UFRRJ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

Uma proposta de ensino de cônicas com o auxílio do GeoGebra

Alan Jorge Ciqueira Gonçalves

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE CÔNICAS COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

ALAN JORGE CIQUEIRA GONÇALVES

Sob a Orientação do Professor
André Luiz Martins Pereira

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ
Agosto de 2015

UFRRJ / Biblioteca Central / Divisão de Processamentos Técnicos

516.152
G635p
T

Gonçalves, Alan Jorge Ciqueira, 1982-
Uma proposta de ensino de cônicas com o auxílio do GeoGebra / Alan Jorge Ciqueira Gonçalves. - 2015.
82f.: il.

Orientador: André Luiz Martins Pereira.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Bibliografia: f. 80-82.

1. Cônicas – Teses. 2. Cônicas – Ensino auxiliado por computador – Teses. 3. Geometria – Estudo e ensino – Teses. 4. Ensino auxiliado por computador - Teses. 5. Construtivismo (Educação) – Teses. I. Pereira, André Luiz Martins, 1980- II. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ALAN JORGE CIQUEIRA GONÇALVES

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 31/08/2015

André Luiz Martins Pereira - Doutor em Matemática – UFRRJ

(Orientador)

Cláudio Cesar Saccomori Júnior - Doutor em Matemática – UFRRJ

Gladson Octaviano Antunes – Doutor em Matemática – UNIRIO

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sua misericórdia, meu professor orientador André, por toda dedicação e inspiração, meus familiares e amigos, a todos meus colegas do Profmat que compartilharam comigo o brilhantismo de suas resoluções, suas angústias pessoais e seus êxitos profissionais. Muito obrigado a todos por mais uma etapa realizada. Aproveito a oportunidade para agradecer à Capes pelo auxílio financeiro.

“Uma grande descoberta envolve a solução de um grande problema, mas há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto; porém, se ele desafiar sua curiosidade e fizer funcionar sua capacidade inventiva, e caso você o resolva sozinho, então poderá experimentar a tensão e o prazer do triunfo da descoberta.”

George Polya

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo melhorar a compreensão do estudo de cônicas. Para isto, usaremos como fundamentação teórica na construção das atividades propostas a teoria construtivista geométrica de Van Hiele. Além disso, em consonância com as novas ferramentas de ensino e aprendizagem, utilizaremos um software de geometria dinâmica, GeoGebra.

Palavras-chave: Construtivismo, Teoria de Van Hiele, Cônicas, GeoGebra

ABSTRACT

This study aims to improve understanding of studies of conics. For this, we will use as theoretical foundation in the construction of the proposed activities, the geometric constructivist theory of Van Hiele. Moreover, in line with the new teaching, and learning tools, we use a dynamic geometry software, the GeoGebra.

keywords: Constructivism, Theory of Van Hiele, Conics, GeoGebra

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Considerando as dificuldades apresentadas por alunos da 3ª série do Ensino Médio em compreender e abstrair e até mesmo de alguns professores em ensinar e aplicar as atividades que abordam o estudo de cônicas, parte importante da Geometria Analítica, buscaremos propor atividades que possam sanar essas lacunas apontadas, e assim aprimorar o aprendizado do tema em questão.

O desenvolvimento da pesquisa se dará utilizando a Teoria Geométrica de Van Hiele, com a intenção desenvolver uma pratica didática que contribua para a melhoria do aprendizado do aluno sobre o tema abordado, e leve o professor a refletir sobre a sua prática docente.

A princípio utilizaremos o GeoGebra como um elemento, propondo ao aluno uma análise mais minuciosa acerca do assunto e suas propriedades. A metodologia de ensino empregada está voltada para a teoria construtivista, cuja finalidade é incentivar o aluno a construir o seu próprio conhecimento, tendo o professor com o papel de mediador do assunto. Sendo assim, optou-se pela utilização da teoria de Van Hiele, ou seja, dos níveis de Van Hiele associado ao ensino-aprendizagem, visando oferecer de forma gradativa ao aluno a capacidade e a maturidade necessária para o aprendizado.

Foram elaboradas atividades sobre os temas de Elipse, Hipérbole e Parábola, utilizando o GeoGebra. Atividades essas que, são apresentadas com um passo a passo em forma de tutoriais. Em suas elaborações, houve a preocupação que elas fossem investigativas e que levassem a aprendizagem através de uma análise e reflexão em cada um de seus passos.

O primeiro capítulo apresenta um estudo sobre a Teoria Construtivista e suas implicações na Teoria Geométrica de Van Hiele. No segundo capítulo são encontradas justificativas para escolha do software utilizado, o GeoGebra, e uma apresentação de seus principais recursos utilizados no presente trabalho. O terceiro capítulo faz um estudo das propriedades e conceitos sobre Elipse, Hipérbole e Parábola. Para o quarto e último capítulo são apresentadas as atividades que propõem uma metodologia para o estudo de cônicas seguindo um modelo geométrico e usufruindo dos recursos tecnológicos do GeoGebra.

Capítulo 1

Construindo o Conhecimento

1.1 Construtivismo

A teoria construtivista, apontada como uma das mais importantes na educação contemporânea, surgiu a partir dos estudos do cientista natural Jean Piaget (1896 - 1980) que, na observação de crianças e adolescentes, dividiu o desenvolvimento humano em períodos, verificando a construção do conhecimento conforme o aparecimento de novas qualidades do pensamento (livro: A psicologia p.101) e as interações do sujeito e o meio.

A psicologia genética ou construtivismo investiga a explicação do desenvolvimento cognitivo, considerando-o um processo fragmentado em períodos (ou fases) de contínua adaptação do organismo em relação ao meio. Todos os indivíduos passam por esses períodos, no entanto, o início exato e o término são desconhecidos, pois dependem de fatores biológicos, educacionais e sociais.

Cada fase representa um estágio de equilíbrio, sempre mais regular entre organismo e meio, onde ocorrem assimilação e acomodação que são mecanismos de interação. Inicia-se a construção do conhecimento pela assimilação, estruturando e esquematizando os subsídios que o sujeito obtém do meio. Com isso, é possível concluir que a interação, chamada de assimilação, entre sujeito e objeto, constrói o conhecimento, segundo Piaget, a saber:

> “... uma integração a estruturas prévias, que podem permanecer invariáveis ou são mais ou menos modificadas por esta própria integração, mas sem descontinuidade com o estado precedente, isto é, sem serem destruídas, mas simplesmente acomodando-se à nova situação.” (PIAGET, 1973)

Ou seja, a assimilação é a associação ocorrente entre os conceitos existentes e os novos conceitos aprendidos, que se adaptam com as estruturas cognitivas existentes.

Em outra perspectiva, Vygotsky (1896-1934) baseia o desenvolvimento do sujeito em um processo sócio-histórico, concebendo a sua teoria com maior foco no papel da linguagem e do desenvolvimento cognitivo pela interação do sujeito com o meio em que se encontra inserido. A aquisição de novos conceitos é dada pela relação entre pensamento e linguagem, pelo capital cultural do sujeito no processo de desenvolvimento de novos significados e no papel da escola de transmitir novas informações.

Como aponta Vygotsky:

> “a aprendizagem é (...) um processo essencialmente social que ocorre na interação com os adultos e os colegas. O desenvolvimento é resultado desse processo, a escola, o lugar privilegiado para essa estimulação. A educação passa, então, a ser vista como processo social sistemático de construção da humanidade.” (VYGOTSKY, 2003)

O sujeito, participante ativo e vigoroso, é capaz de interferir em cada estágio do processo de desenvolvimento, compreendendo, portanto, o seu mundo e a si mesmo. Sendo assim, Vygotsky considera que a linguagem interfere de maneira significativa no processo de desenvolvimento do sujeito, pois é através dela que as reflexões e elaborações de experiências sobre o social e o pessoal são idealizadas.

> “A fala humana é, de longe, o comportamento de uso de signos mais importante ao longo do desenvolvimento da criança. Através da fala, a criança supera as limitações imediatas de seu ambiente. Ela se prepara para a atividade futura; planeja, ordena e controla o próprio comportamento e o dos outros.” (VYGOTSKY, 2003)

Para Vygotsky, outro ponto importante no processo de aprendizagem é a Zona de Desenvolvimento Proximal. Ela pode ser definida como a distância entre a fase de desenvolvimento potencial (objetivo) e a fase de desenvolvimento real (saberes internalizados). Onde, entre o objetivo a ser alcançado e os saberes internalizados há a mediação de um adulto, pois o desenvolvimento é um processo social, ou seja, com atividades compartilhadas socialmente. Logo, define-as Zona de Desenvolvimento Proximal como:

> “A distância entre o nível de desenvolvimento, determinado pela capacidade de resolver, independentemente um problema, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de um problema sob a orientação de um adulto ou em colaboração com outro companheiro capaz.” (VYGOTSKY, 1997)

Com isso, pode-se inferir o juízo que o ambiente escolar, onde o professor tem a função de interagir e provocar o aluno, é o espaço que permite a intervenção pedagógica intencional e a interação com o meio e os outros, proporcionando o cenário para o ensino-aprendizagem.

Neste ponto é possível perceber encontros e divergências nas teorias educacionais de Vygotsky e Piaget, pois os dois idealizam a criança como sujeito ativo e detentor de saberes. Porém, faz-se necessária uma análise mais profunda a cerca deste assunto, Erickson Nunes Martins, em sua dissertação “Uma Abordagem Construtivista do Teorema de Tales Sob a Perspectiva da Teoria de Van Hiele” (2014), faz a seguinte análise comparativa entre Piaget e Vygotsky.

> Analise comparativa entre PIAGET E VYGOTSKY:
>
> • PIAGET (1896 – 1980)
>
> ✓ Para Piaget, o desenvolvimento mental se dá de forma gradual, de acordo com a faixa etária, ou seja, a maturação biológica do indivíduo. A formação dos saberes estão associados às fases de desenvolvimento sensório-motor, pré-operacional, operações concretas e operações formais.

- ✓ O pensamento está ligado à organização de estruturas sócio-motores, à medida que o processo de desenvolvimento de cognição contribui para o desenvolvimento da linguagem.
- ✓ A aprendizagem é uma função do desenvolvimento da criança com o social, momento em que o indivíduo realiza modificações, descobertas e conjecturas.
- ✓ A teoria está pautada na interação do sujeito com o objeto físico.

• VYGOTSKY (1896 – 1934)

- ✓ Para Vygotsky, o desenvolvimento do ser humano se dá pelo processo de interação com o meio social, onde o ambiente social e a inter-relação dos fatores internos e externos são responsáveis pelos elos desencadeadores dos processos mentais.
- ✓ O desenvolvimento e a aprendizagem, bem como o pensamento e a linguagem, são vistos de maneira independentes, entretanto, se complementam, ao passo em que atuam de maneira conjunta no desenvolvimento dos processos mentais. Isto é, quanto mais se aprende, mais se desenvolve.

- ✓ A teoria está pautada nas trocas entre as pessoas no ambiente social. (Martins, 2014)

1.2 Teoria Geométrica de Van Hiele

A *Teoria de Van Hiele*, ou o *Modelo de Van Hiele* é uma construção teórica de aprendizagem em geometria que teve princípio com Dina Van Hiele-Geldof e seu marido Pierre Marie Van Hiele, dois educadores holandeses de matemática do ensino secundário, em seus trabalhos de doutorado na Universidade de Utrecht. As teses resultantes do casal, um modelo de ensino e aprendizagem de geometria e um exemplo concreto de aplicação desse modelo em cursos de geometria, foram resultados da observação de seus alunos resolvendo tarefas geométricas do curso secundário na Holanda.

Após a conclusão da tese, Dina falece e Pierre apresenta os níveis, fases e propriedades do modelo. O artigo *O Pensamento da Criança e a Geometria* chama a atenção de pesquisadores soviéticos e americanos.

Na União Soviética, no ano de 1960, o *Modelo de Van Hiele* foi adotado como base na elaboração de um novo currículo de geometria. Na década de 1970, nos Estados Unidos, muitos pesquisadores tomaram como base de estudos o modelo para testar a validade, a viabilidade e as vantagens de sua aplicação. Em 1973, Hans Freudenthal publicou o livro intitulado *Mathematics as an Educational Task,* no qual citava o trabalho dos Van Hiele e, em 1976, o professor americano Izaak Wirsup começou a divulgar o modelo em seu país (CROWLEY, 1994).

Segundo Nasser (1993, p. 32),

> "essas mudanças não foram reconhecidas nacionalmente, pois não são mencionadas em revisões sobre o ensino de Geometria na União Soviética,... apesar de serem mencionadas pelos Van Hiele em duas ocasiões: no prefácio do seu livro Structureand Insight e no seu prefácio para uma monografia sobre o Brooklin College Project." (Nasser, 1993)

O casal Van Hiele sustenta que o aprendizado em geometria apresenta níveis de raciocínio ou níveis de desenvolvimento. O modelo propõe que os alunos evoluam segundo uma sequência de níveis de compreensão.

> "A formulação desse sistema de níveis ocorreu enquanto Pierre Van Hiele estudava alguns dos trabalhos de Piaget. Durante esse estudo ele verificou, como fizera Piaget, que os problemas ou tarefas que são apresentados às crianças, freqüentemente, requerem um conhecimento de vocabulário ou propriedades além do nível de pensamento da criança." (FANTINEL, 1998).

Um resumo relativo aos níveis da Teoria de Van Hiele é representado no quadro seguinte.

Quadro 1– Níveis de Van Hiele para compreensão em geometria

Nível de Van Hiele	Características	Exemplos
Básico: reconhecimento	Identificação, comparação e nomenclatura de figuras geométricas, com base em sua aparência global.	Classificação de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
Nível 1: Análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades: 4 lados, 4 ângulos retos, lados iguais, lados opostos paralelos.
Nível 2 : Síntese ou Abstração	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra: argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição do quadrado pelas propriedades mínimas: 4 lados iguais e 4 ângulos retos. O retângulo é um paralelogramo, pois também possui os lados opostos paralelos.
Nível 3: Dedução	Domínio do processo dedutivo e de demonstrações; reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
Nível 4: Rigor	Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma Geometria finita.

Fonte: NASSER, L. SANT'ANNA, N.F.P (coordenadoras). Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele. Instituto de matemática – UFRJ. Projeto Fundão. Rio de Janeiro, 1997.

Nasser (1993) relata que, de início, a numeração no modelo de Van Hiele era feita de 0 a 4. Contudo, Pierre Van Hiele aderiu à numeração de 1 a 5, pois havia encontrados alunos que, originalmente, não se adaptavam no nível denominado zero, ou básico.

Propriedades do Modelo de Van Hiele

Os Van Hiele destacam algumas propriedades que podem auxiliar o trabalho do professor. As propriedades do modelo convêm para os educadores nortearem as tomadas de decisões a serem feitas quanto ao ensino. As características dos níveis de raciocínio são relevantes para uma melhor compreensão da teoria.

- *Sequencial* – quando, para o tema escolhido, todos os níveis em sequência devem ser passados para melhor aproveitamento e compreensão. Não há como um aluno ter atingido o nível 3 ser ter passado pelo nível 2, por exemplo. É importante salientar que a mudança de um nível para outro independe da idade do aluno. E um mesmo indivíduo pode apresentar níveis distintos em assuntos diferentes.

- *Avanço* – o progresso do aluno depende mais do conteúdo e dos métodos utilizados do que da idade considerada, e nenhum nível pode ser pulado. Porém, a escolha do método a ser utilizado pode acelerar avanço.

- *Intrínseco e Extrínseco* – conceitos geométricos implícitos em um nível tornam-se explícitos no nível seguinte.

- *Linguística* – uma linguagem adequada é fundamental para compreensão e abstração do raciocínio matemático.

> "Assim, cada nível, necessita de uma linguagem apropriada. Pierre van Hiele diz que *cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos e seus próprios sistemas de relações que ligam esses símbolos."* (apud CROWLEY, 1994, p. 5).

- *Combinação Inadequada* – Para que aconteça realmente aprendizado por parte do aluno se faz necessário que aluno, curso e nível estejam associados. Para sair de um nível ao nível seguinte, o professor deve utilizar linguagem própria ao nível em questão, proporcionando assim as condições necessárias ao método.

Fases da Aprendizagem

Os Hiele propõem uma aprendizagem em sequência organizada em cinco fases para cada nível e, segundo eles, somente após completar a quinta fase o nível seguinte será conquistado pelo aluno.

Segundo Fantinel (1998), para que haja o avanço de um nível para o próximo, Van Hiele estabeleceu cinco *Fases de Aprendizagem* que devem ser vivenciadas pelos alunos:

- Fase 1: Informação/Inquirição

  Professor e alunos dedicam sua atenção a conversas e atividades a respeito dos objetos de estudo deste nível. São feitas observações, levantadas questões e é introduzido o vocabulário específico de cada nível. Nessa fase, o professor percebe quais os conhecimentos anteriores que os alunos têm do assunto, e estes percebem qual direção os estudos irão tomar.

- Fase 2: Orientação Dirigida

  Os alunos exploram o tópico de estudo através de materiais selecionados cuidadosamente pelo professor. Estas atividades devem revelar gradativamente aos alunos as estruturas características do nível. As atividades, em sua maioria, são tarefas de uma só etapa, que possibilitam respostas específicas e objetivas.

- Fase 3: Explicação

  Com base em suas experiências anteriores, os alunos expressam e modificam seus pontos de vista sobre as estruturas que foram observadas. Tal verbalização requer que os alunos articulem conscientemente o que poderiam ser apenas ideias vagas e não desenvolvidas. O papel do professor deve ser mínimo, apenas auxiliando os alunos a usar a linguagem apropriada, deixando-os independentes na busca da formação do sistema de relações em estudo.

- Fase 4: Orientação Livre

  Os alunos procuram soluções próprias para tarefas mais complicadas, que admitem várias soluções, e para problemas em aberto. Segundo Hoffer,

> “eles ganham experiências em achar seus próprios caminhos ou resolver as tarefas. Orientando-se a si próprios no campo da investigação, muitas relações entre os objetos de estudo tornam-se explícitas aos alunos.” (apud CROWLEY, 1994, p.6).

- Fase 5: Integração

  O aluno revê e resume o que aprendeu, com o objetivo de formar uma visão geral do novo sistema de objetos e relações. Como consequência, há uma unificação e internalização num novo domínio de pensamento.

> “Nessa fase, o papel do professor é de auxiliar no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais sem, no entanto, introduzir idéias novas ou discordantes.” (FANTINEL, 1998)

Com exceção da última fase, as outras podem ocorrer em qualquer ordem e até mesmo simultaneamente. Quando chegam à última, os alunos alcançam um novo nível e estão prontos para recomeçar as fases no nível imediatamente superior (CROWLEY, 1994).

1.3 O Uso da Tecnologia no Ensino-Aprendizagem

A tecnologia presente na atualidade está cada vez mais inserida no cotidiano escolar. Nas salas de aula, esta inserção benéfica para discentes e docentes faz emergir um questionamento, pois, além das múltiplas vantagens que a tecnologia pode prover, será ela capaz de revolucionar o ensino-aprendizagem?

