realizaram modificações no construto e apresentam um certo grau de incerteza sobre as constatações (conforme é possível perceber em trechos do vídeo), a descrição do diálogo anterior com parte da realização no GeoGebra, sugere que a capacidade de proporcionar uma visão não estática da geometria a partir da utilização do *software* pode ser identificada como uma contribuição. Os alunos utilizaram as mesmas estratégias para estabelecer uma relação entre os ângulos suplementares e ao final, com o objetivo de verificar de que forma eles conseguiriam relacionar o que observaram de forma escrita, foi-lhes solicitado a construção de um relatório (individual) relatando as descobertas. O relatório a seguir foi elaborado pela estudante **B** (13 anos).

Figura 22 – Relatório produzido pela estudante B (13 anos)



“Hoje eu aprendi que os ângulos opostos pelo vértice são de valores iguais, e os ângulos suplementares quando somados dão como resultado 180°”.

Fonte: Elaboração própria.

O relatório produzido pela estudante aponta uma compreensão em relação ao que foi trabalhado anteriormente. Conforme sinalizam Bairral *et al*. (2015b), a implementação de atividades por meio da utilização de dispositivos móveis cria um ambiente propício para aprendizagem, na medida em que estimula a investigação e exploração na descoberta de propriedades geométricas.

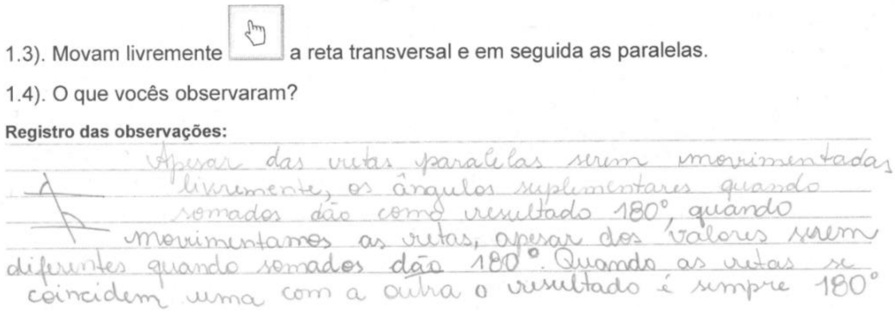
6.4 Paralelas Cortadas por uma Transversal: Investigação e Descobertas

A atividade que apresentamos teve como objetivo principal trabalhar propriedades existentes entre os pares de ângulos que se pode formar a partir da construção de duas retas paralelas cortadas por uma transversal e compõem a última deste conjunto de atividades.

No início da atividade houve alguns impasses, como dificuldades relacionadas à construção no GeoGebra e a agitação da turma, que retardou a realização da atividade. Com intuito de solucionar esse impasse, o docente procurou auxiliar as duplas que apresentavam maior dificuldade e incentivar os que estavam conseguindo realizar a atividade. Destacamos que a interação que ocorre em uma situação de ensino que emprega o uso das TIC a torna mais dinâmica (SCHEFFER, 2012), o que demanda do docente maior flexibilidade, a fim de solucionar problemas de ordem técnicos, como mau uso da tecnologia em jogo, e a apresentação de novos questionamentos, que estejam além da proposta de trabalho, e mantenha a motivação e curiosidade dos estudantes.

Em relação ao ensino de geometria, um ponto que merece destaque é referente ao uso excessivo da nomenclatura utilizada em relação aos estudos sobre paralelas com uma transversal. Expressões como alternos internos ou alternos externos tende a tornar-se um obstáculo conceitual. Dessa forma, o docente optou em valorizar as descobertas inicias dos estudantes, para que em um momento posterior ao uso dos *smartphones* esses termos pudessem ser apresentados. Com objetivo de identificar contribuições oriundas da investigação, destacamos o registro apresentado por uma dupla de estudantes. A Figura a seguir retrata as observações da dupla.

Figura 23[57] – Resposta dos estudantes B e G (13 e 14 anos)



1.3). Movam livremente a reta transversal e em seguida as paralelas.

1.4). O que vocês observaram?

Registro das observações:

Apesar das retas paralelas serem movimentadas livremente, os ângulos suplementares quando somados dão como resultado 180°, quando movimentamos as retas, apesar dos valores serem diferentes quando somados dão 180°. Quando as retas se coincidem uma com a outra o resultado é sempre 180°

Fonte: Elaboração própria

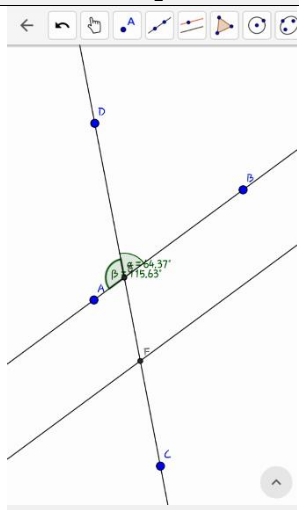
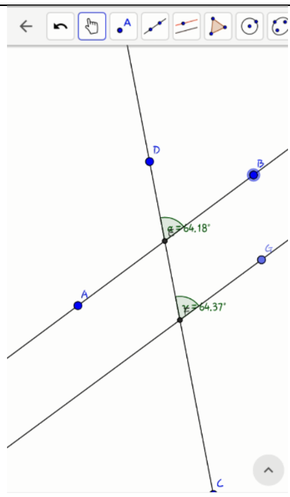
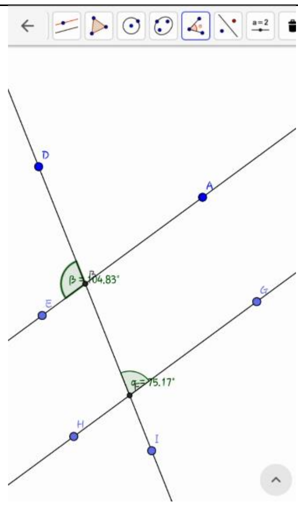
A produção do texto pelos estudantes coloca em evidência a importância do uso da escrita para o aprendizado matemático, destacando sua potencialidade como forma de utilização no processo de reflexão conceitual (POWELL; BAIRRAL, 2006).

O desenho utilizado pelos estudantes sugere uma tentativa de melhor compreender as alterações ocorridas no construto na medida em que realizaram as modificações. A importância deste recurso é sinalizada por (BAIRRAL, 2009; NACARATO e PASSOS, 2003).

