UFRRJ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

ANÁLISE SOBRE A PROVA DE ACESSO AO COLÉGIO NAVAL RELACIONANDO COM OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS E LIVROS DIDÁTICOS

FAGNER DE ALMEIDA CARVALHO DOS SANTOS

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ANÁLISE SOBRE A PROVA DE ACESSO AO COLÉGIO NAVAL RELACIONANDO COM OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS E LIVROS DIDÁTICOS

FAGNER DE ALMEIDA CARVALHO DOS SANTOS

Sob a Orientação do Professor
Orlando dos Santos Pereira

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Seropédica, RJ

Setembro de 2019

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237a SANTOS, FAGNER DE ALMEIDA CARVALHO DOS, 1982-
Análise sobre a prova de acesso ao colégio naval relacionando com os parâmetros curriculares nacionais e livros didáticos / FAGNER DE ALMEIDA CARVALHO DOS SANTOS. - Seropédica , 2019.
95 f.: il.

Orientador: Orlando dos Santos Pereira.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Mestrado profissional em matemática em rede nacional - PROFMAT, 2019.

1. Colégio Naval. 2. Resoluções de Questões. 3. Conteúdo do Ensino fundamental . 4. Livros Didáticos. 5. PCNS. I. Pereira, Orlando dos Santos, 1976-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Mestrado profissional em matemática em rede nacional - PROFMAT III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

FAGNER DE ALMEIDA CARVALHO DOS SANTOS

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 27/09/2019

____
Orlando dos Santos Pereira - Dr. UFRRJ
(Orientador)

____
Vinicius Leal do Forte – Dr. UFRRJ

____
Emerson Souza Freire - Dr. UFF

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me mantido com a saúde e disposição para que pudesse vencer mais esse desafio;

Agradeço ao meu orientador professor Dr. Orlando dos Santos Pereira pela atenção, paciência, palavras de motivação que foram fundamentais na elaboração desse trabalho.

Agradeço a todos os professores do curso PROFMAT/UFRRJ pelo empenho na formação dos novos mestres;

Agradeço aos colegas de turma, pelo companheirismo, apoio e espírito de unidade mostrado durante todo o curso;

Agradeço ao Capes, pelo apoio financeiro, mesmo parcial, mas essencial para tornar este momento real.

Agradeço a Banca de Exame, pela disponibilidade e pelas observações.

Agradeço a Professora Eulina e a Aline pelas palavras de incentivo;

Agradeço minha mãe Helena pelo apoio moral.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001.

Resumo

O objetivo deste trabalho é fazer uma análise das dificuldades dos candidatos que se interessam ao acesso ao colégio naval e elaborar diretrizes que auxiliem os alunos e professores neste sentido. Notou-se que os livros didáticos não apresentam conteúdos na mesma proporção dos exames e as vezes não permeiam todo o conteúdo que é necessário. Esse fato foi uma das motivações que levou o autor a escrever esse trabalho, assim ficou como norte principal, elaborar um material que dê um suporte e uma orientação geral para o estudante que pretenda passar pelo processo seletivo ou para profissional da educação que tenha se deparado com a mesma problemática. E ainda, para estudantes e professores que queiram se aprofundar e se aperfeiçoar em alguns conteúdos da matemática.

ABSTRACT

The aim of this paper is to analyze the difficulties of candidates interested in access to the naval college and to develop guidelines to help students and teachers in this regard. It was noted that textbooks do not present content in the same proportion as the exams and sometimes do not permeate all the content that is needed. This fact was one of the motivations that led the author to write this work, so he became the main guide, to elaborate a material that gives support and general guidance for the student who wants to go through the selection process or for the education professional who has come across. with the same problem. Also, for students and teachers who want to deepen and improve on some math content.

LISTA DE FIGURAS

Sumário

INTRODUÇÃO

Inspirado na beleza e no grau de dificuldade das questões do exame de seleção do colégio naval, o autor resolveu fazer o trabalho de conclusão de curso analisando as provas do colégio naval que, apesar de ser uma prova com conteúdo predominantemente do ensino fundamental, possui assuntos que não são estudados na educação básica ou mesmo vistos de uma forma descontextualizada, sendo que alguns deles são vistos em geral num curso de graduação.