> "... marca um novo modelo de aprendizagem que ultrapassa o ensino tradicional reorientando-se para o construtivismo social. Ao promover um espaço de colaboração *online* permite a construção coletiva do conhecimento, pelas oportunidades de partilha, comunicação, interação e promove a autonomia responsabilizando os alunos pelo seu processo de aprendizagem." (Flores, Flores & Escola, 2008, p. 40)

Os computadores combinados aos meios de comunicação podem beneficiar o rompimento de alguns paradigmas na educação, auxiliando possíveis situações para a utilização de software de geometria dinâmica, segundo Jucá (2006).

De acordo com Azevedo (2008, p.01), a Internet se constitui num grande oceano do novo planeta informacional, o principal meio de circulação de informações na atualidade, que pode propiciar a interação com diferentes modos de representação e imagens, diferentes indivíduos, diferentes espaços e unicidade de tempo, configurando-se como um importante ambiente colaborador no processo de ensino-aprendizagem dos estudantes.

Silva Filho (1998) se posiciona de modo semelhante ao considerar que as possibilidades e os limites do uso da Internet no processo educativo serão definidos pela qualidade das interações na relação professor-estudante no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos escolares. Esclarece que a Internet pode se constituir em meio auxiliar, facilitador do ato pedagógico, possivelmente contribuindo para ampliar e diversificar as experiências de vida dos estudantes, para a democratização da informação, do conhecimento e das relações. O computador, pelas suas potencialidades em nível de cálculo, visualização, modelação de micromundos, é o instrumento mais poderoso de que atualmente dispõem os educadores matemáticos para proporcionar experiências aos seus alunos (PONTE *apud* BORRÕES, p. 01)

> “O computador, símbolo e principal instrumento do avanço tecnológico, não pode mais ser ignorado pela escola. No entanto, o desafio é colocar todo o potencial dessa tecnologia a serviço do aperfeiçoamento do processo educacional, aliando-a ao projeto da escola com o objetivo de preparar o futuro cidadão.” (Milani 2001, p. 175)

É importante salientar que mais importante do que o computador, o software ou qualquer ferramenta tecnológica em si, é a forma como ela é explorada. De acordo com a proposta de ensino adotada, seleciona-se um recurso tecnológico conveniente.

Nesse sentido, a tecnologia na escola pode proporcionar um ambiente favorável para que o aluno construa de forma significativa o seu conhecimento, interagindo com o meio e se tornando um sujeito ativo no processo de desenvolvimento dos saberes. O professor, neste cenário, exerce a função de mediador do processo de aprendizagem.

Capítulo 2

O Software GeoGebra

2.1 Escolha do GeoGebra

Recursos tecnológicos são inseridos no cotidiano escolar, nos levando a refletir em possíveis melhorias no processo de ensino-aprendizagem. Ter conhecimento da tecnologia a ser utilizada e como enquadrar essa tecnologia de forma favorável ao desenvolvimento de determinado conceito é o ponto central para uma conveniente aplicação didática.

Há uma vasta lista de recursos disponíveis, como internet, editores de texto, aplicativos, softwares educacionais, entre outros. Essas ferramentas impulsionam uma nova didática, já que o avanço tecnológico é iminente.

Assim como é recomendado pelo PCN+:

> "Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias a sua formação."(PCN+, p.111)

Quando se trata de Geometria Analítica, a utilização de tecnologias para auxiliar o processo ensino-aprendizagem, destacam-se:

> "- representações do plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras;
> - interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos;
> - reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características;
> - associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas, e vice-versa;
> - construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles." (PCN_s+, 2006, p. 122)

A justificativa da escolha do Software GeoGebra para o presente trabalho, advém da facilidade de aplicação à Geometria Analítica, uma vez que as ferramentas necessárias para geometria dinâmica[1] estão disponíveis em sua barra de menus (pontos, segmentos, retas, seções cônicas, equações e coordenadas), entre outras mais apropriadas à Álgebra e ao Cálculo. Além de ser um software de livre acesso, isto é, grátis, não acarretando nenhum custo extra tanto para as instituições de ensino quanto para os professores e alunos que podem ter em suas casas tal recurso.

O objetivo da utilização de um recurso tecnológico é possibilitar, por meio de experimentação e construção, que os alunos descubram as propriedades e relações existentes nas figuras produzidas. Assim, podendo verificar que para construí-las adequadamente há a necessidade de ter compreensão sobre tais propriedades e ser capaz de viabilizar uma melhor abstração na geometria.

Outro fator que deve ser mencionado é a praticidade de instalação do Software por ser um programa livre e pela ampla colaboração de programadores de todas as partes do mundo, com o objetivo de melhorar seu desempenho para favorecer sua utilização no ensino de Matemática. No Rio de Janeiro, com sede no *Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense*, temos o *Instituto GeoGebra*, com objetivo de afiliar interessados no uso do Software como ferramenta de ensino e aprendizagem, gerando uma comunidade aberta que

[1]Termo utilizado para indicar um método dinâmico e interativo para o ensino e aprendizagem de geometria e suas propriedades usando recursos computacionais.

compartilha seus conhecimentos e propõe materiais de apoio para alunos e professores.

2.2 Ferramentas Básicas do GeoGebra

Segundo o manual de ajuda, o GeoGebra, que tem como propósito possibilitar que o estudo e o aproveitamento da Matemática se desenvolva através de construções e análise das situações construídas, é um software de matemática dinâmica, criado por Markus Hohenwarter. Classificado como programa de acesso livre, podendo ser utilizado em variados níveis de ensino, apresentando uma interface onde se relaciona Geometria, Álgebra e Cálculo.

Download

O programa pode ser facilmente encontrado em http://www.geogebra.org.

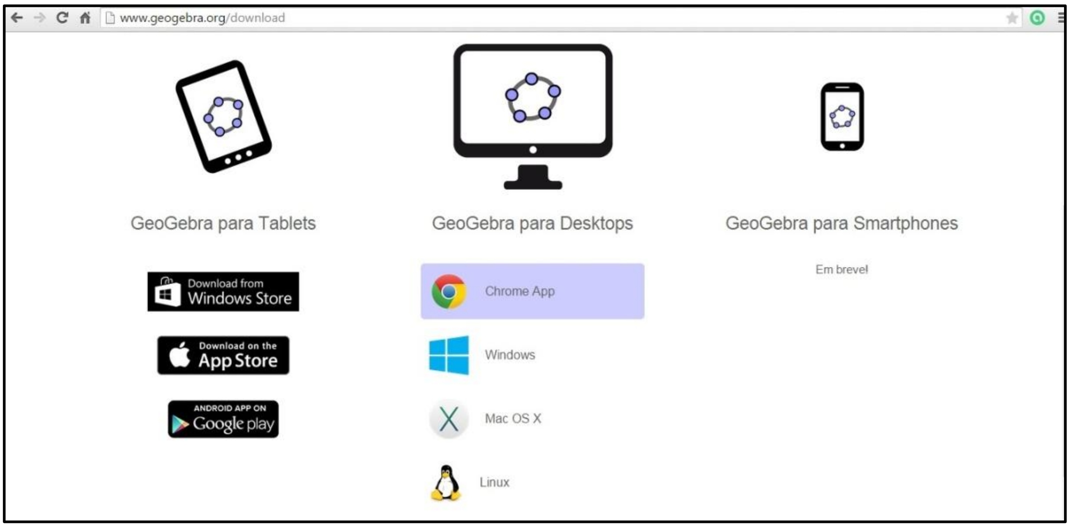


Figura 1

Depois de clicar na opção, de acordo com o sistema operacional do computador em que for instalado, basta abrir o arquivo GeoGebra e executar. Após essa etapa a tela do GeoGebra é apresentada.

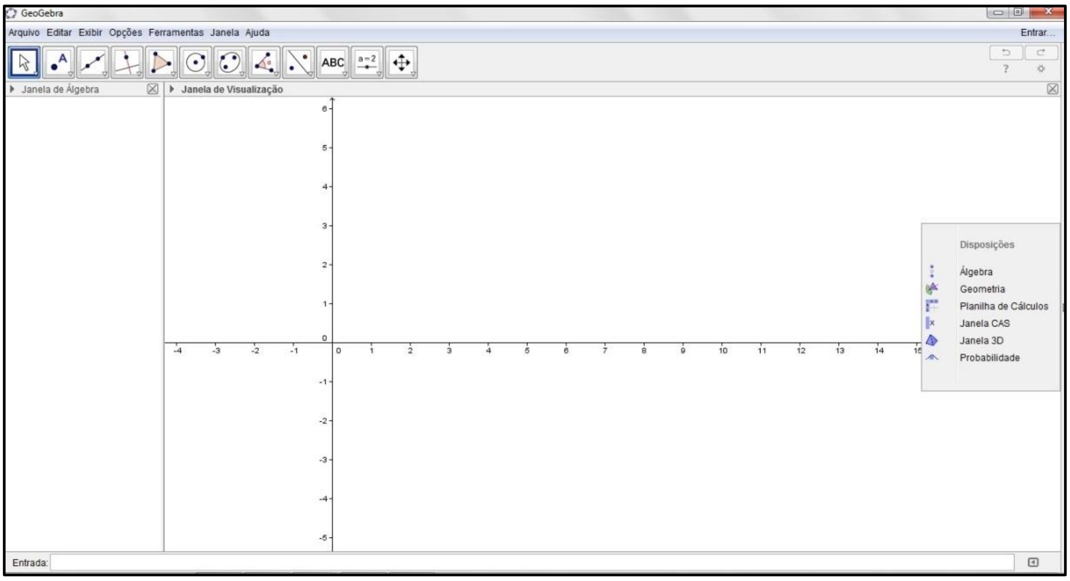


Figura 2

Interface

O GeoGebra apresenta uma interface que possibilita a visualização de uma folha de cálculo (Planilha), zona algébrica (Janela de Álgebra), zona gráfica (Janela de Visualização), barra de ferramentas, entradas de comandos e barra de menus, como mostra a figura 3.

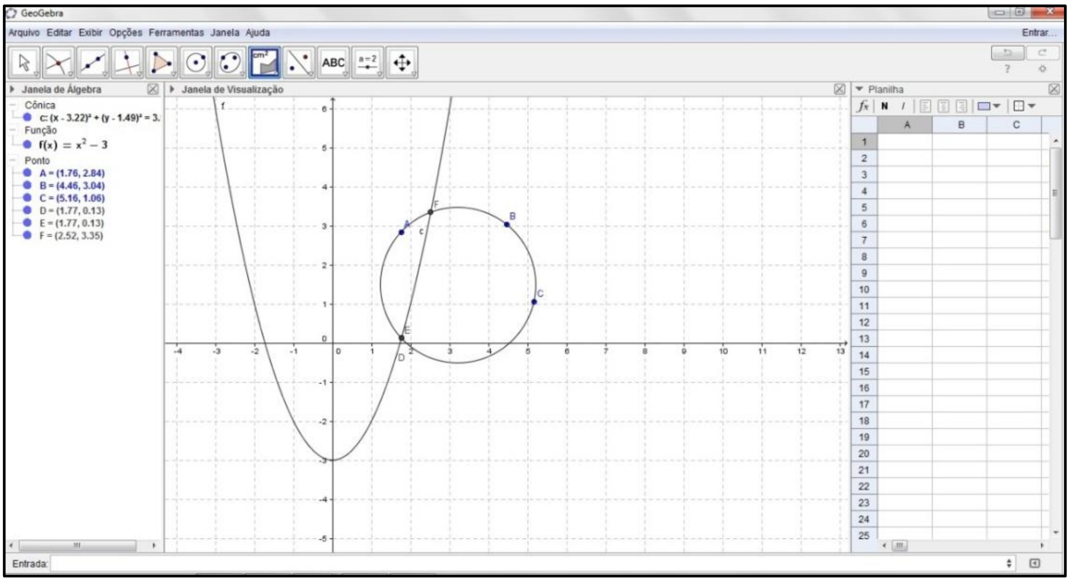


Figura 3

Barra de Ferramentas

No software, a barra de ferramentas é constituída por doze ícones. Para visualizar as opções que cada ícone oferece, basta clicar e manter pressionada a seta desenhada no lado direito inferior.

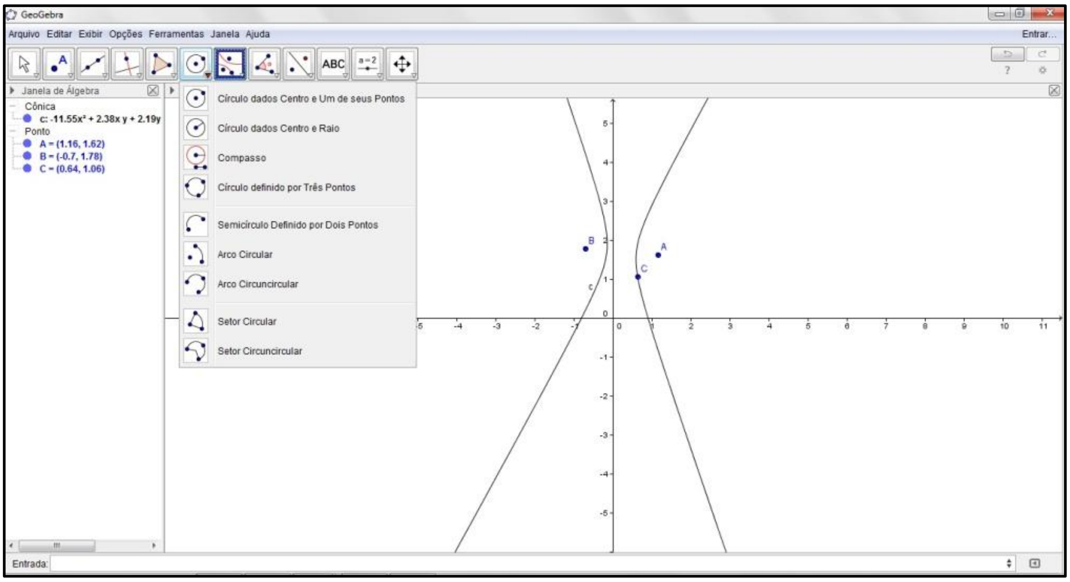
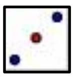
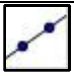
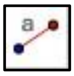
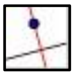
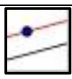
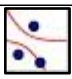


Figura 4

Os principais recursos utilizados no presente trabalho mostram-se organizados na tabela a seguir:

Mover: 	Seleciona, move e manipula os objetos.
Ponto: 	Criar um ponto em um espaço livre.
Interseção de Dois Objetos: 	Localiza os pontos de interseção entre dois objetos.
Ponto Médio ou Centro: 	Cria o ponto médio entre dois objetos.

Reta: 	Cria uma reta que passa por dois pontos.
Segmento: 	Cria um segmento de reta que liga dois pontos.
Segmento com Comprimento Fixo: 	Cria um segmento de reta definido o seu comprimento.
Reta Perpendicular: 	Permite construir uma reta perpendicular a uma reta, semirreta, segmento de reta, vetor, eixo ou lado de um polígono.
Reta Paralela: 	Permite construir uma reta paralela a uma reta, semirreta, segmento de reta, vetor, eixo ou lado de um polígono.
Elipse: 	Cria uma elipse dado três pontos, sendo dois focos e um ponto na curva.
Hipérbole: 	Cria uma hipérbole dado três pontos, sendo dois focos e um ponto na curva.
Parábola: 	Cria uma parábola dado um ponto e uma reta diretriz.

Como exemplo do uso dos recursos do GeoGebra, e consequentemente sua importância no ensino da Geometria Analítica, apresentaremos a seguinte atividade:

Atividade: *Determine a equação da parábola que tem foco no ponto A(1, 5) e reta diretriz de equação y = - 3.*

Na caixa de entrada, digite o foco da parábola e clique no botão *enter*.

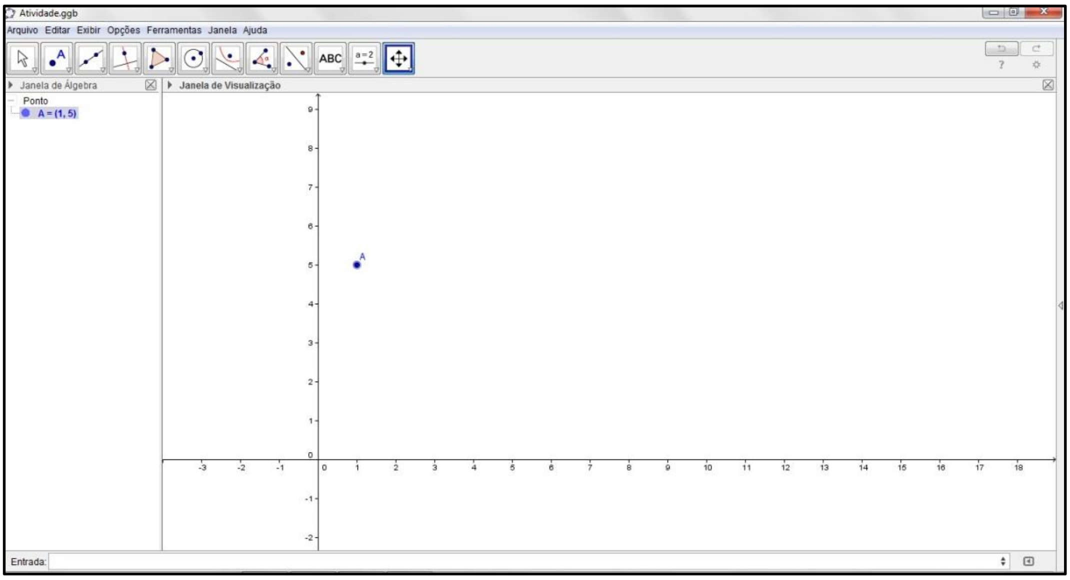


Figura 05

Retorne à janela de entrada, localizada na parte inferior da interface, escreva a equação da reta diretriz, y = - 3 e clique na tecla *enter* para construir o objeto.

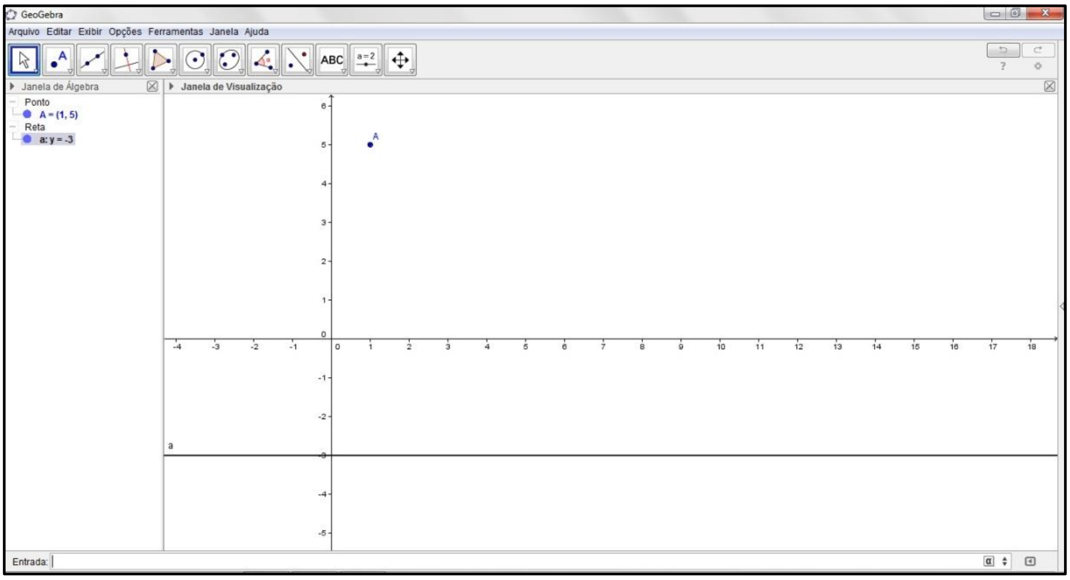


Figura 06

Na barra de ferramentas selecione a opção elipse, 7º ícone, parábola. Clique na seta no lado direto inferior para visualizar a ferramenta parábola.