Embora alguns trechos do texto dos alunos sejam redundantes parece evidente o fato de que eles verificaram a autenticidade de que ângulos suplementares somam 180 graus. De acordo com o relatório, observamos que a constatação destacada pelos estudantes foi realizada arrastando uma das retas e aproximando ou sobrepondo na outra. Talvez seja possível que esse fato tenha dado subsídio para as observações, embora no registro os estudantes não apontassem grandes descobertas em relação aos possíveis pares de ângulos, é possível verificar, a partir da captura da tela do *smartphone* utilizado pela dupla, que outras testagens foram realizadas com objetivo de fazer novas constatações. Vejamos:

[57] Transcrição Figura 23: "Apesar das retas paralelas serem movimentadas livremente os ângulos suplementares quando somados dão como resultado 180°, quando movimentamos as retas, apesar dos valores serem diferentes quando somados dão 180°. Quando as retas se coincidem uma com a outra o resultado é sempre 180°".

Quadro 14: Ações realizadas pelos estudantes na atividade 2

Descrição	Video - Tempo	Imagem
Alunos investigando a relação entre ângulos suplementares.	06:44	
Alunos investigando a relação entre ângulos correspondentes.	10:21	
Alunos investigando a relação entre ângulos colaterais.	15:58	

Fonte: Elaboração própria.

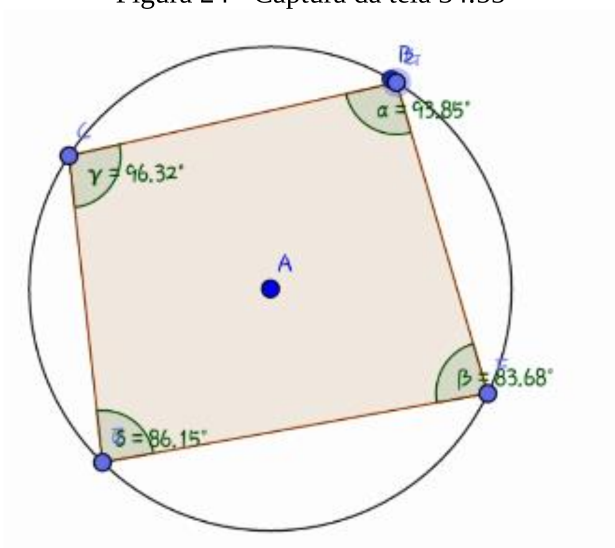
As constatações aqui sinalizadas deixam em evidência as interações (estudantes-estudantes e estudantes-AGD) que ocorreram na medida em que os educandos realizavam a atividade. A reflexão apresentada por meio da escrita sugere que tenha ocorrido, previamente, um diálogo entre eles com o objetivo de formular conjecturas a partir da visualização.

É possível que essas verificações registradas pelos discentes tenham constituído a base para etapa seguinte, em que foi solicitado que eles construíssem uma circunferência e um quadrilátero inscrito a circunferência; medissem os ângulos internos do quadrilátero e formulassem conjecturas a partir das modificações realizadas no constructo. No decorrer da atividade o docente chamou a atenção para que todos observassem atentamente o que estava acontecendo com o quadrilátero a fim de estabelecer alguma relação entre esta etapa com o que verificaram em relação a um par de paralelas cortada por uma transversal.

Devido à dificuldade na construção dos ângulos internos do quadrilátero a dupla analisada solicitou a presença o professor. Deste episódio, no que se segue, enquanto o professor esclarece as dúvidas da dupla outros estudantes aglomeram em torno do professor levantando questionamentos e solicitando explicações. Enquanto isso a dupla faz a seguinte pergunta ao professor: o que é uma conjectura? (Enfatizando algo escrito na atividade). Com intuito de sanar possíveis dúvidas correlatas o professor pede atenção da turma e faz uma breve explicação, aproveita o momento que a turma começa a ficar dispersa para provocar os estudantes com novos questionamentos.

De volta ao diálogo com a dupla, o professor retoma a ideia de conjectura e tenta incentivar a dupla com novos questionamentos. Professor: “Que relação existe entre esses ângulos aqui? ” (Apontando para os ângulos enquanto a estudante B movimentava os pontos)

Figura 24 - Captura da tela 34:55



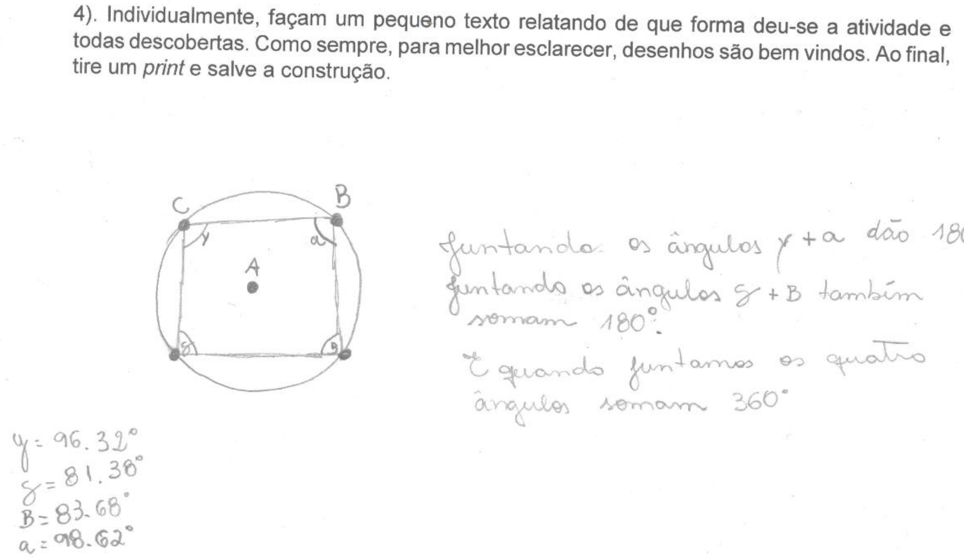
Fonte: Elaboração própria.

Vejamos trecho dessa conversa.

> Estudante G: Somando tudo vai dar 360 graus
> Professor: Somando tudo vai dar quanto? (Tentando enfatizar o que foi dito pelo estudante)
> Estudante B: 360 graus. (Há uma interrupção no diálogo quando alunos que terminaram a atividade entram em cena para entregar as folhas das atividades).
> Estudante G: Porque esses dois aqui...juntando dá um...
> (o professor tenta incentivar)
> Professor: Calma! Me mostra... (Há vozes que atrapalham a identificação do áudio no momento da fala da aluna B)
> Estudante G: Porque esses dois aqui dá 180 graus (apontando para dois ângulos opostos) esses outros dois aqui vai dá 180 graus (apontando para os outros pares de ângulos opostos) e juntando o total vai dá 360 graus (identificando a soma dos pares opostos de ângulos)

Em seguida o professor deixa por conta dos estudantes a construção de um relatório apresentando as descobertas. De acordo com a captura do áudio percebemos que os alunos apresentam dúvidas, mas não solicitam a participação do professor. A dúvida apresentada é evidenciada no relatório descrito pela dupla que se confunde em relação a propriedade utilizada na descrição do diálogo e inverte a posição dos ângulos (ângulos cuja soma resultam em 180 graus), conforme destacamos a seguir.