Durante os dez anos como professor lecionando em escola pública, diversas vezes o autor foi indagado por aluno pedindo auxílio para se preparar para esse exame, seja através de material para estudar, como se preparar, ou trazendo provas anteriores na qual queria uma explicação para solucionar as questões.

Por ser um concurso com um alto grau de dificuldade, não era possível fornecer um livro didático que pudesse dar um bom suporte nos estudos para o exame, já que todos os livros didáticos fornecidos aos professores do ensino público possuem muitas deficiências nos conteúdos e exercícios trabalhados, servindo como instrumento somente para dar uma base superficial.

Esse fato foi uma das motivações que levou o autor a escrever esse trabalho, assim ficou como objetivo geral, elaborar um material que dê um suporte e uma orientação geral para o estudante que pretenda passar pelo processo seletivo ou para profissional da educação que tenha se deparado com a mesma problemática. E também, para estudantes e professores que queiram se aprofundar e se aperfeiçoar em alguns conteúdos da matemática.

Os capítulos deste trabalho estão divididos da seguinte forma:

No Capítulo 1 é feito uma análise dos PCNS relacionando-o com os conteúdos do ensino fundamental, a finalidade e os objetivos do mesmo, disserta sobre o recurso resolução de problemas e a avaliação, sempre correlacionando com os PCNS.

Capítulo 2 é feito uma análise de um livro didático muito utilizado, onde cada conteúdo do exame é estudado sob o viés do livro didático, assim é observado como o livro aborda, se o conteúdo é suficiente ou não para um estudante que está se preparando para o exame. Em seguida, uma questão de uma das provas anteriores do exame é exposta para corroborar a assertiva anterior.

No Capítulo 3 é apresentado alguns resultados que entendemos ser necessários para uma boa preparação para o exame, já que foram cobrados em seleções anteriores e que não consta nos livros didáticos, em geral.

No Capitulo 4 é apresentado algumas questões de provas antigas com resolução feita pelo autor e discussões sobre as soluções. Além disso, apresenta-se um estudo de caso em uma turma do nono ano, onde foi aplicado um teste qualitativo, com questões consideradas de nível baixo para analisarmos as dificuldades encontradas pelos alunos e através deste teste, embasarmos melhor as conjecturas que foram colocadas nos objetivos deste trabalho.

CAPÍTULO 1-ANÁLISE DA PROVA DE ACESSO AO COLÉGIO NAVAL-RJ SOB A LUZ DOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Os **PCNs -** Parâmetros Curriculares Nacionais são diretrizes elaboradas para orientar os educadores por meio da normatização de alguns aspectos fundamentais concernentes a cada disciplina. Os **PCNs servem** como norteadores para professores, coordenadores e diretores, que podem adaptá-los às peculiaridades locais.

Os profissionais da educação não estão engessados em relação aos PCNs podendo adotar suas orientações conforme for mais adequadas e convenientes para cada localidade, já que as necessidades dos estudantes mudam conforme a região, idade, cultura e etc. Neste capítulo analisaremos os PCNs sempre fazendo relação com a prova, para ter uma referência e assim averiguar se está de acordo com essa normatização, ou caso contrário, concluir que está em desacordo e segue um ideal de uma instituição militar que têm seus próprios objetivos e princípios norteadores.

1.1 OBJETIVO DO ENSINO FUNDAMENTAL SEGUNDO O PCN

OS Parâmetros Curriculares Nacionais(PCN) determinam uma diretriz no sentido que o aluno do ensino fundamental deve adquirir quando tiver cursando para poder se desenvolver e lidar com as demandas do dia-a-dia, faz referências as diversas habilidades sociais, cognitivas e de autopercepção que permitam controlar seus conflitos internos, e aumentar sua adaptação ao meio. Algumas delas à saber:

> Desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades afetivas, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania (PCN,1997,p.6).