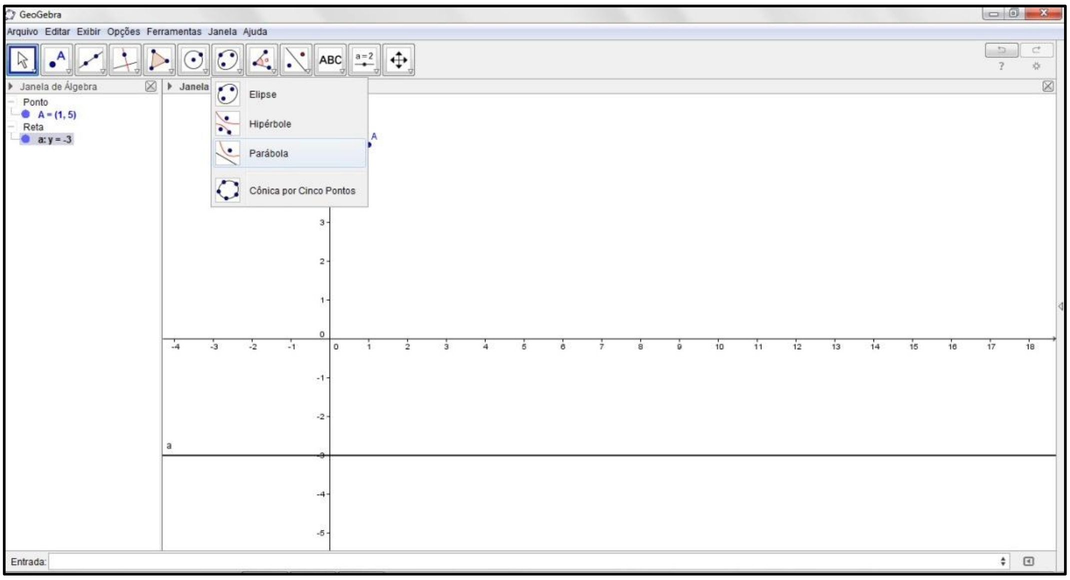


Figura 07

Selecione a ferramenta parábola, clique no ponto e depois na reta para que a figura seja construída. A equação será exibida na janela algébrica.

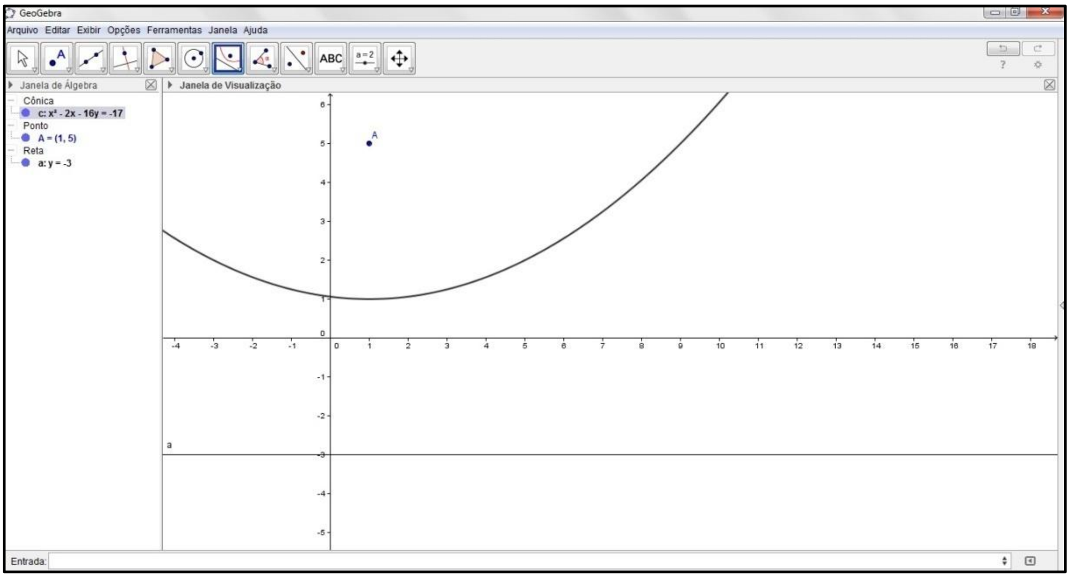


Figura 08

O leitor interessado em aprender mais sobre as ferramentas do GeoGebra e suas possibilidades para o ensino de Matemática, pode recorrer aos tutoriais do GeoGebra disponíveis em http://www.geogebra.im-uff.mat.br/vtt.html .

Nesta dissertação vamos explorar as ferramentas do GeoGebra para a elaboração de algumas atividades que permitam aos alunos o aprendizado das cônicas, isto é, elipses, hipérboles e parábolas, o qual muitas vezes é negligenciado no ensino médio.

Capítulo 3

As Cônicas

3.1 Notas Históricas

Apolônio de Perga (nasceu em Anatólia – atual Turquia) foi o matemático que mais estudou e desenvolveu as seções cônicas na antiguidade. Suas contribuições foram: ter conseguido gerar todas as cônicas de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de interseção; retirar estas curvas do cone e trazer para o plano. Desta forma, deduziu a relação básica entre o que denominamos hoje de coordenadas de um ponto da curva - a partir das equações das curvas observou diversas propriedades sem fazer referência ao cone, também introduziu os nomes elipse e hipérbole, e estudou as retas tangentes e normais a uma cônica.

A obra de Apolônio sobre as secções cônicas foi escrita em oito livros, sendo que os quatro primeiros tratam de problemas elementares que possivelmente já haviam sido abordados por outros matemáticos anteriores a este. Os quatro últimos trazem uma abordagem diferente das demais obras existentes, bem como novos resultados. Esse trabalho marcou a história das cônicas, por substituir todos os trabalhos anteriores e permanecer na antiguidade sem aperfeiçoamentos.

A obra de Apolônio de Perga sobre secções cônicas foi tão completa que, até os dias atuais, com os avanços feitos neste tema, apenas sofreram atualização de notação depois do advento da Geometria Analítica. Sendo assim, nas próximas seções iremos desenvolver a teoria sobre as cônicas a partir das notações modernas, porém muito próximo do que foi feito por este grande geômetra.

3.2 Definições e Propriedades

O estudo analítico das elipses, hipérboles e parábolas com suas definições, principais elementos e propriedades é tratado nessa seção. Para isso, iremos partir da definição tradicional, obtida em [12].

3.2.1 Elipse

“Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja 2c a distância entre eles. Elipse é o conjunto dos pontos de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante 2a (sendo 2a > 2c).”

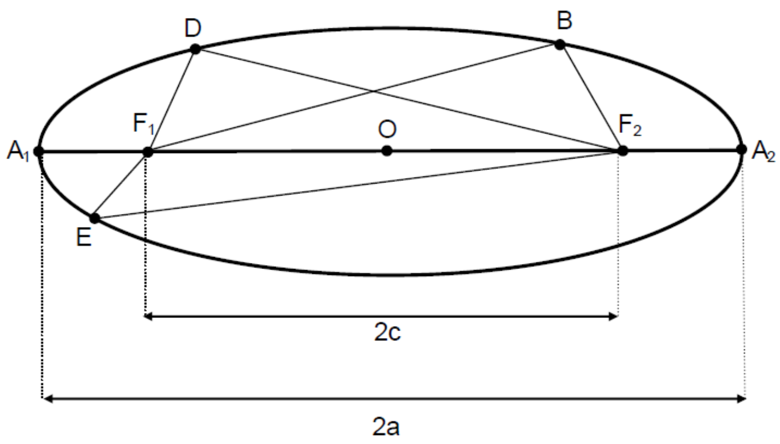


Figura 9

Assim, de acordo com a definição, temos que $|BF_1| + |BF_2| = |DF_1| + |DF_2| = |EF_1| + |EF_2| = 2a = |A_1A_2|$.

Principais Elementos da Elipse

Focos: F_1 e F_2

Centro: O

Eixo Maior: $|A_1A_2|$

Eixo Menor: $|B_1B_2|$

Distância Focal: 2c

Medida do Eixo Maior: 2a

Medida do Eixo Menor: 2b

Excentricidade: c/a

Relação Notável: $a^2 = b^2 + c^2$

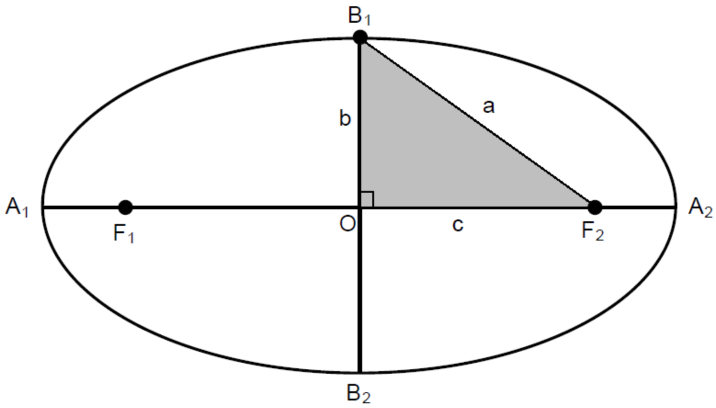


Figura 10

Equação Reduzida da Elipse

Consideremos um sistema cartesiano de modo que $|A_1A_2|$ esteja contido no eixo x e $|B_1B_2|$ no eixo y. As coordenadas dos focos, sobre o eixo x, são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, com $|F_1F_2| = 2c$ definido como distância focal. Com P = (x, y), ponto arbitrário da curva, a equação reduzida da elipse verifica a relação $|PF_1| + |PF_2| = 2a$. Assim:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)}^2 = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = (a^2 - cx)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

De forma similar, se a elipse apresenta $|A_1A_2|$ no eixo y e $|B_1B_2|$ contido no eixo x, repetindo o procedimento anterior, a equação da elipse equivale a:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Elipse com Centro Fora da Origem

Para uma elipse com centro no ponto O' = (x_0, y_0) e $|A_1A_2|$ paralelo ao eixo x, sua equação referente ao sistema ortogonal xO'y é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Analogamente, para uma elipse com centro no ponto O' = (x_0, y_0) e $|A_1A_2|$ paralelo ao eixo y sua equação equivale a:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

3.2.2 Hipérbole

"Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja 2c a distância entre eles. Hipérbole é o conjunto dos pontos de α cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante 2a (sendo $0 < 2a < 2c$)."

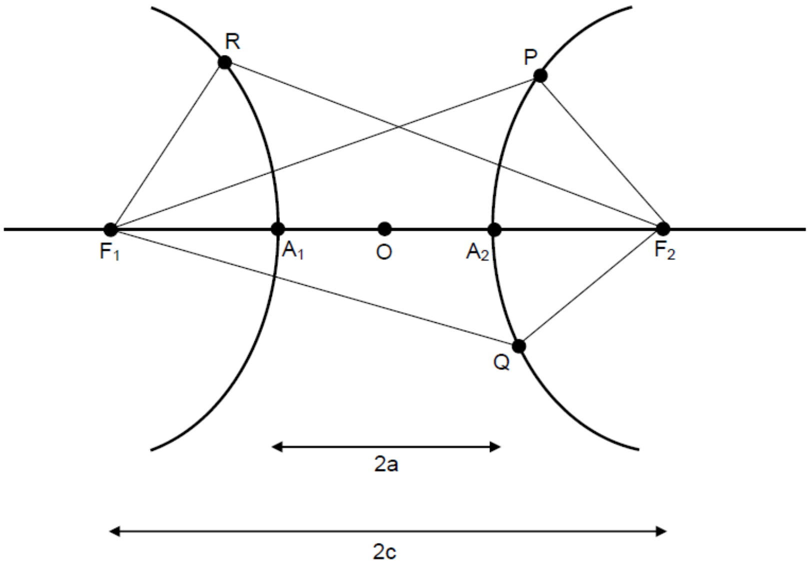


Figura 11

Assim, de acordo com a definição, temos que $||QF_1| - |QF_2|| = ||PF_1| - |PF_2|| = 2a = |A_1A_2|$.

Principais Elementos da Hipérbole

Focos: F_1 e F_2

Centro: O

Eixo Real ou Transverso: $|A_1A_2|$

Eixo Imaginário: $|B_1B_2|$

Distância Focal: 2c

Medida do Eixo Real: 2a

Medida do Eixo Imaginário: 2b

Excentricidade: c/a

Relação Notável: $c^2 = a^2 + b^2$

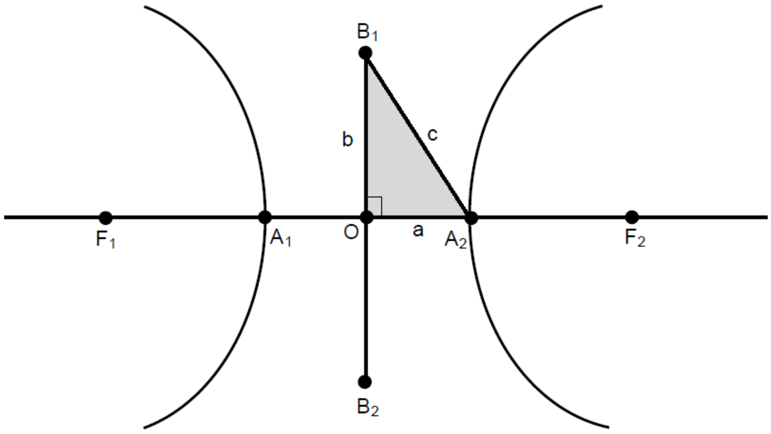


Figura 12

Equação Reduzida da Hipérbole

Consideremos um sistema cartesiano de modo que $|A_1A_2|$ esteja contido no eixo x e $|B_1B_2|$ no eixo y. As coordenadas dos focos, sobre o eixo x, são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, com $|F_1F_2| = 2c$ definido como distância focal. Com $P = (x, y)$, ponto arbitrário da curva, a equação reduzida da hipérbole verifica a relação $||PF_1| - |PF_2|| = 2a$. Assim:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

$$(x + c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(cx - a^2)^2 = a^2(x - c)^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

De forma similar, se a hipérbole apresenta $|A_1A_2|$ no eixo y e $|B_1B_2|$ contido no eixo x, repetindo o procedimento anterior, a equação equivale a:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Hipérbole com Centro Fora da Origem

Para uma hipérbole com centro no ponto O' = (x_0, y_0) e $|A_1A_2|$ paralelo ao eixo x, sua equação referente ao sistema ortogonal xO'y é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Analogamente, para uma hipérbole com centro no ponto O' = (x_0, y_0) e $|A_1A_2|$ paralelo ao eixo y sua equação equivale a:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

3.2.3 Parábola

"Dados um ponto F e uma reta d, pertencentes a um plano α, com F $\notin$ d, seja p a distância entre F e d. Parábola é o conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de F e de d."

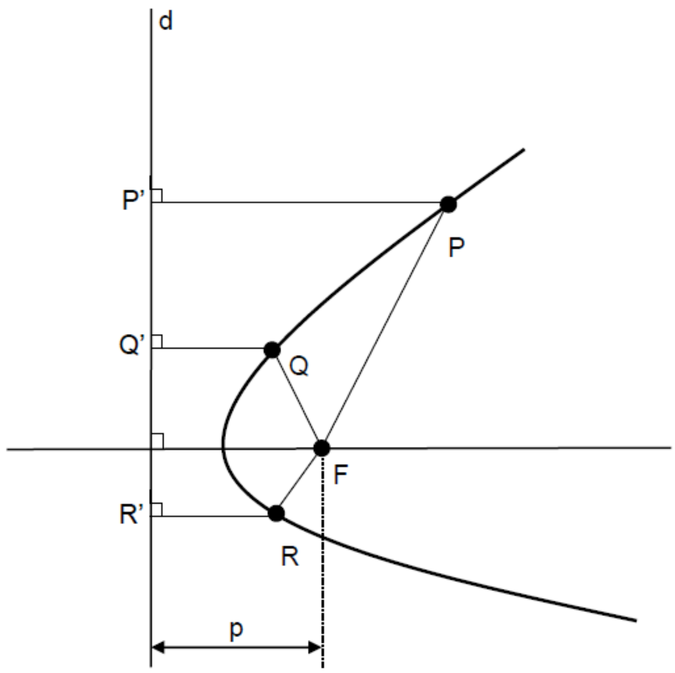


Figura 13

Assim, de acordo com a definição, temos que $|FP| = |PP'| = |FQ| = |QQ'| = |FR| = |RR'|$.

Principais Elementos da Parábola

Foco: F

Diretriz: d

Parâmetro: p

Vértice: V

Reta VF: Eixo de simetria

Relação Notável: |VF| = p/2

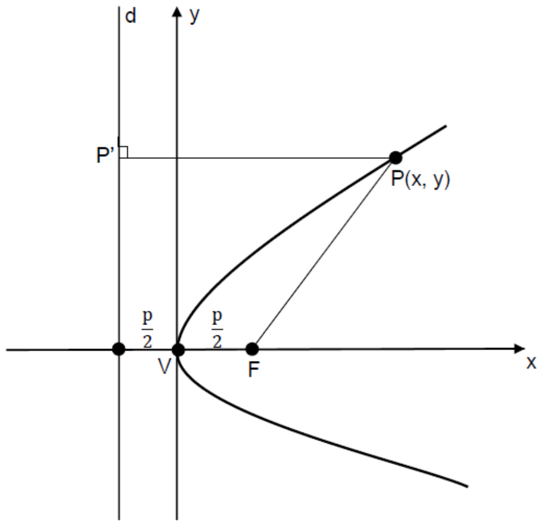


Figura 14

Equação Reduzida da Parábola

Consideremos um sistema cartesiano com o vértice da parábola na origem desse sistema e o foco pertencente ao eixo x.

Tomemos o foco como o ponto F = ($\frac{p}{2}$, 0) e a diretriz d de equação x = - $\frac{p}{2}$. A equação reduzida da parábola verifica a relação |PF| = |PP'|, onde P = (x, y) é um ponto da parábola e P' = (- $\frac{p}{2}$, y) ponto da diretriz mais próximo do ponto P. Assim:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2}$$

$$(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px$$

De forma similar, se a parábola apresenta o vértice na origem e o foco no eixo y, repetindo o procedimento anterior, a equação equivale a:

$$x^2 = 2py$$

Parábola com Centro Fora da Origem

Para uma parábola com vértice no ponto V = (x_0, y_0) e VF paralelo ao eixo x sua equação referente a este novo sistema de coordenadas sistema ortogonal é:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Analogamente, para uma parábola com vértice no ponto V = (x_0, y_0) e VF paralelo ao eixo y sua equação equivale a:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Capítulo 4

Construindo as Atividades Utilizando a Teoria de Van Hiele

A Geometria Analítica pertence a um dos temas estruturadores do ensino de Matemática. Segundo o PCNEM [5], explorar os conteúdos relativos a esses temas envolve diferentes formas de pensar Matemática, diferentes contextos para as aplicações, e, assim, permite ao aluno desenvolver as devidas competências, avançando a partir do ponto em que se encontra. A Geometria Analítica requer que os discentes desenvolvam habilidades e competências com simples representações de pontos, figuras e relações de equação no plano cartesiano, até a resolução de problemas com equações e inequações, identificação de equação de reta, circunferência e formas cônicas.