Figura 25[58] – Etapa final apresentada pela aluna B



Fonte: Elaboração própria

Embora a utilização do GeoGebra tenha trazido novas perspectivas para os estudantes, que puderam testar, verificar, ampliando assim o número de visualizações de um mesmo

[58] Transcrição Figura 25: "Juntando os ângulos y + a dão 180°. Juntando os ângulos g + b também somam 180°. E quando juntamos os quatro ângulos somam 360°".

objeto os alunos apresentaram dúvidas na etapa final. No que se segue a aula termina e os alunos não puderam relatar a dificuldade para o docente.

Em relação às investigações sobre retas paralelas cortadas por uma transversal, observamos que as atividades propostas por meio do AGD possibilitaram aos aprendizes a realização de testagens, com mais ênfase na identificação das propriedades e menos no uso excessivo de nomenclatura. A visualização de propriedades a partir das possíveis combinações entre os pares de ângulos, tornou-se um desafio para os estudantes na consolidação das constatações, porém inovador por trazer elementos que possibilitaram com maior facilidade a identificam de algumas propriedades, como no caso da resolução do problema proposto.

Sobre o *smartphone*, destacamos o apelo motivador que este recurso traz às aulas como ferramenta pedagógica. No entanto, observamos desafios atrelados ao seu uso em alguns momentos, como a dificuldade de visualização de propriedades em um constructo em casos em que a tela é pequena. A seguir apresentamos uma síntese desse conjunto de implementações.

Quadro 15 – Resultados obtidos a partir da análise da implementação 2

Implementações com GeoGebra para *Smartphones* – Síntese da Análise		
Atividade	**Desafios**	**Contribuições**
Atividade preliminar 1	A inquietação dos estudantes em relação ao modelo de atividade proposto.	O uso de metáforas como fonte de construção e desenvolvimento conceitual.
Atividade preliminar 2	Não identificamos desafios atrelados ao desenvolvimento da atividade.	A socialização ao término da atividade como forma de provocar a reflexão;
Atividade 3	Dificuldades de manuseio do *software.*	Investigação de propriedades a partir de um constructo; A visualização de uma geometria não estática; Uso da escrita como forma de reflexão e desenvolvimento conceitual.
Atividade 4	Dificuldades de manuseio do *software* e de visualização das propriedades em um constructo para casos em que a tela do *smartphone* é pequena.	Investigação de propriedades a partir de um constructo; Maior ênfase na exploração de propriedades em vez do uso excessivo de nomenclaturas; Uso da escrita como forma de reflexão e desenvolvimento conceitual; identificação de propriedades em outros contextos.

Fonte: Elaboração própria

As contribuições e desafios destacados formaram a base no apontamento de algumas conclusões assim como na identificação de novos desdobramentos, apresentados como último passo no fechamento da tela.

FECHANDO A TELA

Fazer generalizações é algo arriscado, pois analisamos um grupo específico de alunos sob condições peculiares do ambiente em que foi desenvolvido o estudo. No entanto, deixaremos nossas impressões, que não se constituem em verdades absolutas. Um leitor mais crítico poderá identificar outros elementos e discordar de algumas das nossas justificativas ou apontamentos, o que entendemos como natural.

A presente pesquisa foi conduzida tendo como interrogante principal: "Que contribuições uma intervenção em aula que inclua AGD (com e sem *touchscreen*) tem para a construção de conceitos geométricos de alunos do 8º e 9º ano de uma escola pública do Rio de Janeiro?", visando os seguintes objetivos: (1) identificar contribuições e desafios atrelados ao uso do GeoGebra convencional para construção do conceito de polígono regular e identificação de propriedades; (2) analisar contribuições do GeoGebra aplicativo no desenvolvimento de atividades para construção de conceitos relacionados aos estudos de retas paralelas cortadas por uma transversal e (3) elucidar dificuldades relacionadas ao reconhecimento de propriedades nos estudos de retas paralelas cortadas por uma transversal.

No decorrer deste caminho novos elementos foram evidenciados, fruto do (re)*design* das atividades que se reconfiguraram e deram o tom das intervenções. Por exemplo, no segundo conjunto de implementações trouxemos novos elementos que nos permitiu, entre outros fatores, identificar as metáforas dos estudantes na formulação de conceitos. A seguir apresentamos as contribuições e desafios atrelados do uso do GeoGebra convencional na construção do conceito de polígono regular e identificação de propriedades

7.1 AGD em Computadores: Desafios e Contribuições

No que tange ao primeiro conjunto de intervenções é importante destacar a dificuldade enfrentada na implementação de atividades no laboratório de informática, o que de certa forma acaba inibindo a realização de práticas educativas nesse ambiente. Além dos empecilhos de natureza física como problemas apresentados por algumas máquinas, e o espaço físico comprometido, dividindo espaço com armários, livros e etc., existem algumas limitações no que se refere ao desenvolvimento do trabalho. Por exemplo, em alguns momentos os alunos apresentem dificuldades de manuseio e realização das tarefas, o que não pode ser acompanhado de perto pelo docente, é possível que as dificuldades sejam oriundas do pouco contato com computadores que esses jovens têm, uma vez que a maior parte do seu dia eles passam conectados por meio de dispositivos móveis.

Em relação à construção do conceito de polígono regular, proposto para essa etapa, observamos a presença marcante das concepções clássica (OLIVEIRA, 1999) e prototípica (OLIVEIRA, 1999; HERSHKOWITZ,1994) no entendimento inicial e posterior dos estudantes em algumas das atividades. Observamos que a própria natureza das atividades contribuiu para esse fato, o que em nosso entendimento não há mal algum, uma vez que a Matemática se insere na concepção clássica dos conceitos.

Como contribuições do AGD nesta etapa destacamos o tipo de mediação proporcionada por este recurso, com possibilidades de criação de um ambiente favorável para investigações e reflexões. Destacamos, como exemplo, a construção e desenvolvimento do conceito de polígono regular que gradativamente foi sendo apropriado pelos estudantes, na medida em que avançavam no desenvolvimento das atividades.

Os impasses e dificuldades enfrentados pelos estudantes devem ser encarados como uma oportunidade de criar novos caminhos e gerar debates e reflexões. Nesse sentido, a postura docente permeou toda implementação com intuito de fazer do diálogo (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010) e da mediação (SCHEFFER, 2012; 2013) uma oportunidade de aprendizagem.