Os conteúdos estudados e assimilados servem de base e alicerce para o aprendizado de outras disciplinas, e assim, obtendo maior bagagem que permita interpretar e interagir com o meio de forma a modificá-lo de maneira mais acertada. Sobre isso o PCN afirma:

> Utilizar as diferentes linguagens – verbal,matemática, gráfica, plástica e corporal – como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação (PCN,1997,p.6).

Muitos dos objetivos almejados exigem um pleno domínio dos conteúdos de forma integrada e contextualizada, algo que só é conseguido muita das vezes na conclusão do ensino médio, cabendo ao professor otimizar isso ao máximo, respeitando a limitação e o tempo de amadurecimento de cada aluno. A esse respeito o PCN afirma:

> Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático(aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico,combinatório, probabilístico); selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente (PCN,1997,p.33)

Alguns dos objetivos como criar estratégias, montar esquema expressando o raciocínio utilizado para que o professor possa avaliar não só o resultado obtido, mas todo o caminho percorrido, e se houver falha, considerar seu raciocínio até o ponto atingido, cabendo o educador pontuar a ideia desenvolvida, mesmo que ela não leve ao resultado esperado, estimulando o discente a pensar e refletir sobre a situação- problema. Sobre isso o PCN afirma:

> Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis (PCN,1997,p.37).

Adquirir proficiência em matemática é de fundamental importância para as atividades diárias, pois não importa o que faça, sempre é necessário utilizar o raciocínio lógico, comprar, efetuar pagamento, definir prioridade e planejar o futuro, entre outras ações do dia-a-dia, em tudo isso, essa disciplina servirá como exercício mental ajudando a obter mais perícia e agilidade nas execuções dessas tarefas.

Ainda que sejam outras áreas curriculares ligadas as ciências humanas, ela estará presente das mais diversas formas, seja por meio de gráficos, porcentagens, tabelas, análise estatística, coerência lógica do texto e etc.Sobre isso o PCN afirma:

> A matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Faz parte da vida de todas as pessoas nas experiências mais simples como contar, comparar e operar sobre quantidades. Nos cálculos relativos a salários, pagamentos e consumo, na organização de atividades como agricultura e pesca, a matemática se apresenta como um conhecimento de muita aplicabilidade. Também é um instrumental importante para diferentes áreas do conhecimento, por ser utilizada em estudos tanto ligados às ciências da natureza como às ciências sociais e por estar presente na composição musical, na coreografia, na arte e nos esportes(PCN,1997,p.24).

Dentro de tudo que foi exposto, o Ensino fundamental é uma das fases mais importantes para os estudantes, onde seu caráter irá ser consolidado e seu desenvolvimento mental, psíquico e cognitivo sofrerá uma expansão considerável, se tornando um cidadão atuante e agente de seu futuro.

A matemática, sem dúvida, terá um papel decisivo nessa empreitada, já que ela afeta em diversos setores na vida de uma pessoa, que vai desde sua autoestima, inteligência emocional, capacidade de planejar o futuro, resiliência dentre outras coisas.

1.2 UTILIZANDO O RECURSO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO O PCN

O desenvolvimento de boa parte da matemática foi motivado para resolver problemas que ia surgindo no decorrer da caminhada do homem que poderiam ser das mais variadas espécies o que permitiu que a tecnologia avançasse drasticamente.

Não foi só na procura de resolver os problemas do cotidiano que essa ciência progrediu, mas também por problemas formulados por grande matemático como O último teorema de Fermat que demorou séculos para ser resolvido e foi necessário o desenvolvimento de várias teorias para que se tivesse a matemática que pudesse solucioná-lo, além disso, outras ciências como a física, astronomia, medicina, química e etc, também contribuíram nessa jornada. Sobre isso o PCN diz:

> A História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências(Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática(PCN,1997,p.32).