> “A Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. No ensino médio, trata das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. Para o desenvolvimento desse tema, são propostas quatro unidades temáticas**: geometrias plana, espacial, métrica** e **analítica**.” (PCNEM, p. 123)

> “A unidade **Geometria analítica** tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações.” (PCNEM, p. 124)

As atividades propostas buscam atender as orientações descritas, mais do que um simples componente curricular, e, sim, levando o aluno a assimilar e relacionar com as diversas situações práticas através de mecanismo que a torne menos abstrata.

A aplicação das atividades pode ser feita assim que o conteúdo for iniciado, sem uma prévia teórica. As atividades de 1 a 5 fazem plano de fundo para formalizar o nome das curvas e possibilitando a introdução de notas histórias sobre o surgimento das cônicas (atividades de 2 a 5 nada mais é que o estudo feito por Apolônio de Perga). E, consequentemente, as atividades seguintes contribuem para os devidos conceitos e propriedades a serem abordados, respeitando os níveis e fases de cada aluno.

O nível 3 da teoria geométrica de Van Hiele tem como característica levar o aluno a perceber a necessidade de se ter uma definição precisa do conceito que está sendo estudado e que propriedades podem estar relacionadas. As propostas de atividades do presente trabalho buscam tarefas que possibilitam o estudante desenvolver até este nível. Assim, para cada atividade, é apresentado o referente nível e o procedimento pedagógico. Muitos objetivos são esperados com a realização destas atividades, dentre eles mostrar uma relação entre o GeoGebra e o ensino da Geometria Analítica, buscando trazer para alunos e professores uma nova ferramenta de ensino e aprendizagem através do questionamento, analise de construções e conceitos.

As atividades foram pensadas para serem aplicadas em aproximadamente 12 tempos de aulas (cada tempo com cerca de 50 minutos), podendo o professor excluir algumas dessas atividades, caso os alunos tenham obtido a devida compreensão sobre os tópicos.

4.1 Atividades Propostas Para o Reconhecimento Visual de Cônicas

<u>Atividade 01</u>

Título: Reconhecimento e Visualização

Tipo de Atividade: Individual/Comparação e Nomenclatura das Cônicas

Nível: 01

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer e nomear as cônicas mediante a apresentação de figuras feitas no GeoGebra.

Procedimento Pedagógico: Devido ao estudo das funções polinomiais do 2º grau possivelmente os estudantes reconhecerão a parábola. A elipse pode ser relacionada com uma circunferência, e a hipérbole se relaciona com figuras sem correspondência a algum assunto já estudado. Lembrando que esta é uma atividade inicial, e a hipérbole será vista pela primeira vez pelos alunos de uma maneira geral.

Atividade: Considerando cada figura abaixo, diga se sua representação corresponde a uma elipse, hipérbole ou parábola.