7.2 AGD em *Smartphones*: Desafios e Contribuições

Em relação ao segundo conjunto de atividades, não tivemos a intenção de comparar a utilização do GeoGebra convencional com o GeoGebra para *smartphones*, mas criar um ambiente de laboratório dentro da própria sala de aula, uma vez que maior parte dos estudantes analisados chegam à sala de aula com seus dispositivos.

Destacamos a condução motivadora que o uso do *smartphone* trouxe durante as implementações. De acordo com Bairral *et al.* (2015a) a implementação de recursos diferentes na realização de uma tarefa, apresenta uma contribuição para o desenvolvimento da capacidade cognitiva. Nesse sentido o *smartphone* se assenta com um enorme potencial seja pelo seu apelo instigador, seja pela gama de possibilidades proporcionada para o uso em sala de aula (MOURA, 2011). Entretanto, Göttsche (2012) explica que em relação à inserção de um dispositivo móvel em situações de ensino, é necessário identificar potencialidades e limitações do recurso com objetivo de dar ao seu uso o teor adequado a fim de proporcionar um ambiente favorável para que ocorra aprendizagem. O que demandou um olhar para algumas questões de ordem técnica, como a dificuldade que alguns estudantes apresentaram na realização de construções.

Em relação às investigações sobre retas paralelas cortadas por uma transversal, observamos que as atividades propostas por meio do AGD possibilitaram aos aprendizes a interação e a reflexão, tendo, por exemplo, maior visibilidade o estudo de propriedades do que a excessiva ênfase em nomenclatura. Entretanto, observamos que alguns desses desafios estão atrelados ao seu uso em alguns momentos, como a dificuldade de visualização de propriedades em um constructo em casos em que a tela do *smartphone* é pequena. Todavia, essa dificuldade de visualização tende a ser encarada como natural no processo de descoberta por parte dos alunos. Particularmente, no trabalho com retas paralelas cortadas por transversais, o uso de AGD em *smartphones* mostrou-se instigante por permitir aos alunos a observação de um conjunto de elementos (ângulos, posição de retas etc.) variantes ou invariantes e, juntamente com o manuseio e exploração das formas manuseadas.

Outro desafio está na atividade proporcionada mediante o próprio aparelho. Por se tratar de algo muito utilizado no dia a dia dos estudantes a atividade deve complementar o uso a fim de motivar os estudantes para não perder o foco.

Destacamos ainda que durante o desenvolvimento deste trabalho os estudantes se apropriaram da escrita como fonte para reflexão e construção do pensamento matemático (POWELL; BAIRRAL, 2006), por exemplo, nos relatórios, produzidos pelos estudantes, que destacamos na análise, assim como está marcante a presença de metáforas como forma de construção conceitual que os alunos apresentaram, seja na escrita seja nos diálogos. A possibilidade de escrever, de socializar e compartilhar suas ideias com toda a turma, permite ao aluno observar singularidades semânticas do conceito no âmbito matemático.

Passando por computadores e *smartphones* e redescobrindo novas formas de construir e desenvolver um conceito, com apontamentos na ciência cognitiva, no campo da linguística ou colocando a mente humana em destaque, sintetizamos como positivo os resultados de intervenções que analisou o clique na tela de computadores, o toque na tela de *smartphones*, que podem sair do bolso ou da mochila para palma das mãos dos alunos como mais um recurso à disposição do trabalho docente, para uma dinâmica de aula na construção de conceitos geométricos.

7.3 Desdobramentos e contribuição da Pesquisa

No decorrer das implementações foi possível perceber que em alguns momentos uma atividade que contemple etapas de construção e investigação não foi suficiente. Destacamos, por exemplo, quando a atividade relacionada as propriedades sobre paralelas e transversal boa parte da turma ficou dispersa e o docente teve que propor novos questionamentos. Dessa forma, como desdobramento da pesquisa temos a intenção de investigar o desenvolvimento conceitual através do AGD em *smartphones* por meio da implementação de atividades com múltiplas entradas, em que os alunos podem, por exemplo, acessar um vídeo, ou um site relatando o contexto histórico do tema de estudos, resolver um problema escrito, como parte integrante de uma etapa e forma de complementar a tarefa.

Destacamos como contribuição da pesquisa, a elaboração de um caderno de atividades para AGD voltado para o professor com dicas para implementação, sinalização de possíveis dificuldades enfrentadas pelos estudantes (fruto de nossa experiência), sugestões de material complementar.

No decorrer deste trabalho nosso objetivo foi direcionar o olhar sobre as contribuições e desafios que o AGD utilizado pode trazer para a construção de conceitos geométricos, mas esse se configurou em apenas um olhar, dos muitos que poderíamos ter procurado dar mais visibilidade, o que serve, então, como convite a novas pesquisas.

Fechamos a tela, destacando um olhar, em especial, que se deu com a participação no terceiro prêmio de educação científica[59] na qual somos um dos ganhadores na categoria ensino fundamental II: Ciências e Matemática. Este olhar se constituiu da ênfase dada motivação dos estudantes na utilização do *smartphone* (segundo conjunto de intervenções), importante para estimular o espírito investigativo e participativo devido às peculiaridades da localidade em que a escola, onde foram implementadas as atividades, está inserida, assim como o crescimento profissional proporcionado ao docente.

---

[59] Disponível em: <http://www.premiodeeducacaocientifica.com/>. Acesso em 15 dez 2016.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Norma S. G. O modelo de Romberg e o percurso metodológico de uma pesquisa qualitativa em educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro/SP, ano 21, n. 29, p. 175–197. 2008.

ALRØ, H; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Trad. Orlando de A. Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. 160 p

ALVES, G.S.; SOARES, A.B. Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do Software Tabulae. In: XXIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação – **IX Workshop de Informática na Escola**. Campinas: Unicamp. 2003. Disponível em: <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/bib.html> Acesso em: 22 nov. 2015.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O Método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais**. São Paulo: Pioneira, 2001. p.109-188.

BAIRRAL, M. Do clique ao touchscreen: Novas formas de interação e de aprendizado matemático. In: **Reunião anual da anped**, Goiânia, n 36 de setembro a 2 de outubro de 2013.

______. Licenciandos em matemática analisando o comportamento de pontos notáveis de um triângulo em um ambiente virtual com GeoGebra. In: **Reunião anual da anped,** Florianópolis, n 37. 2015

______. **Tecnologias da Informação e Comunicação na formação e educação matemática**, Seropédica: EDUR, 2009. 112p. Série InovaComTic (V.1).

BAIRRAL, M., ASSIS, A. R., & SILVA, B. C. da. **Mãos em ação em dispositivos touchscreen na educação matemática**. Seropédica: Edur, 2015a.

______. Uma matemática na ponta dos dedos com dispositivos touchscreen. **RBECT**, v. 8, n. 4, p. 39-74, 2015b.

BORBA, M.C. A pesquisa qualitativa em educação matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPEd, 27., 2004, Caxambu. **Anais...** Caxambu: ANPEd, 2004. 1CD-ROM.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**.3.ed.2.reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LERER, R.; SHAUBLE, L Design experiment in educational research. **Eductional Researcher**, v. 32,n. 1, p. 9-13. Jan/Feb 2003.

COSTA, C. Visualização, veículo para educação em Geometria. In: **IX Encontro de Investigação em Educação Matemática.** Portugal, 2000.

DAMÁSIO, A. **O Erro de Descartes: emoção razão e o cérebro humano**. Tradução de D. V. G. Segurado. São Paulo: Companhia das Letras, 1996.

______. **O livro da consciência: a construção do cérebro consciente**. Tradução de L. O.

Santos. Porto, Temas e Debates, 2010.

______. **O mistério da consciência: do corpo e das emoções do conhecimento de si**. Tradução de L. T. Motta. São Paulo: Companhia das Letras, 2000.

DOERR, H. M.; WOOD, T. Pesquisa-Projeto (design research): aprendendo a ensinar Matemática. In: BORBA, M. C. (Org.) **Tendências internacionais em formação de professores de matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 113-128.

DREYFUS, T. On the status of visual reasoning in Mathematics and Mathematics Education, Plenary address to PME XV, **Proceedings Fifteen PME conference**, Assisi, Volume I, p. 33-48, 1991.

GOBBI, J. A; LEIVAS, J. C. P. Engenharia Didática e GeoGebra Aliados na Construção de Conceitos Geométricos. **Educação Matemática em Revista**, p. 40-48, 2014.

GOLDENBERG, E. P. "Hábitos de pensamento" um princípio organizador para o currículo (I). **Educação e Matemática**, 47, 31-35. 1998(a).

GORGORIÓ, N.; ARTIGUES, F.; BANYULS, F.; MOYANO, D.; PLANAS, N.; ROCA, M.; XIFRÉ, A. Proceso de elaboración de actividades ricas: un ejemplo, las 3 rotaciones. **Revista Suma**, n. 33, p. 59-71, 2000.

GÖTTSCHE, K. Tecnologias móveis: uma mais valia em contextos educacionais? **Revista Linhas**. Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 62-73, 2012.

GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica uma Nova Abordagem para o Aprendizado da Geometria. In: **Anais...** VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, 1996.

______. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. [Tese -Doutorado em Informática na Educação]. Curso de Pós-Graduação em Informática na Educação – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

HERSHKOWITZ, H. Ensino e Aprendizagem da Geometria. **Boletim Gepem**, n. 32, 1994.

JAVARONI, S. L; SANTOS, S. C; BORBA, M.C. Tecnologias digitais na produção e análise de dados qualitativos. Educação Matemática Pesquisa. **Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.** ISSN 1983-3156, v. 13, n. 1, 2011.

KINDEL, D.S. A "corujinha que rola": uma estratégia para discutir conceitos geométricos em sala de aula usando origami. **Ciência em Tela**, v. 03, p. 1-9, 2010.

LAKOFF, G; MARK J. **Metaphors We Live By**. Chicago: Chicago University Press, 1980; trad. cast. *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid: Cátedra, 1986.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. Rio de Janeiro: Editora 34, 2010.

MACEDO, A. C. P. Categorização semântica: uma retrospectiva de teorias e pesquisa. In: **Revista do Gelne**, v. 04, n. 1/2, 2002.

MARQUES, W., BAIRRAL, M. **Na calculadora é ponto ou vírgula?** Analisando interações discentes sob as lentes de Vygotsky e Bakhtin. Seropédica, RJ: EDUR, 2014.

MATTA, A,E,R; SILVA, F F. d. P. S; BOAVENTURA, E,M. Design-based research ou pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. **Revista da FAEEBA – Educação e Contemporaneidade**, *23*(42), 23-36. Retrieved, 2014. Disponível em: <http://www.revistas.uneb.br/index.php/faeeba/article/view/1025/705>. Acesso: 22. Dez. 2015

MEIER, M.; GRAVINA, M. A. Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. In: **Anais...** 1ª Conferência Latino Americana de GeoGebra, p. CCL-CCLXIV, 2012.

MOURA, A. M. C. **Apropriação do telemóvel como ferramenta de mediação em mobile learning: estudos de caso em contexto educativo**. [Tese de Doutoramento em Ciências da Educação, na Especialidade de Tecnologia Educativa]. Braga: Universidade do Minho. Instituto de Educação. 2011.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. **A geometria nas séries iniciais: Uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores**. São Carlos: EdUFSCar, 2003.

OLIVEIRA, M. B. A tradição Roschiana. In: OLIVEIRA, M. B.; OLIVEIRA, M. K. **Investigações cognitivas - Conceitos, Linguagem e Cultura**. Porto Alegre: Artmed, 1999. p. 17-33.

PADILHA, T. A. F; DULLIUS, M. M.; QUARTIERI, M. T. Construção de fractais usando o *software* GeoGebra. **Gepem**, 62, 155 – 162, 2013.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas:** Um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P. d., BROCARDO, J., OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

POWELL, A; BAIRRAL, M.A. **A escrita e o pensamento matemático: Interações e Potencialidades**. Campinas: Papirus, 2006.

SANTOS, R. T., BAIRRAL, M. A. Aspectos emergentes na construção do conceito de polígono por alunos do 6º ano de uma escola pública. **Vidya**, p.15 – 35. 2015. Disponível em: <http://periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/142/216>. Acesso em: 26. Out. 2015

SANTOS, S. A. Explorações da linguagem escrita nas aulas de Matemática. IN: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. **Escritas e Leituras na Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. p. 127 – 141

SAYEG, M. E. M. Lexicografia e Cognição. In: OLIVEIRA & OLIVEIRA. **Investigações cognitivas: Conceitos, Linguagem e Cultura**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1999. p. 65-79

SCHEFFER, S. A Argumentação em Matemática na Interação com Tecnologias. **Revista Ciência e Natura**, v. 34, n. 1, Santa Maria, 2012.

______. A argumentação de professores de matemática suscitada pelo uso de softwares dinâmicos: construindo significados. **Vidya**, v. 33, n. 1, p. 9-17, 2013.

SILVA, G. H. G. da. Ambientes de Geometria Dinâmica: Potencialidades e Imprevistos. **Revista brasileira de ensino de ciência e tecnologia**, v. 5, número 1, 2012. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/index>. Acesso em: 14. Set. 2015

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, n. 14, p. 66 – 91, 2000.