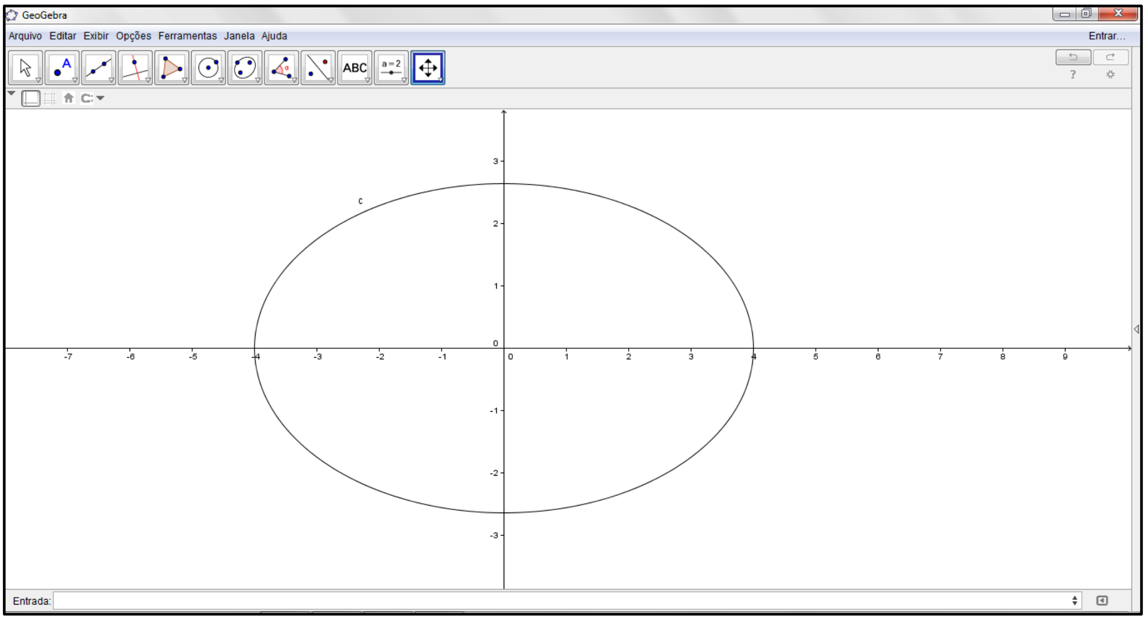


Figura 15

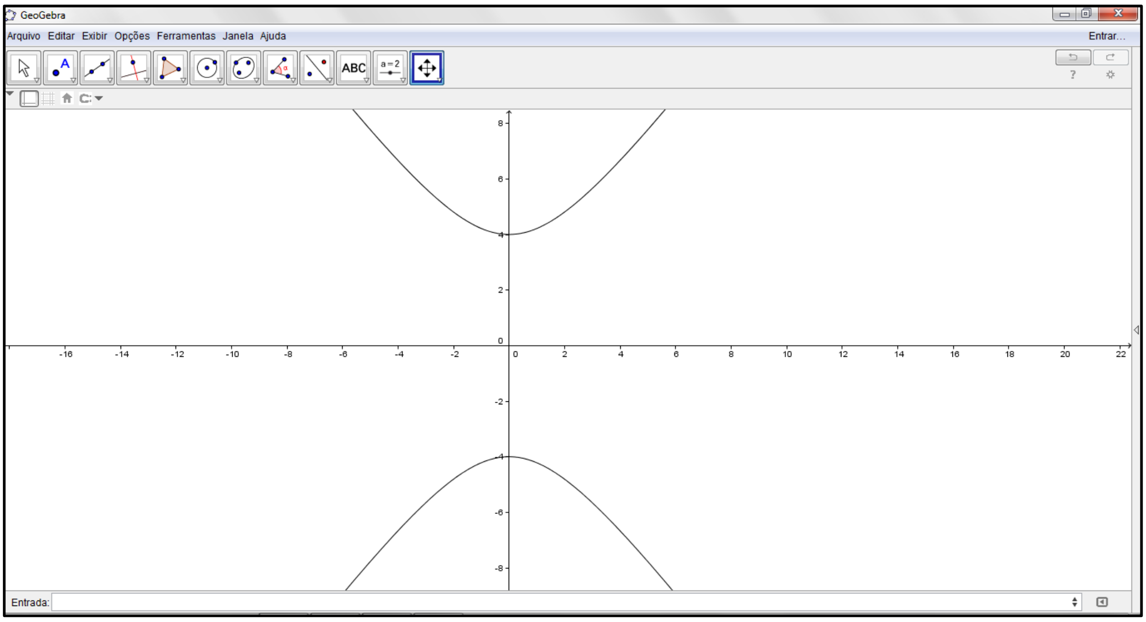


Figura 16

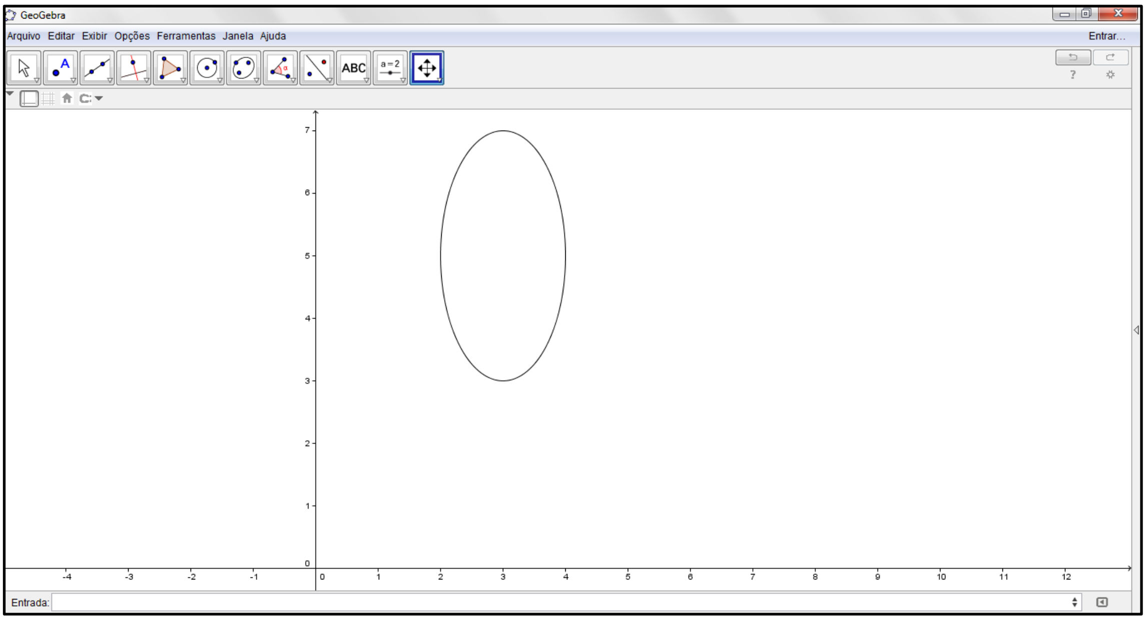


Figura 17

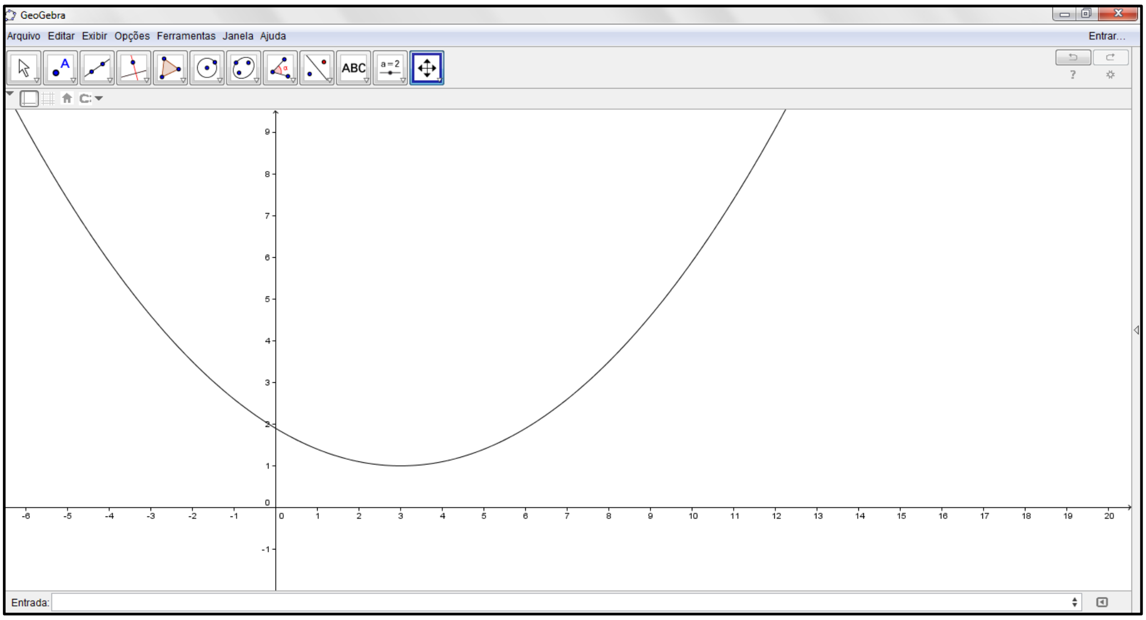


Figura 18

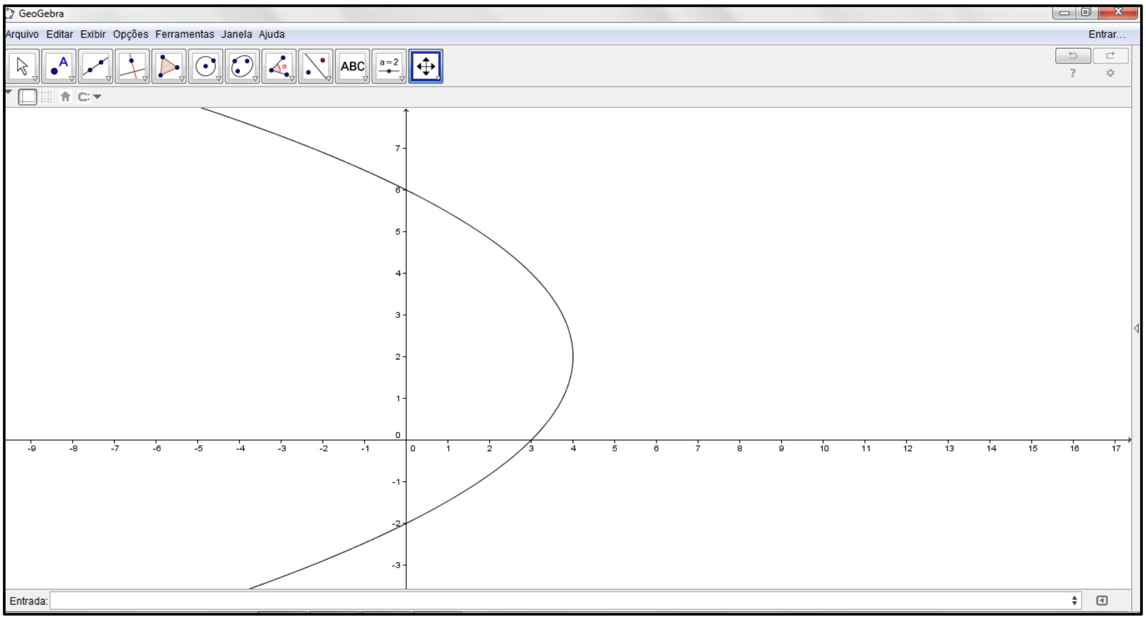


Figura 19

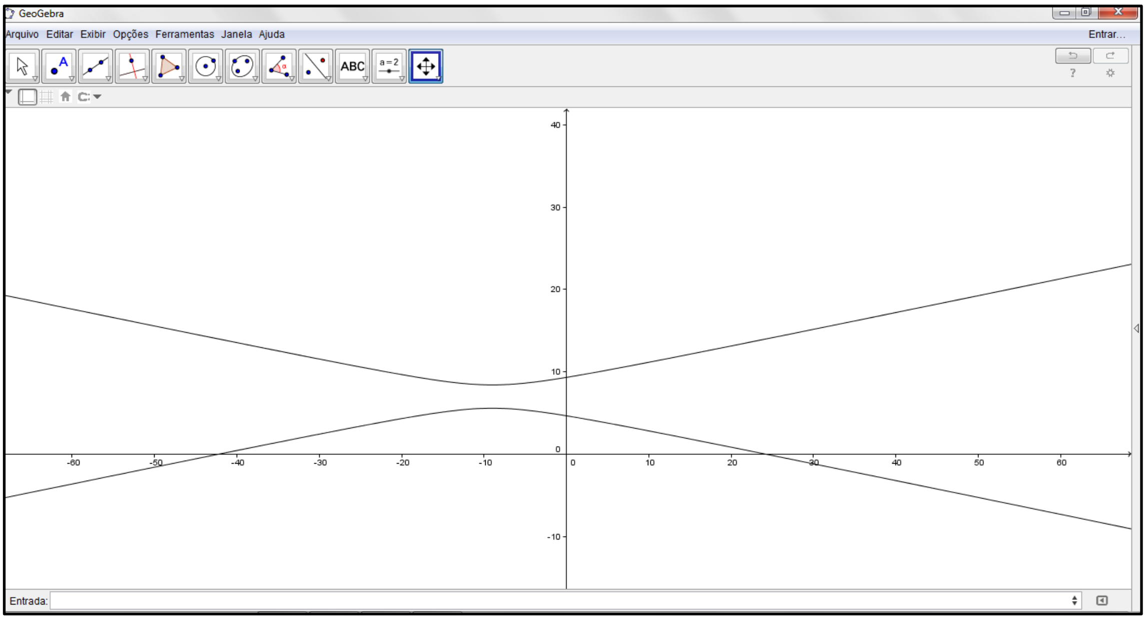


Figura 20

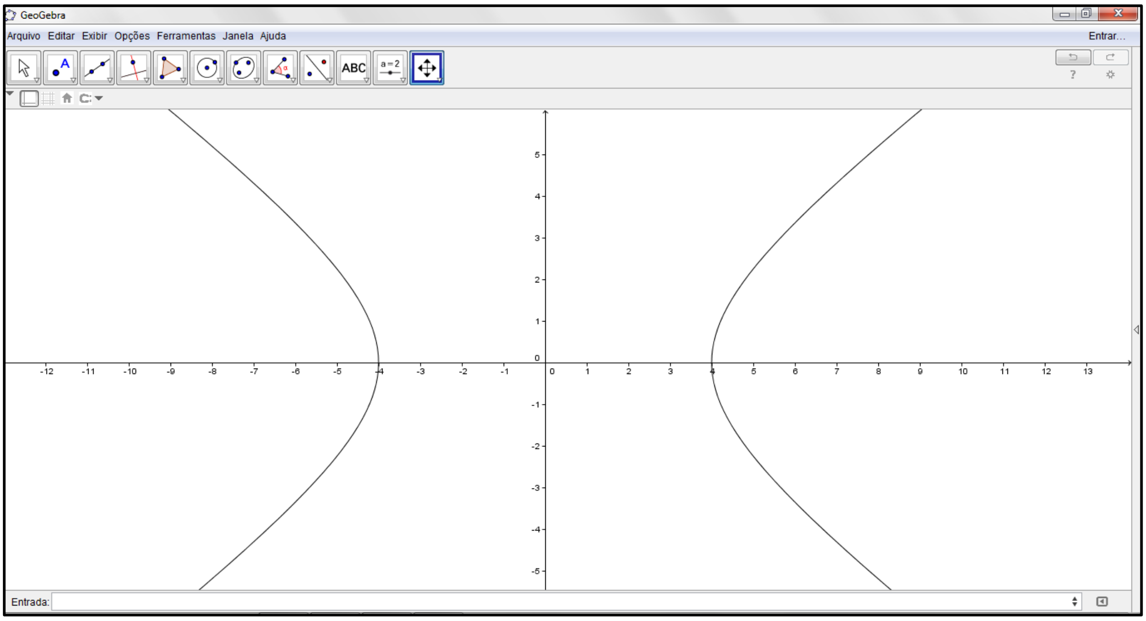


Figura 21

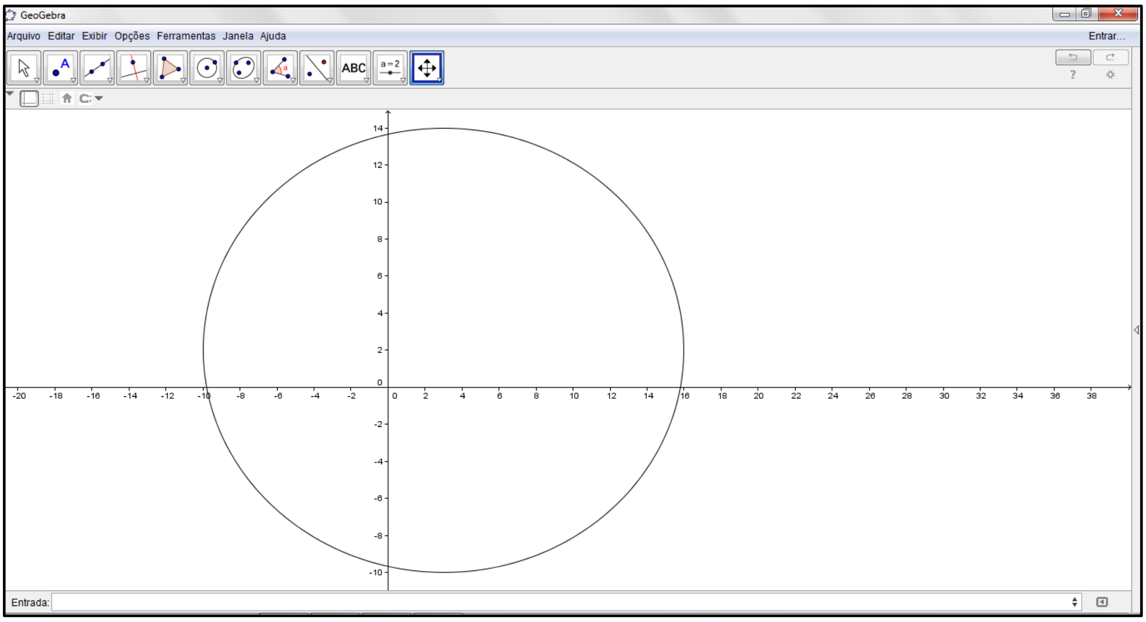


Figura 22

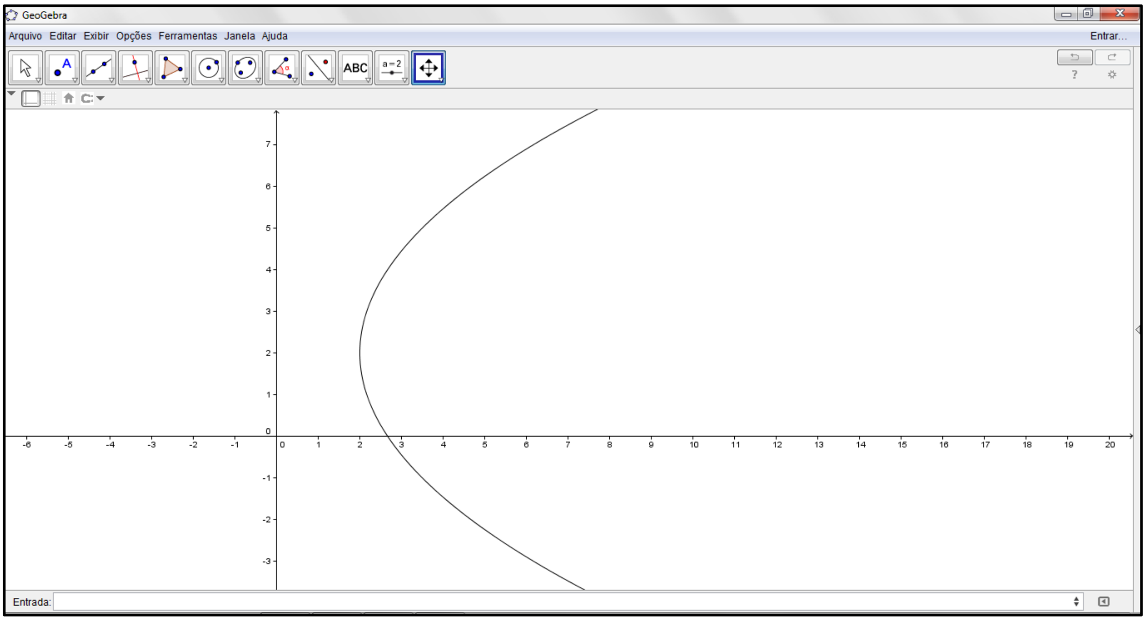


Figura 23

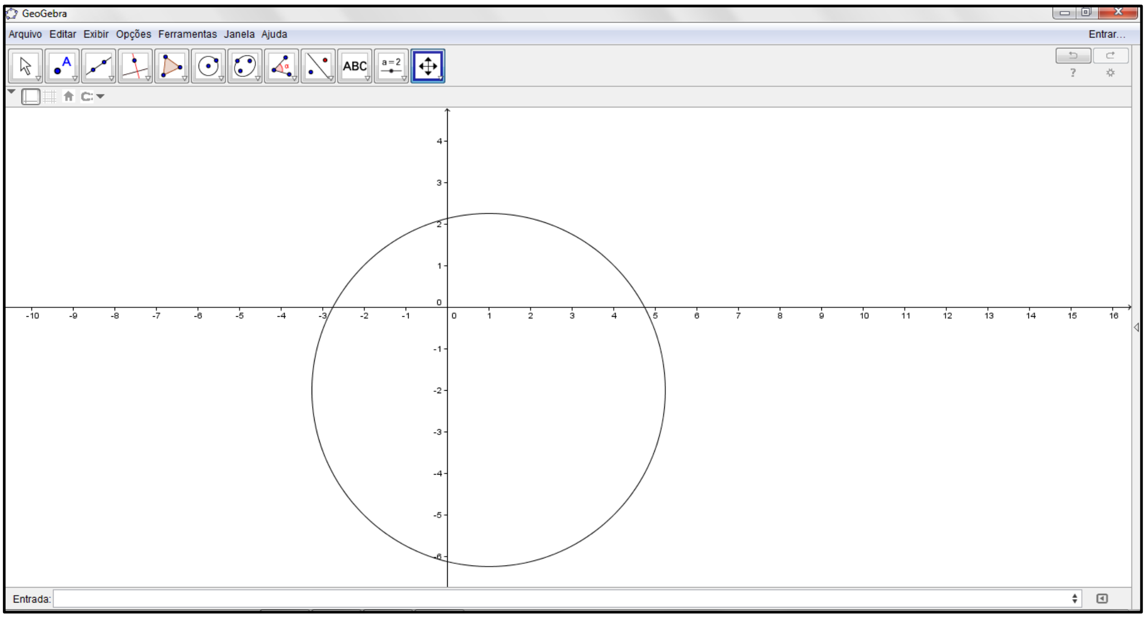


Figura 24

As figuras foram construídas a partir das seguintes equações:

Figura 15: $x^2/16 + y^2/7 = 1$

Figura 16: $y^2/16 – x^2/9 = 1$

Figura 17: $(x – 3)^2 + (y – 5)^2/4 = 1$

Figura 18: $(x – 3)^2 = 10(y – 1)$

Figura 19: $(y – 2)^2 = - 4(x – 4)$

Figura 20: $(y – 7)^2/2 – (x + 9)^2/47 = 1$

Figura 21: $x^2/16 – y^2/9 = 1$

Figura 22: $(x – 3)^2/169 + (y – 2)^2/144 = 1$

Figura 23: $2x^2 - 7y = 0$

Figura 24: $(x – 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$

Para construir as figuras da atividade 1 no GeoGebra basta escrever a equação correspondente no campo de entrada, localizado na parte inferior à esquerda (maiores detalhes se encontram no capítulo 2).

<u>Atividade 02</u>

Título: As Cônicas/Circunferência

Tipo de Atividade: Individual/Comparação e Nomenclatura das Cônicas a partir da intersecção de duas superfícies.

Nível: 01

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer e nomear as cônicas mediante a construção de uma superfície cônica de duas folhas.

Atividade: Siga as etapas para construção da figura.

- Inicie o GeoGebra.
- Selecione a janela 3D.
- Com a ferramenta ponto marque as coordenadas dos pontos A(0, 0, 0), B(2, 0, 5) e C(-2, 0, -5).
- Com a ferramenta cone construa o sólido com os pontos B, A e raio 2.
- Com a ferramenta cone construa o sólido com os pontos C, A e raio 2.
- Observe a figura.

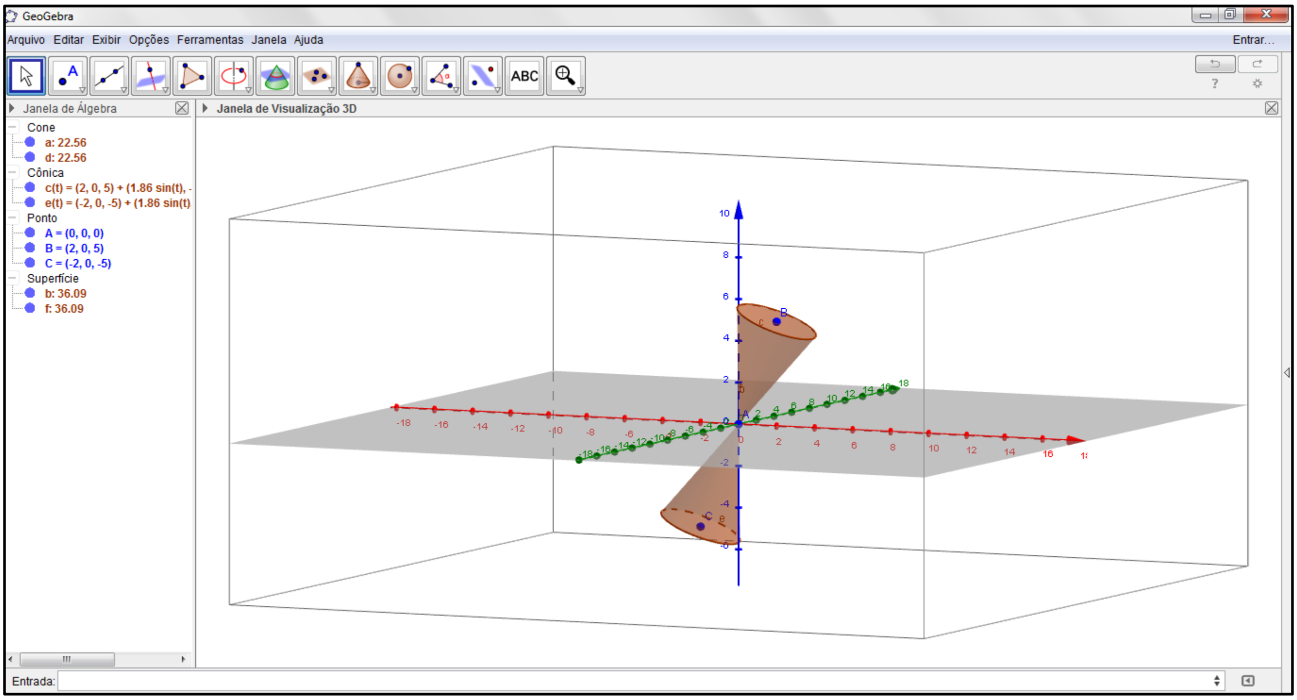


Figura 25

- Trace a reta BC com a ferramenta reta.
- Marque um ponto na reta BC com a ferramenta ponto (ponto D).
- Construa um plano perpendicular a reta BC que contenha o ponto D. Utilize a ferramenta Plano Perpendicular.
- Clique na ferramenta Intersecção de Duas Superfícies, no cone e no plano construído.

Analise a curva encontrada e faça correspondência com a figura adequada da atividade 01. Que figura representa a secção obtida?

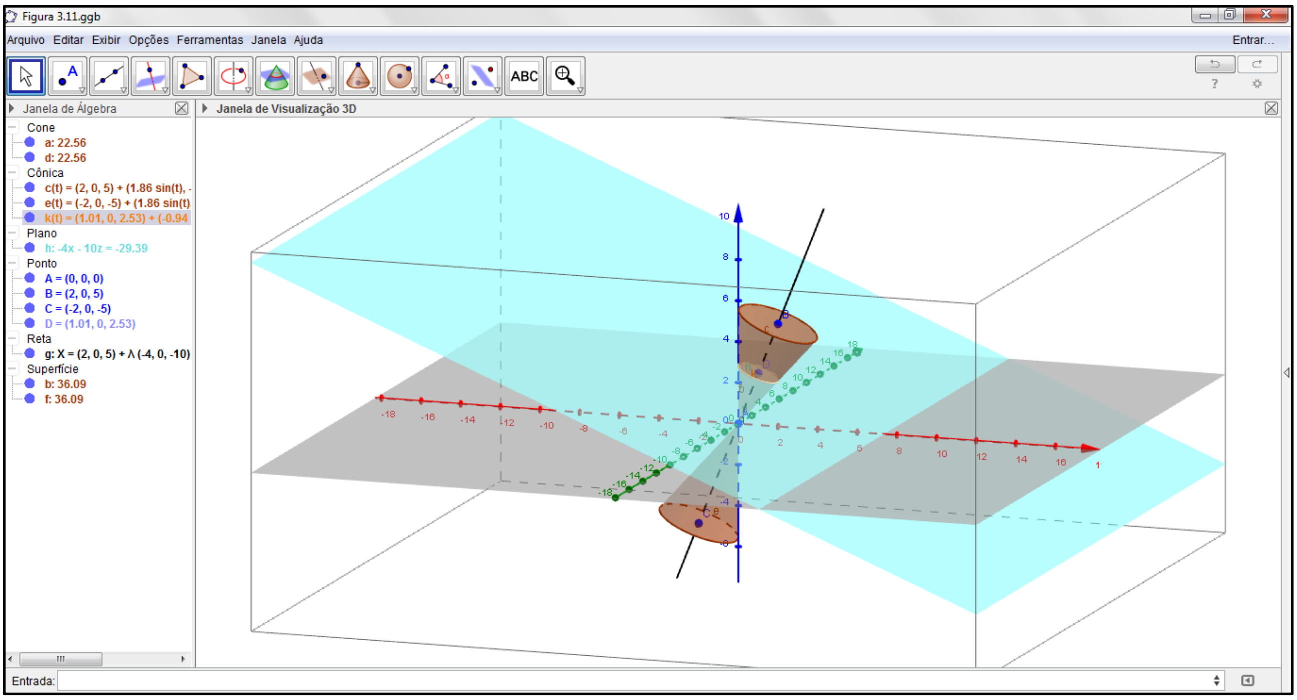


Figura 26

Atividade 03

Título: As Cônicas/Elipse

Tipo de Atividade: Individual/Comparação e Nomenclatura das Cônicas a partir da intersecção de duas superfícies.

Nível: 01

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer e nomear as cônicas mediante a construção de uma superfície cônica de duas folhas.

Atividade: Utilizando a figura 26, construa um plano oblíquo à reta BC (corte em apenas uma das folhas da superfície cônica) com os pontos D(8, -11, 0), E(5, -16, 3), F(4, 10, -1) e a ferramenta Plano Por Três Pontos. Analise a curva encontrada com a ferramenta Intersecção de Duas Superfícies. Que figura representa a secção obtida?

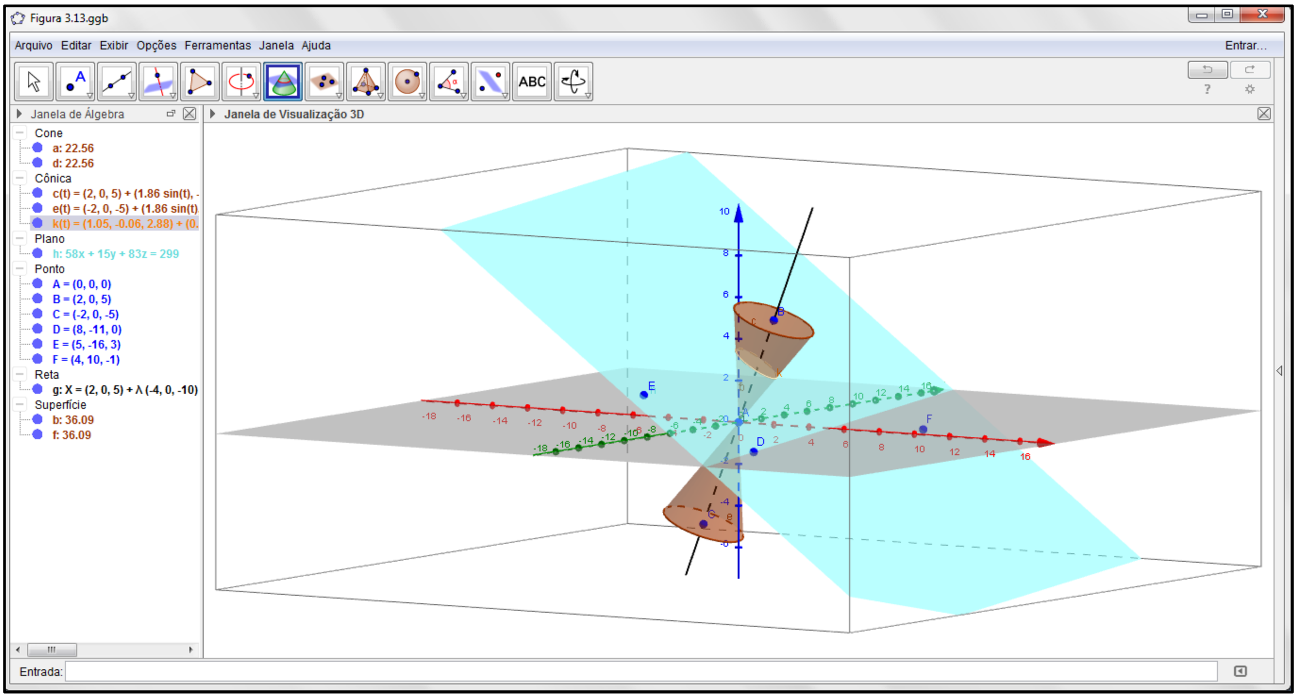


Figura 27

Atividade 04

Título: As Cônicas/Parábola

Tipo de Atividade: Individual/Comparação e Nomenclatura das Cônicas a partir da intersecção de duas superfícies.

Nível: 01

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer e nomear as cônicas mediante a construção de uma superfície cônica de duas folhas.

Atividade: Construa um plano paralelo ao eixo z com a ferramenta Plano Perpendicular e selecione o ponto B e o eixo x. Analise a curva encontrada com a ferramenta Intersecção de Duas Superfícies. Que figura representa a secção obtida?