SILVA, R. S. O uso da geometria dinâmica em modelagens geométricas: possibilidade de construir conceitos no ensino fundamental. **Revemat***:* Revista Eletrônica de Educação Matemática V.10. n 2, p. 107- 123, 2015

UNESCO. **Diretrizes de políticas para aprendizagem móvel**. 2014. Disponível em: <http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002277/227770por.pdf>. Acesso em: 15 ago. 2016.

VALENTE, J. A; ALMEIDA, J. F. Visão analítica da informática na Educação no Brasil: a questão da formação do professor. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, número 1, pp. 45-60, 1997

VIGOTSKI, L. S. **Imaginação e criatividade na infância**. São Paulo: Martins Fontes, 2014.

ZAZKIZ, R.; LEIKIN, R. Exemplifying definitions: a case of a square. **Educational studies in mathematics**, 69(2), 131-148. 2008

APÊNDICE A – ATIVIDADE AVALIATIVA

COLÉGIO ESTADUAL
Disciplina: Matemática
Professor Marcos P. Henrique

Atividade Avaliativa

1). Nas últimas 10 aulas (5 encontros) realizamos as atividades no laboratório de informática trabalhando com o GeoGebra nos estudos sobre Polígonos Regulares. Com o objetivo de dar continuidade ao processo avaliativo, você está sendo convidado a construir um relatório sobre essa experiência.
Segue um pequeno roteiro para auxiliá-lo na construção do relatório:

1.1). Apresentação (Nome, sua motivação em relação aos estudos de matemática);

1.2). Atividades propostas (Relate sobre o desenvolvimento das atividades, se houve dificuldade, etc.);

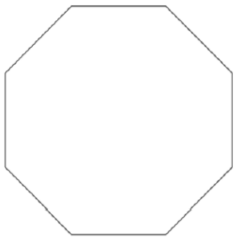
1.3). Metodologia (apresente uma síntese de como você e seu colega (ou grupo) desenvolveram as atividades);

1.4). Resultados (Procure apresentar o que aprendeu sobre polígonos regulares, outros conceitos que foram utilizados, apresente um desenho ou uma tabela para exemplificar.);

1.5). Conclusão (Como você avalia essas atividades? Apresente sua opinião sobre a realização das atividades).

Observação: Apresente outras questões que julgar pertinente.

2). A figura a seguir representa um octógono regular.



Determine os seguintes itens e discorra sobre os procedimentos que foram utilizados:

a) Soma dos ângulos externos;
b) Soma dos ângulos internos;
c) A medida de cada ângulo interno;
d) A medida de cada ângulo externo;

APÊNDICE B – ATIVIDADE PILOTO

ATIVIDADE PILOTO

ALGUNS QUADRILÁTEROS E SUAS PROPRIEDADES

Atividade 1

1.1). Construam um quadrilátero usando a opção ***Construi****r*;

1.2). Construam os ângulos internos do quadrilátero;

1.3). Meçam cada um dos ângulos do seu quadrilátero;

1.4). Com a ferramenta ***medir*** selecionada determinem a soma dos ângulos internos do quadrilátero;

1.5). Modifiquem o quadrilátero usando a ferramenta ***Arrastar***.

Qual a conclusão vocês chegaram em relação aos ângulos internos de um quadrilátero?

Resposta:

Atividade 2:

2.1). Construam duas retas paralelas distintas e duas retas perpendiculares às retas paralelas;

2.2). Marquem os pontos de encontro das retas;

2.3). Construam um polígono a partir dos pontos criados anteriormente;

2.4). Construam os ângulos internos do quadrilátero e determinem a soma desses ângulos.

Qual o nome deste quadrilátero?

Resposta:

Agora que vocês já reconheceram este quadrilátero vamos investiga-lo um pouquinho.

2.5). Construam as diagonais do polígono;

2.6). Utilizando a ferramenta ***medir*** apresentem as medidas das diagonais;

2.7). Modifique o seu triângulo usando a ferramenta **arrastar**;

Qual a conclusão da dupla?

Resposta:

Atividade 3:

3.1). Construa duas retas paralelas r e s distintas e duas retas (paralelas entre si) e concorrentes em relação as retas r e s;

3.2). Marque os pontos de encontro das retas;

3.3). Construam um polígono utilizando os pontos criados anteriormente;

3.4). Qual o nome deste quadrilátero?

Resposta:

3.5). Construam os ângulos internos do quadrilátero;

3.6). Adicionem os ângulos adjacentes;

3.7). Modifiquem o quadrilátero utilizando a ferramenta ***arrastar***;

Qual a conclusão da dupla?

Resposta:

Seção Livre

Tente construir outros quadriláteros que vocês conhecem e registre o nome e os procedimentos necessários para sua construção.

APÊNDICE C – ATIVIDADES DA PRIMEIRA INTERVENÇÃO

INVESTIGANDO COM O GEOGEBRA

Atividade Preliminar

Reconhecendo Polígonos

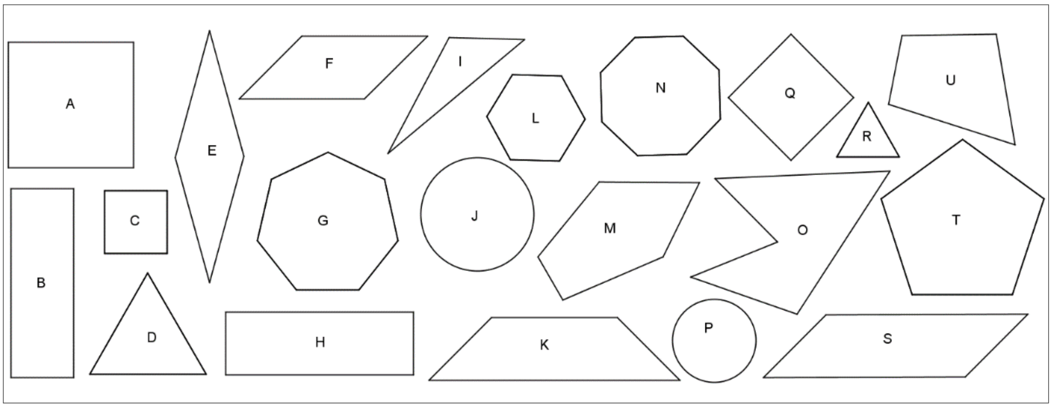
1). O que você entende por polígono? Desenhe, pelo menos, dois exemplos.

Resposta:

2). O que você entende por polígono regular? Faça um desenho.

Resposta:

3). Dentre as formas geométricas abaixo assinale as que você considera polígono regular.



Resposta:

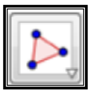
INVESTIGANDO COM O GEOGEBRA

Atividade 1

Identificando alguns polígonos

1). Abram o GeoGebra, cliquem na Janela de Visualização com o botão direito do *mouse* e desmarquem a opção ***Eixos***.

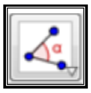
2). Construam alguns polígonos de 3, 4 e 5 lados.

Dica: Usem a ferramenta **Polígono** 

Vocês conhecem o nome de cada um dos polígonos que construíram? Identifique-os.

Resposta:

3). Agora meçam os ângulos dos polígonos construídos.

Dica: Marquem três pontos no sentido horário usando a ferramenta **Ângulo** 

4). Modifiquem os polígonos construídos.

Dica: Clique em **Mover** 

5). De acordo com as modificações realizadas nos polígonos façam, pelo menos, duas observações.

Observação: Na Janela de Álgebra é possível visualizar as medidas dos lados e ângulos dos polígonos construídos.

Registre suas observações:

6). Utilizando a malha como referência tentem modificar os polígonos de modo que tenham lados de mesma medida e ângulos congruentes.

Registrem suas observações:

Vocês conseguiram realizar a tarefa para algum polígono construído? Qual?

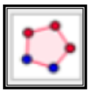
Agora, vamos realizar uma nova construção. Salvem a tarefa anterior clicando em *Arquivo*, *Gravar Como*, selecionando a pasta de destino. Nomeiem a tarefa como Polígonos.

INVESTIGANDO COM O GEOGEBRA

Atividade 2

Descobrindo Novos Polígonos

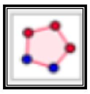
1). Nessa nova tarefa vamos construir polígonos de 3, 4 e 5 lados usando a ferramenta **Polígono Regular.**

Dica: Usem a ferramenta 

1.2). Da mesma maneira que na atividade anterior meçam os ângulos dos polígonos construídos e modifiquem as construções.

O que vocês observam em relação aos polígonos construídos na atividade anterior?

Registre suas observações:

2). Para a construção dos polígonos utilizamos a ferramenta . De acordo com as observações da etapa anterior, por quê chamamos esse polígono de Regular?

Resposta:

INVESTIGANDO COM O GEOGEBRA

Atividade 3
Descobrindo Novas Propriedades

1). Construam um Hexágono Regular.

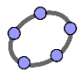
1. 1). Marcando apenas um dos seus ângulos é possível determinar os demais?

Registre suas observações:

Observação: Não esqueçam das ferramentas que o GeoGebra possui para facilitar o trabalho, como por exemplo, medir ângulos.

2). A sua resposta pode ser estendida para outros polígonos? Verifiquem!

Registre suas observações:

INVESTIGANDO COM O GEOGEBRA 

Atividade 4

Descobrindo Novas Propriedades

1). Antes de iniciar as atividades com GeoGebra vamos recordar a seguinte propriedade para triângulos e quadriláteros:

"*A soma das medidas dos ângulos internos de um...*"

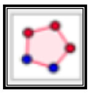
a) *Triângulo é sempre igual a*: __________________.

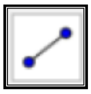
b) *Quadrilátero simples é sempre igual a*: __________________.

Dica: Em caso de dúvida façam as construções e verifiquem!

1.1). Existe alguma relação entre o resultado da propriedade para os polígonos descritos anteriormente?

2). Construam um Pentágono Regular.

Dica: Usem a ferramenta 

2.1). Utilizem a ferramenta **Segmento**  construam as diagonais AC e AD de maneira que o polígono fique dividido em triângulos.

2.2). Escolham um dos triângulos que foram construídos na parte interna do Pentágono Regular e marquem seus ângulos internos.

2.3). Verifiquem se é possível determinar a soma dos ângulos internos do Pentágono Regular a partir dos triângulos construídos. Se sim, descrevam os procedimentos.

3). Descrevam outra maneira de determinar a soma dos ângulos internos do Pentágono Regular.

4). Determinem a soma dos ângulos internos de polígonos regulares de 6, 7 e 8 lados.

Dica: Construam os polígonos e façam a verificação.

4.1). A tabela a seguir relaciona o número de lados e a soma dos ângulos internos de alguns polígonos regulares.

Completem a tabela.

Número de Lados	***Soma dos ângulos internos***
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Dica: Procure preencher a tabela a partir de vossas observações na atividade 2.3.

4.2). Qual a soma dos ângulos internos de um polígono regular de 12 lados? E 20 lados?

4.3). Investiguem que relação existe entre os números (soma dos ângulos internos)?

5). É possível estabelecer uma relação dos ângulos internos para um polígono regular de ***n*** lados? Apresentem suas observações.

Registrem suas observações:

Agora, vamos salvar a construção clicando em *Arquivo*, *Gravar Como*, selecionando a pasta de destino (Atividades em AGD). Nomeiem a tarefa como Atividade 4.

INVESTIGANDO COM O GEOGEBRA

Atividade 5

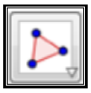
Ângulos de um Polígono Regular

Recordando o que estudamos na atividade anterior, temos duas observações descritas por alguns alunos, que ajudam a reforçam a ideia de como encontrar a *soma dos ângulos internos de um polígono regular.*

“O número de lados de um polígono menos 2, multiplicado por 180°, vai ser igual o resultado da soma dos ângulos internos de um polígono ”.

“A soma é igual a $(n - 2)\times 180°$*”.*

1). Essa fórmula pode ser aplicada a todos os polígonos? Construam alguns polígonos e verifiquem!

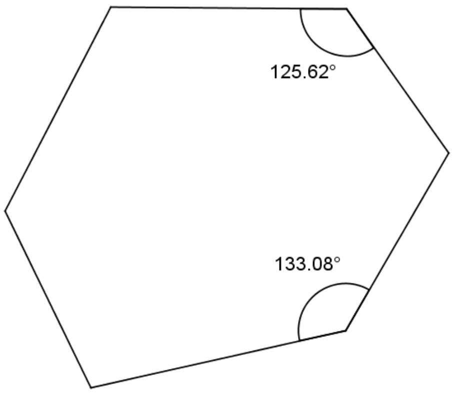
Dica: Usem a ferramenta **Polígono** 

1.1). Qual procedimento vocês utilizaram para chegar a essa conclusão?

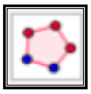
Registrem. Se preciso façam um desenho.

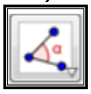
2). De acordo com o que já estudamos até aqui o hexágono abaixo é regular? Expliquem.

2.1). Qual a soma dos ângulos internos desse polígono?