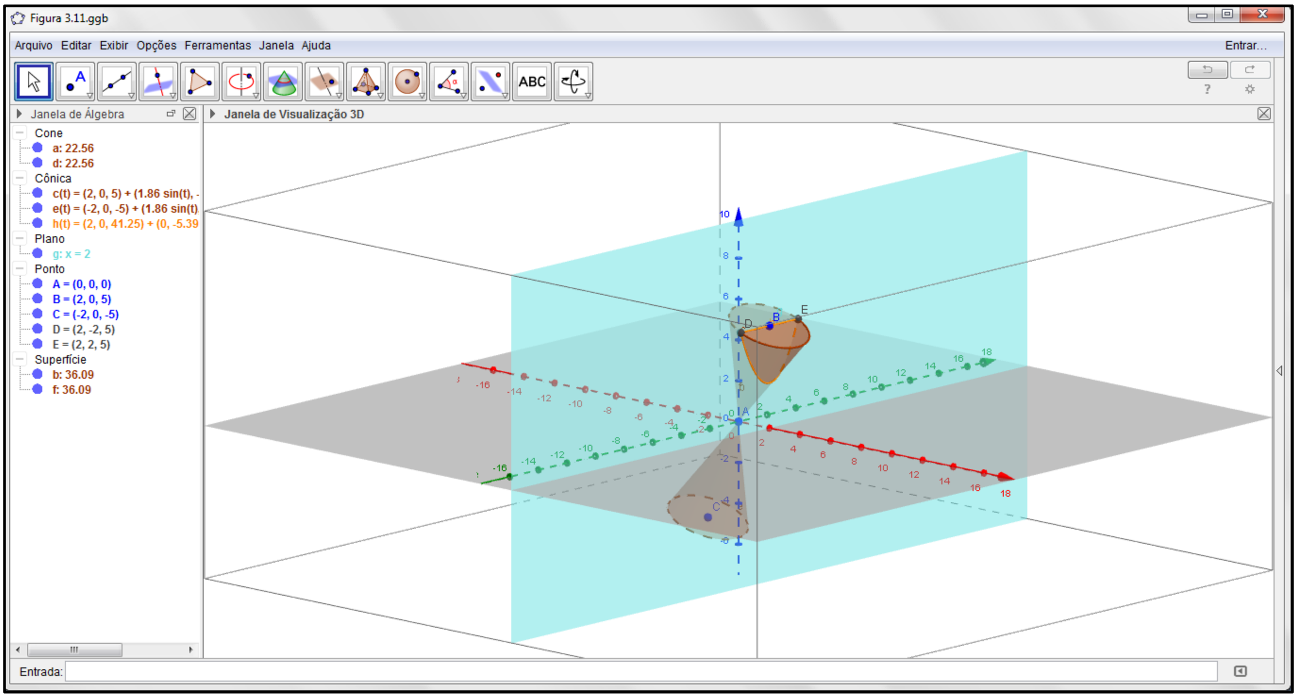


Figura 28

Atividade 05

Título: As Cônicas/Hipérbole

Tipo de Atividade: Individual/Comparação e Nomenclatura das Cônicas a partir da intersecção de duas superfícies.

Nível: 01

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer e nomear as cônicas mediante a construção de uma superfície cônica de duas folhas.

Atividade: Com o auxílio da figura 26, construa um plano oblíquo a reta BC (corte as duas folhas da superfície cônica) com os pontos D(3, -1, 4), E(3, 1, 4), F(-1, -1, -5) e a ferramenta Plano Por Três Pontos. Analise a curva encontrada com a ferramenta Intersecção de Duas Superfícies. Que figura representa a secção obtida?

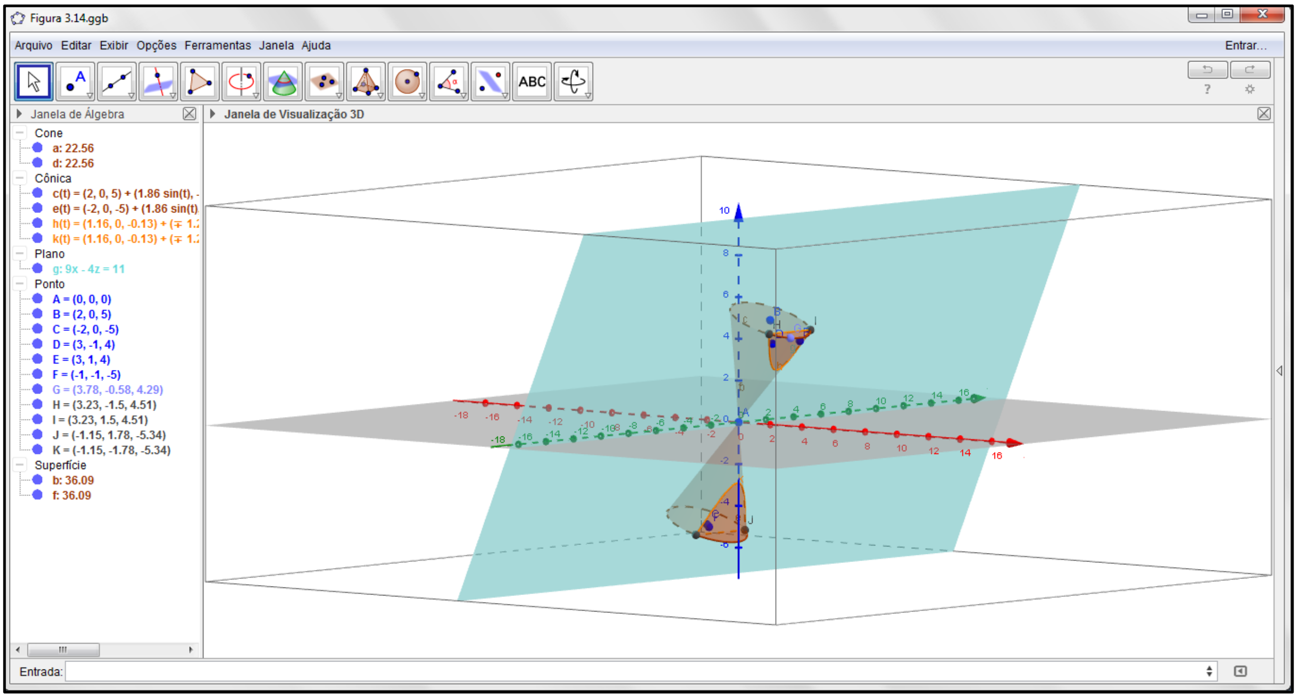


Figura 29

4.2 Atividades para Elipses

<u>**Atividade 06**</u>

Título: Elipse

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Elipses no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer elipses mediante a construção de equações no GeoGebra.

Atividade: Construa no GeoGebra as seguintes curvas e compare seus gráficos com imagens da atividade 01.

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

d) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

Atividade 07

Título: Elipse

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Elipses no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer elipses mediante a construção de equações no GeoGebra.

Atividade: Construa a elipse $x^2/16 + y^2/7 = 1$. Marque os pontos A = (3, 0), B = (-3, 0). Com a ferramenta ponto, clique na elipse, para ser construído o ponto C. Construa os segmentos AC e BC. Com a ferramenta mover, clique no ponto C e mova-o sobre a elipse. Anote os valores encontrados para |AC| + |BC|. O que você pode concluir?

Procedimento Pedagógico: Destaque que os valores encontrados para relação |AC| + |BC| não se alteram para qualquer posição do ponto C, associando a definição da elipse e a importância de localizar as coordenadas dos focos.

Atividade 08

Título: Elipse

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Elipses no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer equações de elipses mediante a construção de curvas no GeoGebra.

Atividade: Com a ferramenta elipse, marque os focos A = (-2, 0) e B = (2, 0) e um ponto C qualquer. Utilize a ferramenta mover e desloque o ponto B até coincidir com o ponto A. Caracterize a figura formada.

Procedimento Pedagógico: Destaque que os pontos que formam o foco da elipse quando coincidentes geram uma circunferência.

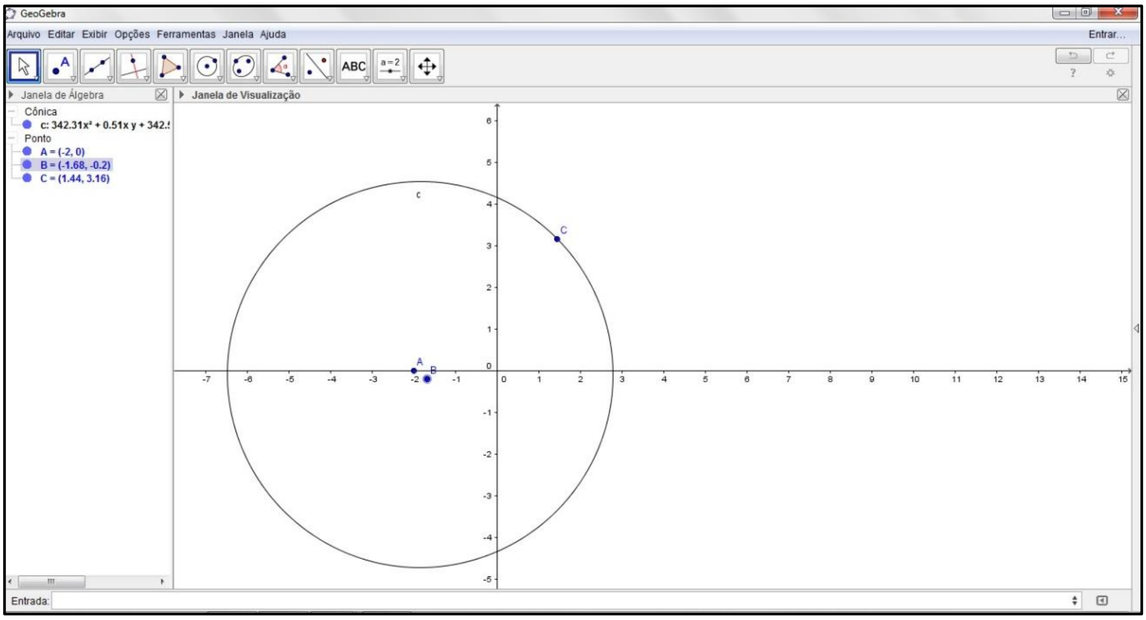


Figura 30

Atividade 09

Título: Elipse

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Elipses no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 30 minutos

Objetivo: Reconhecer equações de elipses mediante a construção de curvas no GeoGebra.

Atividade: Construa a figura a partir das etapas descritas.

- Com a ferramenta elipse marque os focos A(-3, 0) e B(3, 0) e o ponto C(0, 3).
- Utilize a ferramenta ponto para marcar os pontos D e E sobre a elipse e o eixo x.
- Com a ferramenta segmento construa os segmentos AB (Distância Focal) e ED (Eixo Maior).
- Abra a planilha de cálculos, na célula 1A, escreva o segmento AB. Na célula 2A, o segmento ED. E na célula 3A, a divisão AB/ED (excentricidade da elipse).
- Clique na ferramenta mover e desloque o ponto B pelo eixo x até coincidir com o ponto A.

O que podemos afirmar sobre os resultados encontrados para excentricidade?

Procedimento Pedagógico: Observe que a excentricidade é um número do intervalo]0, 1[e que elipses que têm excentricidade próxima de 0 são pouco "achatadas" e têm forma mais próxima de uma circunferência; entretanto, com excentricidade próxima de 1 são bem "achatadas".

<u>Atividade 10</u>

Título: Elipse/Circunferência

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Elipses no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer equações de elipses mediante a construção de curvas no GeoGebra.

Atividade: Utilize a figura construída na atividade 09; se a excentricidade for nula que figura é formada?

Procedimento Pedagógico: Coincidindo os focos no mesmo ponto obtemos uma circunferência.

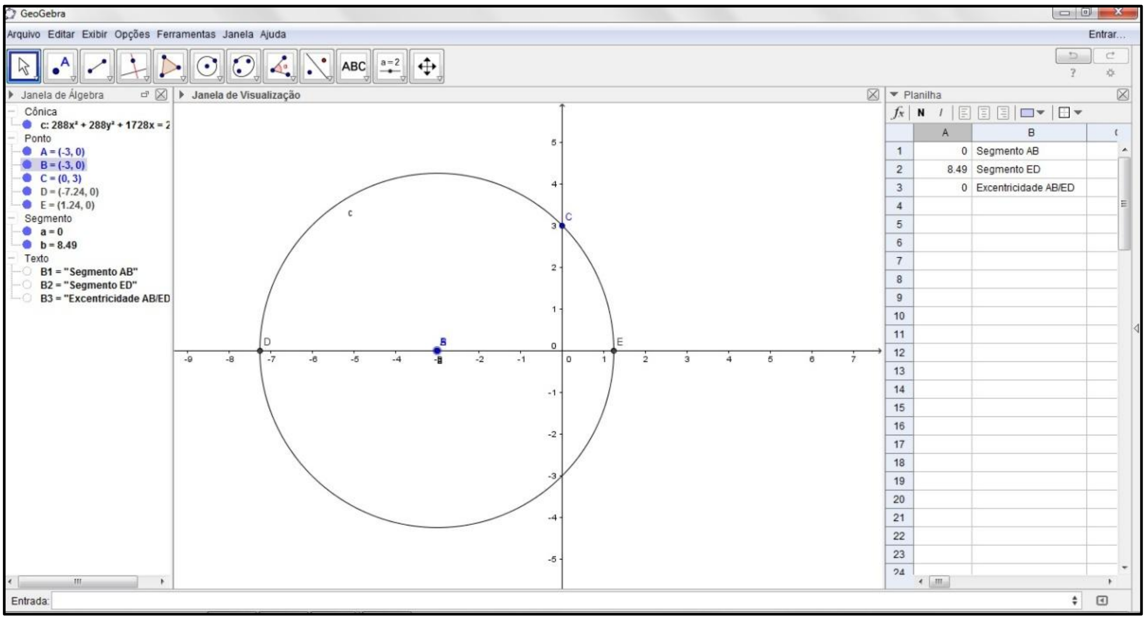


Figura 31

Atividade 11

Título: Elipse

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Elipses no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer elipses e identificar os eixos mediante a construção de curvas no GeoGebra.

Atividade: Construa as elipses $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ e $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1$. Nas figuras formadas identifique seus eixos maiores e menores.

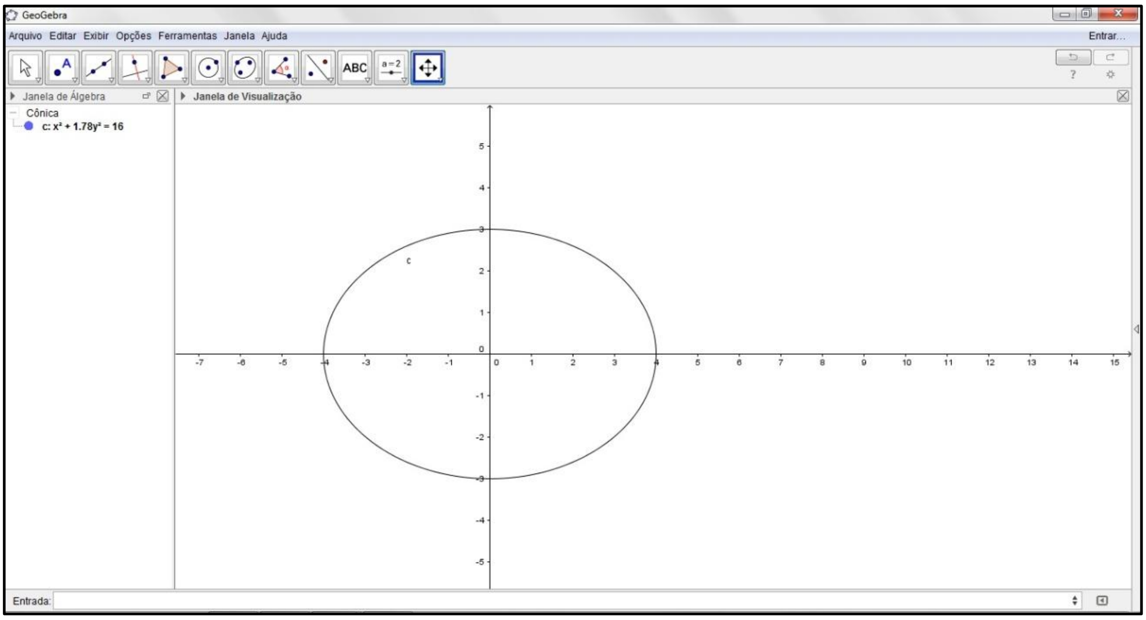


Figura 32

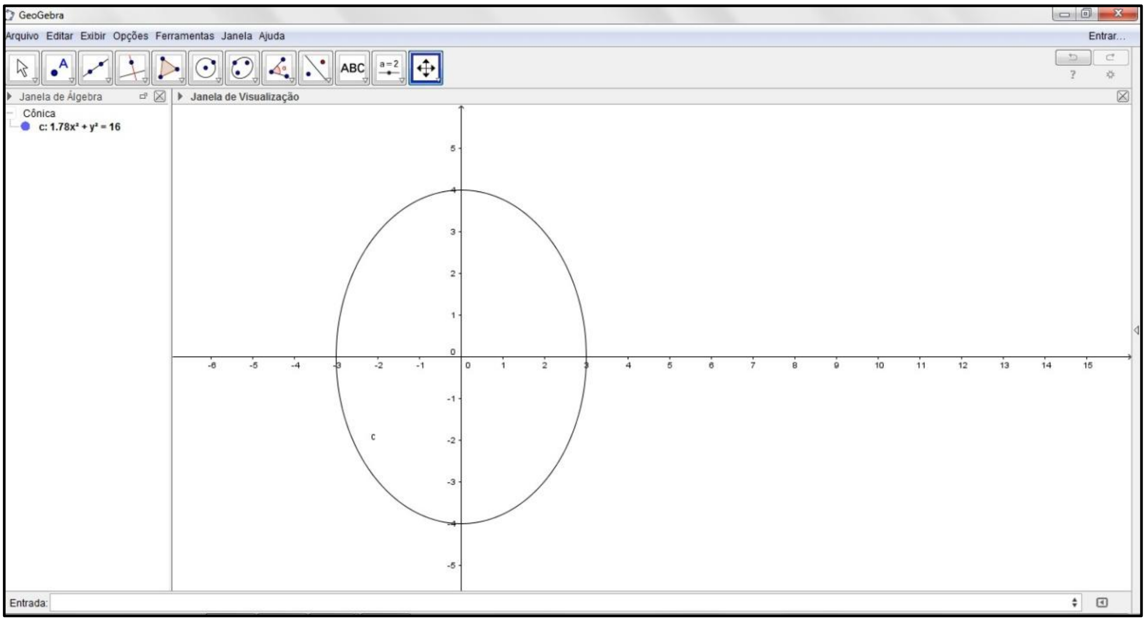


Figura 33

Atividade 12

Título: Elipse

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Elipses no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer elipses e identificar seu centro mediante a construção de equações no GeoGebra.

Atividade: Construa as elipses $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ e $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$. Nas figuras formadas identifique as coordenadas de seus centros.

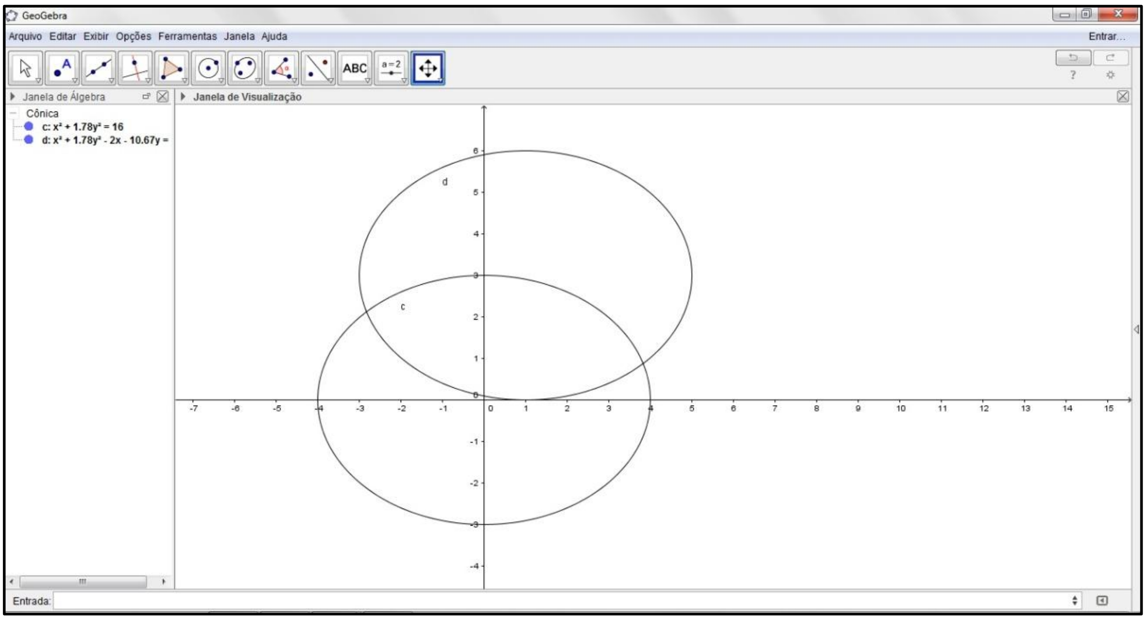


Figura 34

Atividade 13

Título: Elipse

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Elipses no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 30 minutos

Objetivo: Reconhecer a relação $a^2 + b^2 = c^2$ mediante a construção de figuras no GeoGebra.

Atividade: Marque os pontos A = (-3, 0), B = (3, 0) e C = (4, 0) com a ferramenta elipse. Com a ferramenta ponto construa o ponto D(0, 0). Utilize a ferramenta segmento para destacar os segmentos BD, DC e CB. Com o auxílio da planilha de cálculos verifique os resultados da relação ($|BD|^2 + |DC|^2$) e $|BC|^2$.

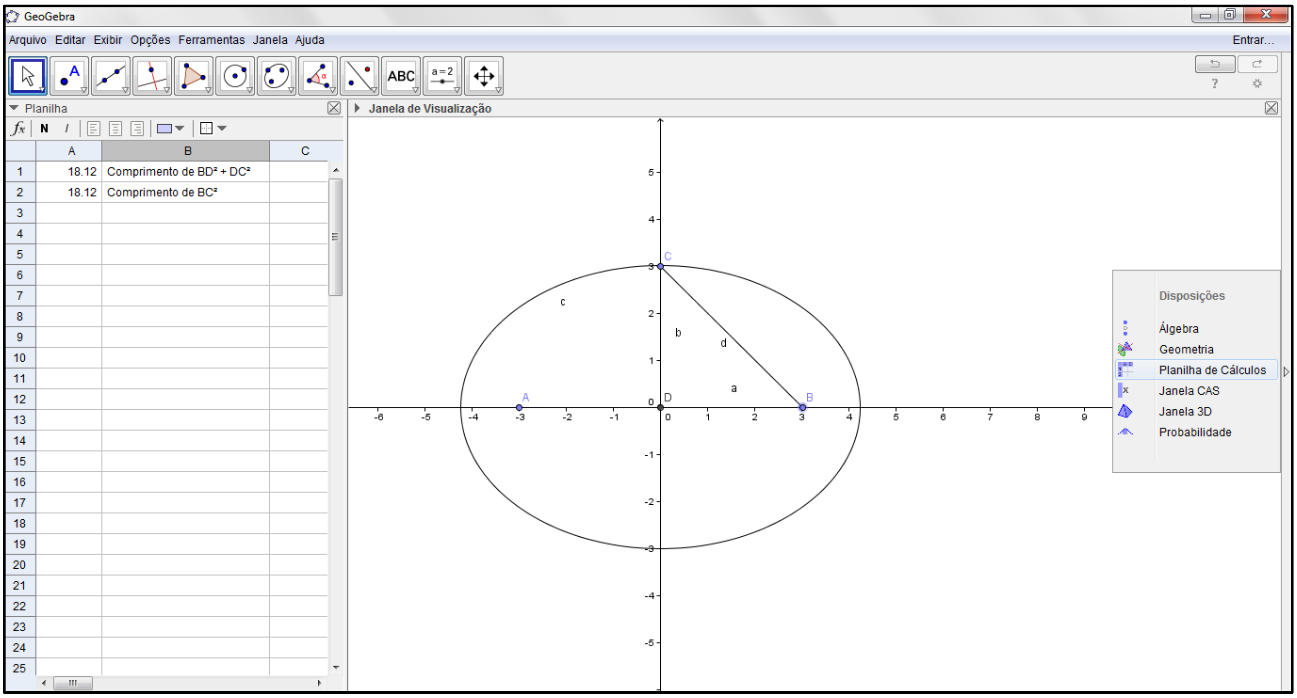


Figura 35

Atividade 14

Título: Elipse

Tipo de Atividade: Individual/Generalizar uma equação a partir de construções feitas no GeoGebra.

Nível: 03

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Definir uma elipse

Atividade: Com base na atividade 07, construa novas elipses e verifique a relação encontrada. Compare o valor encontrado para soma (AB + AC) com a medida do eixo maior. A partir dos dados obtidos defina uma elipse, caracterizando sua equação.

Procedimento Pedagógico: Com a observação da atividade 7, induzir uma definição formal para equação reduzida da elipse.

Atividade 15

Título: Elipse

Tipo de Atividade: Individual/Elementos principais de uma elipse

Nível: 03

Tempo: 50 minutos

Objetivo: Reconhecer e nomear os elementos principais de uma elipse.

Atividade: Utilize como base a atividade 13 e destaque os seguintes elementos:

a) focos

b) centro

c) eixo maior

d) eixo menor

e) distância focal

f) medida do eixo maior

g) medida do eixo menor

h) relação notável

Atividade 16

Título: Elipse

Tipo de Atividade: Individual/Excentricidade da elipse

Nível: 03

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Descrever o conceito de excentricidade para uma elipse.

Atividade: Com o auxílio da atividade 09, conceitue excentricidade de uma elipse.

Atividade 17

Título: Elipse

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Elipses dados seus eixos.

Nível: 03

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer a equação reduzida da elipse.

Atividade: Construa duas elipses com eixo maior (eixo x) medindo 8 unidades e eixo menor medindo 6 unidades. Caracterize, de forma genérica, a equação reduzida da elipse.

4.3 Atividades para Hipérbole

Atividade 18

Título: Hipérbole

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Hipérboles no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer hipérboles mediante a construção de equações no GeoGebra.

Atividade: Construa no GeoGebra as seguintes curvas e compare seus gráficos com imagens da atividade 01.

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

d) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$

Atividade 19

Título: Hipérbole

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Hipérboles no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer hipérboles mediante a construção de equações no GeoGebra.

Atividade: Construa a hipérbole $x^2/16 - y^2/9 = 1$. Marque os pontos A = (5, 0), B = (- 5, 0). Com a ferramenta ponto, clique na hipérbole para ser construído o ponto C. Construa os segmentos AC e BC. Com a ferramenta mover, clique no ponto C e mova-o sobre a hipérbole. Anote os valores encontrados para $||BC| - |AC||$. O que você pode concluir?

Atividade 20

Título: Hipérbole

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Hipérboles no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer equações de hipérboles mediante a construção de curvas no GeoGebra.

Atividade: Com a ferramenta hipérbole marque os focos A = (-2, 0) e B = (2, 0) e um ponto C qualquer. Utilize a ferramenta mover e desloque o ponto B até coincidir com o ponto A. Caracterize a figura formada.

Procedimento Pedagógico: Destaque que para hipérbole não ocorre o mesmo que na elipse, os focos coincidirem não gera uma nova figura cônica.

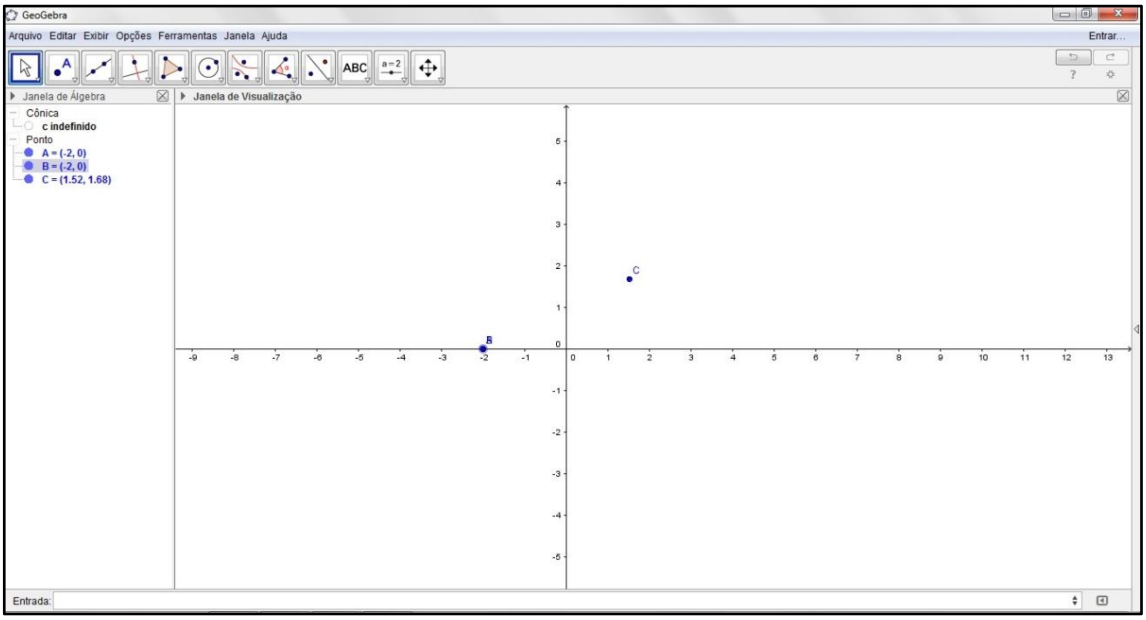


Figura 36

Atividade 21

Título: Hipérbole

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Hipérboles no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 30 minutos

Objetivo: Reconhecer equações de hipérboles mediante a construção de curvas no GeoGebra.

Atividade: Construa a figura a partir das etapas descritas.

- Com a ferramenta hipérbole marque os focos A = (- 3, 0) e B = (3, 0) e o ponto C = (0, 3).

- Utilize a ferramenta ponto para marcar os pontos D e E sobre a hipérbole e a origem do sistema, respectivamente.
- Com a ferramenta segmento construa os segmentos EB, EC e CB.
- Abra a planilha de cálculos, na célula 1A, escreva o segmento CB. Na célula 2A, o segmento EB. E na célula 3A, a divisão CB/EB (excentricidade da hipérbole).
- Clique na ferramenta mover e desloque o ponto B pelo eixo x até coincidir com o ponto A.

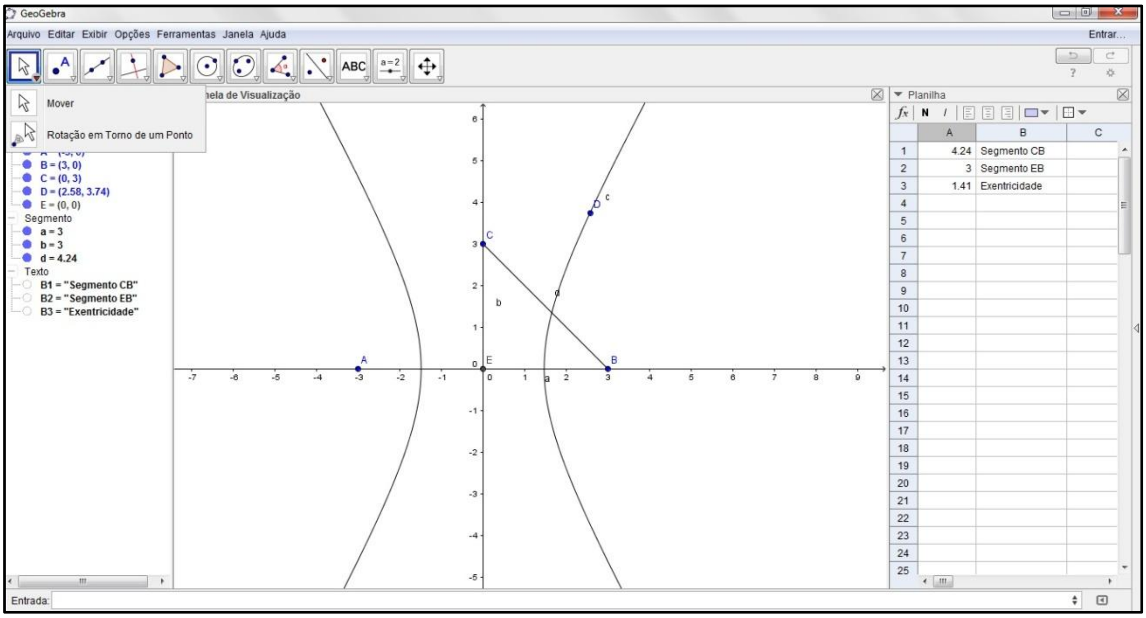


Figura 37

O que podemos afirmar sobre os resultados encontrados para excentricidade?

<u>Atividade 22</u>

Título: Hipérbole

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Hipérboles no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer hipérboles e identificar os eixos mediante a construção de curvas no GeoGebra.

Atividade: Construa as hipérboles $\frac{x^2}{16}$ - $\frac{y^2}{9}$ = 1 e $\frac{y^2}{16}$ - $\frac{x^2}{9}$ = 1. Nas figuras formadas, identifique seus eixos reais e imaginários.

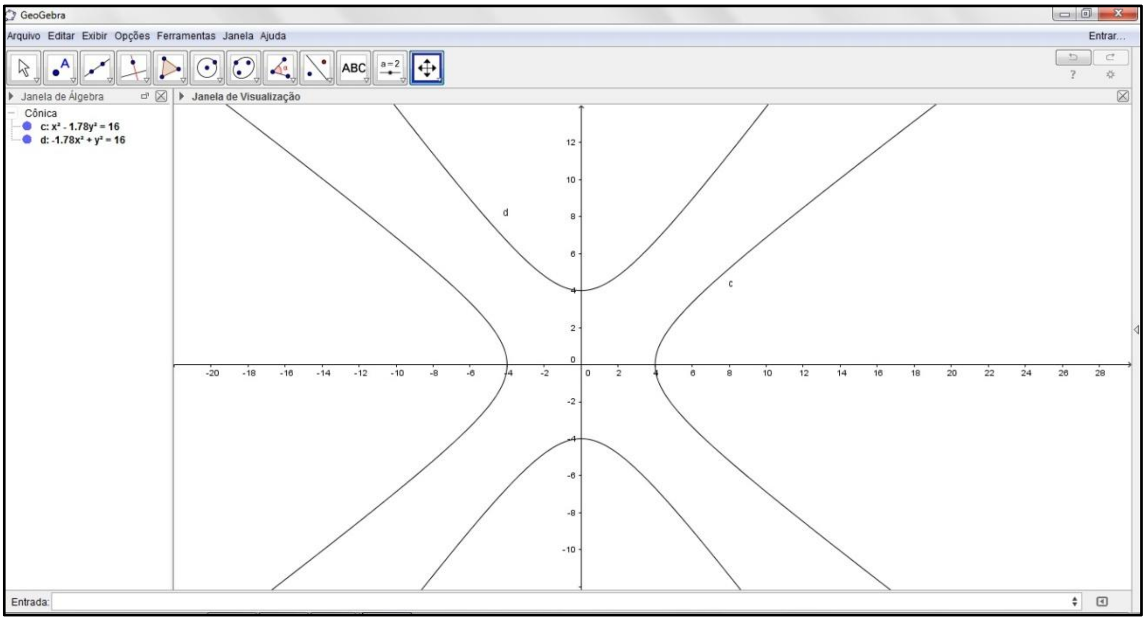


Figura 38

Atividade 23

Título: Hipérbole

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Hipérboles no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer Hipérboles e identificar seu centro mediante a construção de equações no GeoGebra.

Atividade: Construa as elipses $\frac{x^2}{16}$ - $\frac{y^2}{9}$ = 1 e $\frac{(x-1)^2}{16}$ - $\frac{(y-3)^2}{9}$ = 1. Nas figuras, formadas identifique as coordenadas de seus centros.

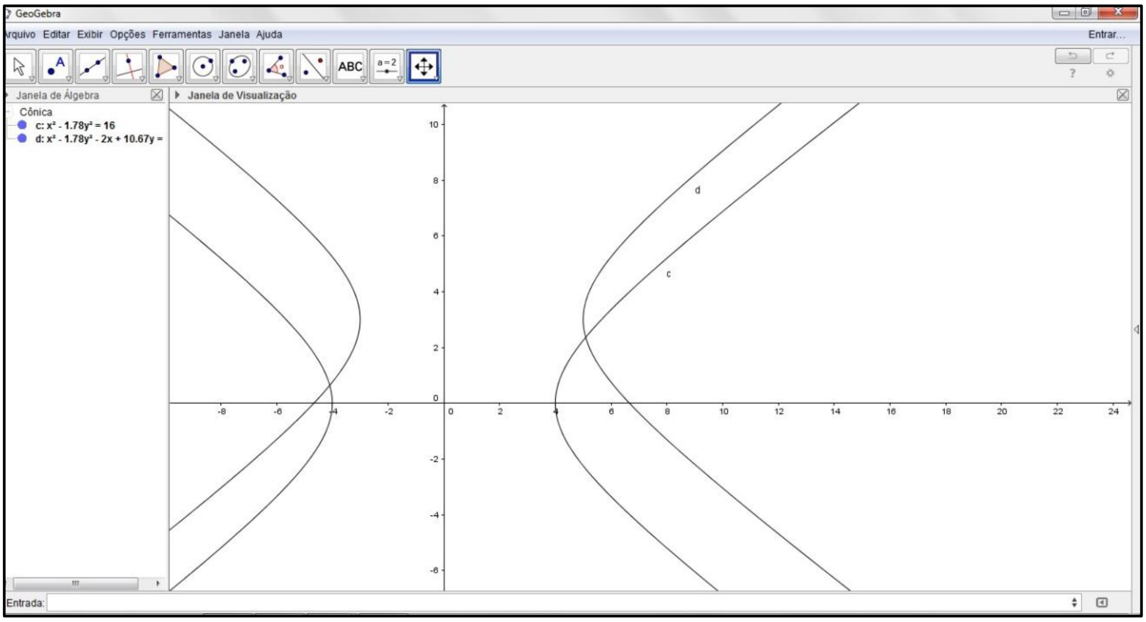


Figura 39

<u>Atividade 24</u>

Título: Hipérbole

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Hipérbole no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 30 minutos

Objetivo: Reconhecer a relação $a^2 + b^2 = c^2$ mediante a construção de figuras no GeoGebra.