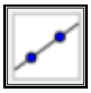


Resposta:

3). Construam um **Polígono regular** 

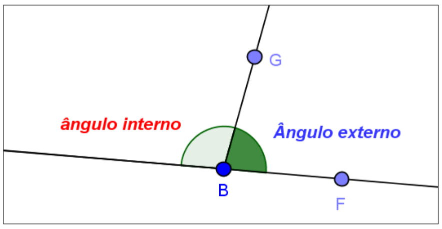
3.1). Meçam um ângulo interno do polígono construído utilizando a ferramenta **Ângulo** 

3.2). Construam uma reta passando pelo lado do polígono adjacente ao ângulo que vocês mediram.

Dica: Usem a ferramenta **Reta** 

3.3). Marquem um **Ponto** sobre a reta (fora do polígono) a fim de construir o ângulo externo.

3.4). Meçam o ângulo externo adjacente ao ângulo interno.



Observação: Clique em três pontos no sentido horário incluindo o ponto fora do polígono.

4). Modifiquem o polígono construído. 

4.1). Quanto mede a soma dos dois ângulos construídos?

Resposta:

5). A partir de vossas observações sobre polígonos regulares, é possível determinar os demais ângulos externos? Expliquem.

Resposta:

6). Quanto mede a soma dos ângulos externos do polígono regular que vocês construíram?

Resposta:

7). É possível determinar a soma dos ângulos externos de qualquer polígono regular? Justifiquem.

Registrem suas observações:

Observação: Não esqueçam de gravar as atividades.

APÊNDICE D – ATIVIDADES DA SEGUNDA INTERVENÇÃO

INVESTIGANDO COM O GEOGEBRA

Atividade Preliminar

Recordar, explicar e desenhar

Concorrente

Paralelo(a)

Transversal

Me lembra...

Porque...

Um desenho possível seria:

Atividade Preliminar
Recordar, explicar e desenhar

1). O que você entende por retas concorrentes? Faça um desenho.

Resposta:

Desenhe aqui.

2). O que você entende por retas paralelas? Faça um desenho.

Resposta:

Desenhe aqui.

3). O que são retas transversais? Faça um desenho.

Resposta:

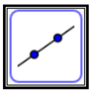
Desenhe aqui.

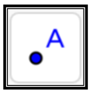
INVESTIGANDO COM O GEOGEBRA

Atividade 1

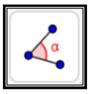
Concorrentes, nem tanto...

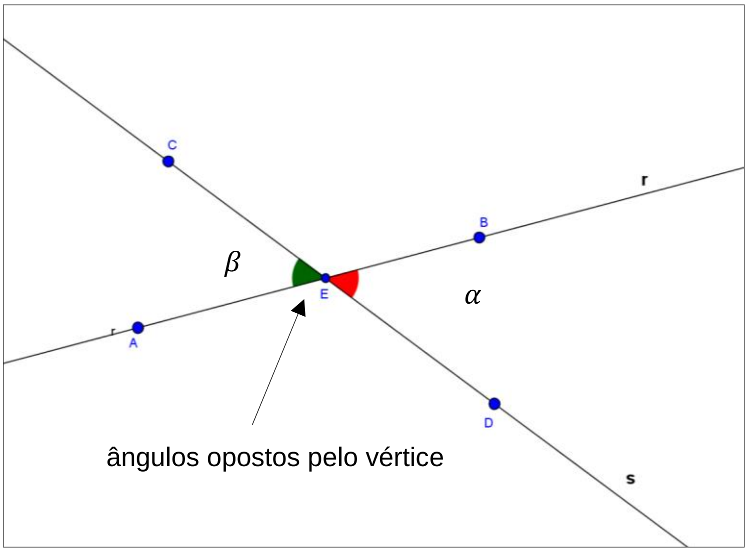
1). Construam duas retas concorrentes.

Dica: Utilizem a ferramenta **Reta** 

1.1). Utilizando a ferramenta **Ponto**  construam o ponto **E** (interseção entre as duas retas).

1.2). A partir das retas que vocês construíram meçam os ângulos opostos pelo vértice.

Dica: Com a ferramenta **Ângulo**  selecionada cliquem em três pontos consecutivos no sentido horário. A Figura seguinte ilustra a construção de retas concorrentes e ângulos opostos pelo vértice. Por exemplo, para construção do ângulo α deve-se tocar nos pontos DEB (nesta ordem).



1.3). Movam livremente as retas.

Dica: Utilizem a ferramenta **Mover** 

1.4) O que vocês observaram?

Registro das observações:

2). Que relação existe entre os pares de ângulos possíveis (a partir do ponto E)?

Resposta:

3). Identifiquem os ângulos suplementares na construção.

Resposta:

4). Construam (individualmente) um pequeno texto relatando suas descobertas. Procurem detalhar o que aprendeu a partir da manipulação no GeoGebra. Se julgar necessário, façam desenhos para exemplificar.

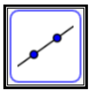
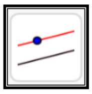
Ao final tire um *print* da sua construção, em seguida cliquem no ícone , depois em **Gravar**.

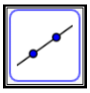
INVESTIGANDO COM O GEOGEBRA

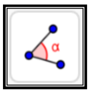
Atividade 2

Duas retas paralelas e uma transversal, o que têm em comum?

1). Construam duas retas paralelas.

Dica: Utilizem a ferramenta **Reta**  em seguida selecione a ferramenta **Reta Paralela**  e cliquem na reta construída.

1.1). Construam uma reta transversal as paralelas. 

1.2). Com a ferramenta **Ângulo**  selecionada construam os ângulos que podem ser formados clicando na reta transversal e nas retas paralelas, respectivamente.

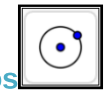
1.3). Movam livremente  a reta transversal e em seguida as paralelas.

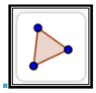
1.4). O que vocês observaram?

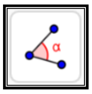
Registro das observações:

2). Investiguem outras relações entre os pares de ângulos que podem ser formados. Como sempre registrem vossas observações e se julgar necessário façam um desenho para melhor esclarecer as descobertas. Ao final tire um *print* e salve a construção.

3). Construam uma circunferência.

Dica: Utilizem a ferramenta **Circulo dados Centro e Um de seus Pontos** 

3.1). Construam um quadrilátero.  inscrito na circunferência.

3.2). Construam os ângulos internos do quadrilátero. 

3.3) Estabeleçam conjecturas em relação aos ângulos internos do polígono. Não esqueçam de registrar as descobertas.

Dica:

Uma **conjetura** é uma ideia, fórmula ou frase, a qual não foi provada ser verdadeira, baseada em suposições ou ideias com fundamento não verificado. As **conjecturas** utilizadas como prova de resultados matemáticos recebem o nome de

4). Individualmente, façam um pequeno texto relatando de que forma deu-se a atividade e todas descobertas. Como sempre, para melhor esclarecer, desenhos são bem vindos. Ao final, tire um *print* e salve a construção.