Atividade: Marque os pontos A = (-3, 0), B = (3, 0) e C = (0, 4) com a ferramenta hipérbole, construa a curva. Com a ferramenta ponto construa o ponto E = (0, 0). Utilize a ferramenta segmento para destacar os segmentos EB, EC e CB.

Com o auxílio da planilha de cálculos verifique os resultados da relação ($|EB|^2 + |EC|^2$) e $|CB|^2$.

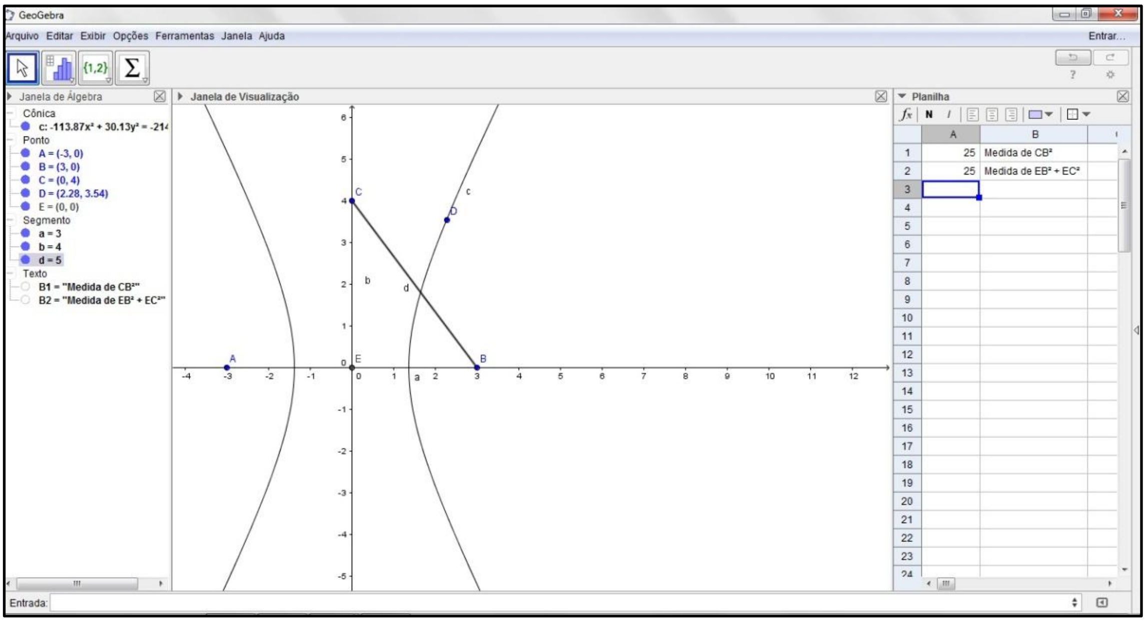


Figura 40

Atividade 25

Título: Hipérbole

Tipo de Atividade: Individual/Generalizar uma equação a partir de construções feitas no GeoGebra

Nível: 03

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Definir uma Hipérbole

Atividade: Com base na atividade 19, construa novas hipérboles e verifique a relação encontrada. Compare o valor encontrado para soma (|AC| - |BC|) com a medida do eixo real. A partir dos dados obtidos defina uma hipérbole, caracterizando sua equação.

Atividade 26

Título: Hipérbole

Tipo de Atividade: Individual/Elementos principais de uma Hipérbole

Nível: 03

Tempo: 30 minutos

Objetivo: Reconhecer e nomear os elementos principais de uma hipérbole.

Atividade: Utilize como base a atividade 24 e destaque os seguintes elementos:

a) focos

b) centro

c) eixo real ou transverso

d) eixo imaginário

e) distância focal

f) medida do eixo real

g) medida do eixo imaginário

h) relação notável

Atividade 27

Título: Hipérbole

Tipo de Atividade: Individual/Excentricidade da Hipérbole

Nível: 03

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Descrever o conceito de excentricidade para uma hipérbole.

Atividade: Com o auxílio da atividade 21, conceitue excentricidade de uma hipérbole.

Atividade 28

Título: Hipérbole

Tipo de Atividade: Individual/Construção de hipérboles dados seus eixos.

Nível: 03

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer a equação reduzida da hipérbole.

Atividade: Construa duas hipérboles com eixo real (eixo x) medindo 8 unidades e eixo imaginário medindo 6 unidades. Defina, de forma genérica, a equação reduzida da hipérbole.

4.4 Atividades para Parábolas

Atividade 29

Título: Parábola

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Parábolas no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer parábolas mediante a construção de equações no GeoGebra.

Atividade: Construa a parábola $y^2 = 6x$. Marque o ponto A = (3/2, 0) e construa a reta x = - 3/2. Com a ferramenta ponto, clique na parábola para ser construído o ponto B. Construa o segmento AB e com a ferramenta reta perpendicular construa uma reta que passa pelo ponto e B e seja perpendicular ao eixo y. Marque o ponto D (intersecção da reta perpendicular ao eixo y com a reta x = -3/2). Com a ferramenta mover, clique no ponto B e mova-o sobre a parábola. Anote os valores encontrados para os segmentos AB e BD. O que você pode concluir?

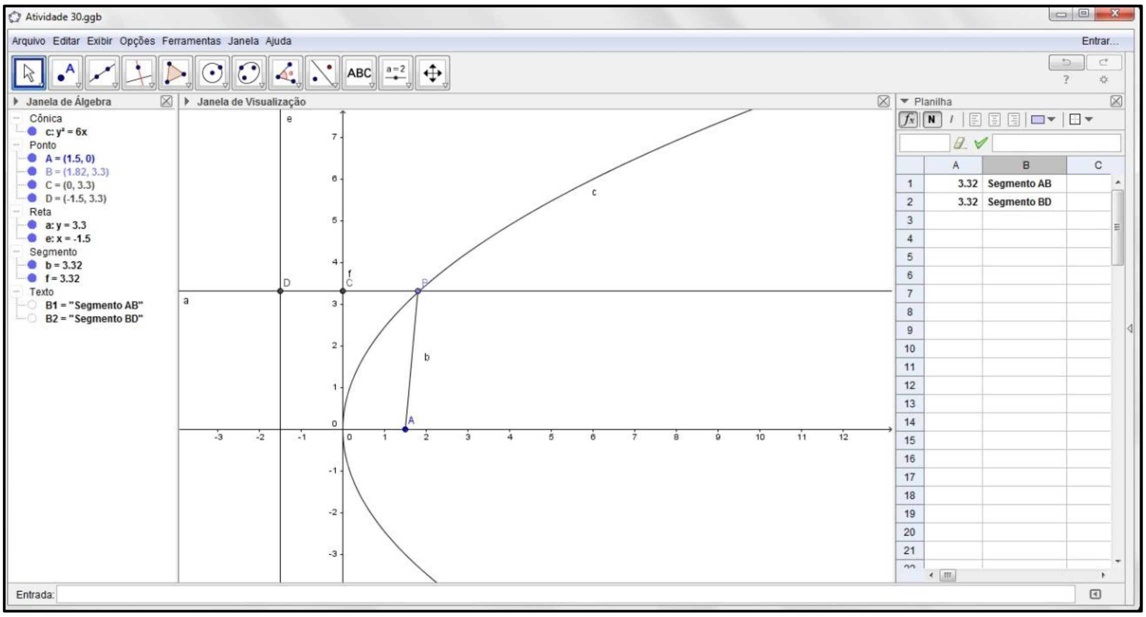


Figura 41

Atividade 30

Título: Parábola

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Parábolas no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer parábolas mediante a construção de equações no GeoGebra.

Atividade: Construa no GeoGebra as seguintes curvas e compare seus gráficos com imagens da atividade 01. Determine suas coordenadas do foco e seu eixo de simetria.

a) $y^2 = 6x$

b) $x^2 = 6y$

Atividade 31

Título: Parábola

Tipo de Atividade: Individual/Construção de Parábolas no GeoGebra.

Nível: 02

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Reconhecer parábolas e identificar seu foco e diretriz mediante a construção de equações no GeoGebra.

Atividade: Construa as parábolas $y^2 = 4x$, $x^2 = 16y$. Nas figuras formadas identifique as coordenadas de suas retas diretrizes, seus parâmetros e seus focos.

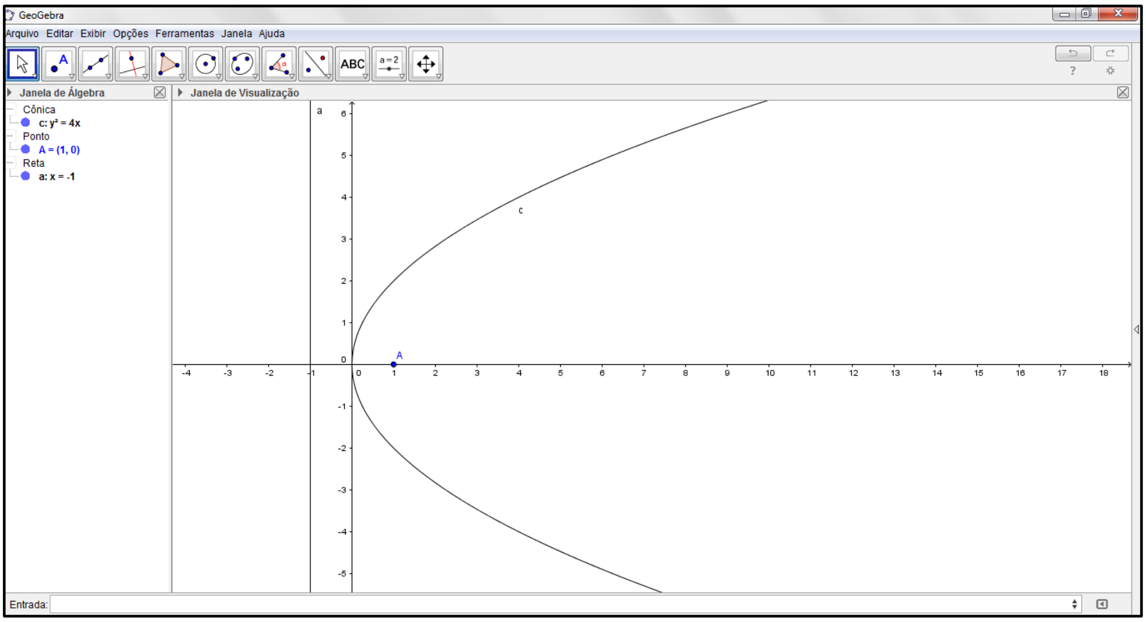


Figura 42

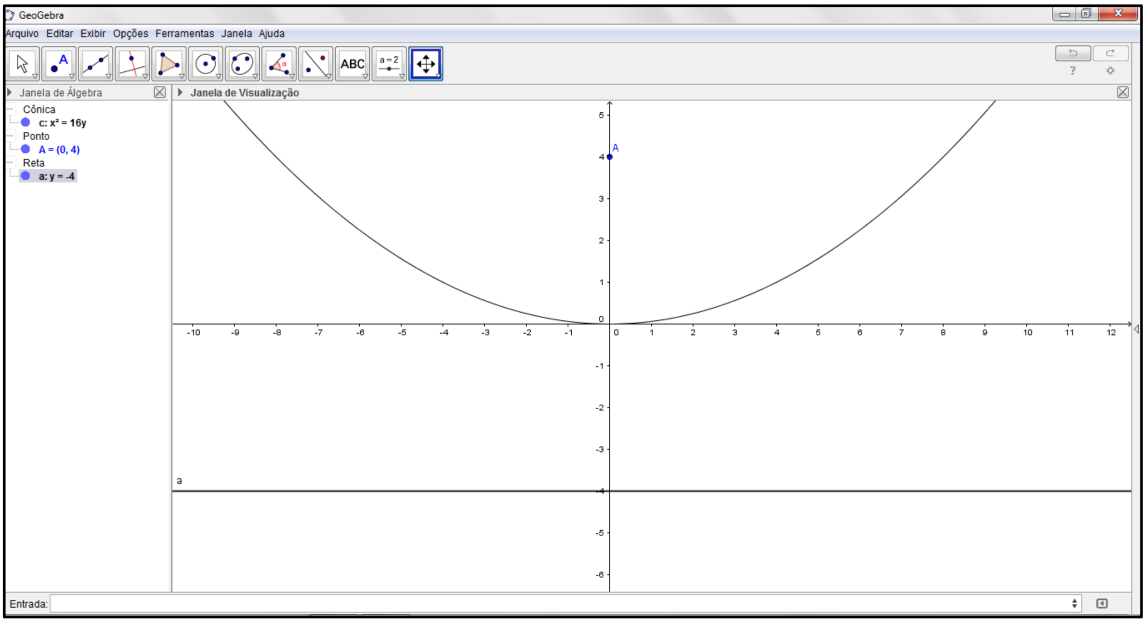


Figura 43

Atividade 32

Título: Parábola

Tipo de Atividade: Individual/Elementos principais de uma Parábola

Nível: 03

Tempo: 30 minutos

Objetivo: Reconhecer e nomear os elementos principais de uma parábola.

Atividade: Utilize como base as atividades anteriores sobre parábola e destaque os seguintes elementos:

a) focos

b) reta diretriz

c) parâmetro

d) vértice

e) eixo de simetria

f) relação notável

Atividade 33

Título: Parábola

Tipo de Atividade: Individual/Generalizar uma equação a partir de construções feitas no GeoGebra

Nível: 03

Tempo: 20 minutos

Objetivo: Definir uma parábola.

Atividade: Com base na atividade 29, construa novas parábolas e verifique a relação encontrada. Compare o valor encontrado para os segmentos AB e BD. A partir dos dados obtidos defina uma parábola, caracterizando sua equação.

Considerações Finais

A finalidade deste trabalho foi divulgar uma proposta de ensino da Geometria Analítica através do método de Van Hiele, buscando aprimorar o conhecimento dos alunos de Ensino Médio, por acreditar que o conhecimento nessa área não deve se apoiar somente nos estudos de equações e fórmulas.

Em relação às atividades propostas para sala de aula, entendemos que essas são importantes para detectar o que os alunos conhecem sobre o tema e quais são suas possíveis deficiências. Trazendo assim para realidade do educando uma aplicabilidade do conceito estudado, como forma de motivá-lo a resolver problemas.

Para o desenvolvimento do trabalho de Cônicas com o uso do GeoGebra como alternativa de ensino, acreditamos que possamos desenvolver a criatividade e uma postura crítica em nossos alunos. Assim, a utilização do recurso computacional se torna valiosa para enfatizar o comportamento das propriedades e conceitos. Além promover discussões sobre o desenvolvimento da Matemática em determinado campo de estudo. Um próximo passo é testar experimentalmente essa proposta, registrar e avaliar os resultados obtidos.

Finalizamos reconhecendo que são incontáveis os estudos para aperfeiçoar o ensino-aprendizagem da disciplina Geometria Analítica e que muito ainda precisa ser feito para a melhoria desta. Acreditamos que a solução para um ensino de qualidade possa vir somente após muitas pesquisas e experimentos; estimulando o professor, e não só o aluno, também a assumir seu papel para uma sociedade melhor. Estímulo esse, que foi reencontrado neste trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] AZEVEDO, Rosa Oliveira Martins *et alli*(orgs.). Contribuição da Internet para o ensino-aprendizagem escolar. Revista Eletrônica de Ciências – N.º42, 2008. Acessível em: http://www.cdcc.sc.usp.br/ciencia/artigos/art_42/educacao.html.

[2] BORRÕES, Manuel L. Catela. O computador na educação matemática. Acessível em: http://mail.google.com/mail/u/0/?tab=wm&pli=1#inbox/1475653877b2a580?projector=1.html.

[3] BOYER, Carl B. História da matemática. 2ª Edição. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais+ (PCN+): Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Parte III. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

[5] BRASIL. Ministério da Educação. Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Secretariade Educação Básica, 2006. v. 2.

[6] CROWLEY, Mary L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, Mary & SHULTE, Albert P. (organizadores), Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

[7] EVES,H. Introdução à História da Matemática. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

[8] FANTINEL, Patrícia C. Representações gráficas espaciais para o ensino de cálculo e álgebra linear. Rio Claro: Unesp, Dissertação de Mestrado, 1998.

[9] FLORES, P. Q., Flores, A., e Escola, J. (2008). A plataforma Moodle no 1º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Superior. In F. Costa et al. (Orgs.). Comunidades de

Aprendizagem Moodle. Actas do encontro CaldasMoodle'08. Monte da Caparica: Educom.

[10] FREUDENTHAL, H. (1973). Mathematics as an educational task.Dordrecht: Reidel.

[11] GeoGebra Manual. The official manual ofGeoGebra. Disponível em: http://geogebra.ir/geogebra/Files/PDF/1ebdfcdc018141828ae75acfdb586247.pdf. Acesso em 02/03/2013.

[12] IEZZI, Gelson, Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria Analítica. Vol. 7. 5 ed. São Paulo: Editora Atual, 2005

[13] JUCÁ, Sandro C. S. A relevância dos softwares na educação profissional, Ciências & Cognição, 2006; Vol. 08: 22-28.

[14] Linguagens, códigos e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 239 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 1)

[15] Martins, Erickson Nunes.Uma abordagem construtivista do teorema de Tales sob a perspectiva da teoria de Van Hiele/Erickson Nunes Martins – Seropédica. RJ, 2014.

[16] MILANI, E. A. Informática e a Comunicação Matemática. In: DINIZ, M. I. & SMOLE, K. S. (Orgs.). Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, p.175 – 203, 2001.

[17] NASSER, Lilian; SANT'ANNA, Neide F. Parracho. *Geometria segundo a teoria de Van Hiele*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática / UFRJ, 2010.

[18] NASSER, Lilian. A Teoria de van Hiele para o ensino de geometria.Anais do 1ºSeminário de Educação Matemática do Rio de Janeiro – Projeto Fundão-IM/UFRJ, 1993, p.29-40.

[19] NASSER, L. SANT'ANNA, N.F.P (coordenadoras). Geometria segundo a teoria deVan Hiele. Instituto de matemática – UFRJ. Projeto Fundão. Rio de Janeiro, 1997.

[20] PIAGET, J. A psicologia. 2. Ed. Lisboa: Livraria Bertrand, 1973.

[21] PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. O contributo das tecnologias deinformação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidadeprofissional. In: FIORENTINI, D. (Org.). Formação de professores de Matemática:explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado das Letras, 2003. p.159-192.

[22] SILVA, M. Sala de aula interativa: educação, comunicação, mídia clássica. 6 ed. São Paulo: Edições Loyola, 2012 (Coleção práticas pedagógicas).

[23] VAN HIELE, P.M. (1973). Begrip e Inzicht.Muusses: Purmerend.

[24] Vygotsky, L. S. Aprendizagem e desenvolvimento: um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione,1997.

[25] Vygotsky, L. S. Pensamento e linguagem. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

[26] Vygotsky, L.S. A Formação Social da Mente. São Paulo: Martins Fontes, 2003.