Muito aluno nos anos iniciais da fase escola, adquiri alguns vícios ao resolver problemas envolvendo as quatro operações, que é tentar enquadrar, o mesmo, numa das quatro operações, ao invés de interpretar e entender o que a situação-problema está pedindo.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, além desse fato citado, ocorre também de o aluno aplicar o conceito sem entender direito o que o enunciado está pedindo, virando uma mera aplicação de fórmula ou método de resolver, no entanto, quando se depara com questões mais rebuscadas, seu automatismo se mostra ineficiente, e o estudante não consegue aplicar o conceito em questão. Sobre isso o PCN afirma:

> A prática mais frequente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas(PCN,1997,p.32)

Ainda sobre isso, o PCN volta a ser bem categórico e faz definições claras e concisas do que considera problema, está ligado também a postura do aluno ao analisar a questão, podemos entender melhor no trecho:

> o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada (PCN,1997,p.32)

O PCN ainda faz referência de como deveriam ser abordados conceitos, definições e conteúdos que é através de situações-problemas, pode-se dizer que isso é inovador, pois no geral, nem os livros didáticos trabalham assim, mas do ponto de vista que isso pode tornar as aulas mais atrativas e interessantes dando mais significado ao aluno, despertando o gosto pela disciplina, é um fato a se considerar. Esse fato é expresso no trecho:

> o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las (PCN,1997,p.32)

O PCN explica como isso pode ser feito e como os conceitos podem surgir para dar significado ao problema, podemos ver isso em:

> aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática. O aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações.(PCN,1997, p.33)

Muitas questões do exame pode proporcionar a situação-problema adequada para construção de conceitos e conteúdos, já que exigem um raciocínio rebuscado e no geral, não permite mera aplicação de fórmula e conteúdo, podemos constatar isso na questão a seguir:

(CN-2002) Dois ciclistas, com velocidades constantes, porém diferentes, deslocam-se em uma estrada retilínea que liga os pontos A e B. Partem de A no mesmo instante e quando alcançam B, retornam a A, perfazendo o movimento

$A - B - A - B$, uma única vez. Quando o mais veloz alcança o ponto B, pela primeira vez, retorna no sentido de A encontrando o outro a 4 km de B. Quando o mais lento atinge o ponto B, retorna imediatamente e reencontra, no meio do percurso, o outro que está vindo de A. Desprezando-se o tempo gasto em cada mudança no sentido de percurso, a distância entre os pontos A e B, em km, é igual a?

Essa questão exige estratégia, traçar um esquema para entender o problema e não permite que o aluno tente meios mecânicos para encontrar a solução, além de ser um problema interdisciplinar, ou seja, permite trabalhar conceitos de Física Cinemática, fato excelente, que agrega mais ao estudante.

1.3 A AVALIAÇÃO SEGUNDO O PCN RELACIONANDO COM A PROVA DE ACESSO DO COLEGIO NAVAL-RJ

A avaliação segundo os parâmetros curriculares nacionais (PCN) afirma que deve ser usada como instrumento de diagnostico e autopercepção de como vai conhecimento do aluno na disciplina, e assim, poder conhecer melhor suas deficiências para poder trabalhá-las.

> A avaliação subsidia o professor com elementos para uma reflexão contínua sobre a sua prática, sobre a criação de novos instrumentos de trabalho e a retomada de aspectos que devem ser revistos, ajustados ou reconhecidos como adequados para o processo de aprendizagem individual ou de todo grupo. Para o aluno, é o instrumento de tomada de consciência de suas conquistas, dificuldades e possibilidades para reorganização de seu investimento na tarefa de aprender. Para a escola, possibilita definir prioridades e localizar quais aspectos das ações educacionais demandam maior apoio (PCN,1997,p.55).

A avaliação não deve atuar como uma ferramenta de estigmatização ao aluno, rotulando como fracassado, derrotado ou incapaz de aprender determinada disciplina e conteúdo, pelo contrário, sua função deve ser de aliada, que tem como um dos objetivos, fazer o diagnóstico das deficiências para que elas sejam trabalhadas pelo profissional da educação. E assim, ao analisar o quanto o estudante progrediu e assimilou os conteúdos, poder determinar a melhor intervenção pedagógica. Sobre isso o PCN diz:

> A avaliação, ao não se restringir ao julgamento sobre sucessos ou fracassos do aluno, é compreendida como um conjunto de atuações que tem a função de alimentar, sustentar e orientar a intervenção pedagógica. Acontece contínua e sistematicamente por meio da interpretação qualitativa do conhecimento construído pelo aluno. Possibilita conhecer o quanto ele

> se aproxima ou não da expectativa de aprendizagem que o professor tem em determinados momentos da escolaridade, em função da intervenção pedagógica realizada. Portanto, a avaliação das aprendizagens só pode acontecer se forem relacionadas com as oportunidades oferecidas, isto é, analisando a adequação das situações didáticas propostas aos conhecimentos prévios dos alunos e aos desafios que estão em condições de enfrentar (PCN,1997,p.55)

Em relação a avaliação do exame que busca selecionar os melhores, até por que, o número de vagas é limitada, assim obviamente, selecionar os candidatos que possuem a maior gama de conhecimento e capaz de resolver situação-problema com alto grau de complexidade, tende a ser mais benéfico a qualquer instituição de ensino, além do mais, uma que tem como um dos objetivos preparar o aluno para ingressar na Escola Naval que é uma instituição de ensino de Nível Superior renomada.

Por isso, o professor consciente desses fatos, deverá procurar saber quais são os objetivos de vida do aluno, para assim realizar um trabalho especializado dentro de suas possibilidades e limitações, conscientizando o estudante das qualidades e aptidões que terá que desenvolver se verdadeiramente almeja alcançar o projeto de vida idealizado.

Em se tratando de uma prova desse nível, quanto mais precoce for a preparação, melhor será, pois assim dará para planejar todo delineamento, e tão logo, poder atingir o objetivo e ficar ciente das dificuldades que terá que superar. Sobre esses fatos dissertados o PCN ratifica:

> O processo também contempla a observação dos avanços e da qualidade da aprendizagem alcançada pelos alunos ao final de um período de trabalho, seja este determinado pelo fim de um bimestre, ou de um ano, seja pelo encerramento de um projeto ou sequencia didática. Na verdade, a avaliação contínua do processo acaba por subsidiar a avaliação final, isto é, se o professor acompanha o aluno sistematicamente ao longo do processo pode saber, em determinados momentos, o que o aluno já aprendeu sobre os conteúdos trabalhados. Esses momentos, por outro lado, são importantes por se constituírem boas situações para que alunos e professores formalizem o que foi e o que não foi aprendido. Esta avaliação, que intenciona averiguar a relação entre a construção do conhecimento por parte dos alunos e os objetivos a que o professor se propôs, é indispensável para se saber se todos os alunos estão aprendendo e quais condições estão sendo ou não favoráveis para isso, o que diz respeito às responsabilidades do sistema educacional (PCN,1997,p.56)

Dentro dessa perspectiva, as questões do exame podem ser trabalhadas em sala de aula no sentido de aprofundar o assunto abordado, tendo o cuidado de subir gradativamente o grau de dificuldade ou fornecer meios e auxílios que permita o aluno desenvolver a atividade proposta. O PCN ainda reforça:

> Utilizar a avaliação como instrumento para o desenvolvimento das atividades didáticas requer que ela não seja interpretada como um momento

> estático, mas antes como um momento de observação de um processo dinâmico e não linear de construção de conhecimento (PCN,1997,p.56)

É também função do professor, ajudar o aluno a desenvolver a autocrítica, a se autoperceber, e assim poder atuar como agente transformador de si próprio, ou seja, adquirir autonomia, ser capaz de gerenciar seu próprio processo de aprendizagem. E assim como faria um escultor de uma obra de arte, o mesmo deveria ir trabalhando suas dificuldades, até que atinja o nível de excelência considerada razoável.

CAPÍTULO 2-ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

Neste capitulo será analisado o livro didático do ensino fundamental, a saber: Matemática Bianchini, este livro é usado no Ciep 026 São Vicente de Paula, que é uma das escolas que o autor desse trabalho leciona, assim é feita uma análise dos 4 volumes desse livro.

Como os livros didáticos das escolas públicas, de um modo geral, apresentam o mesmo nível de profundidade na forma que aborda o conteúdo, sendo similar também os conteúdos permeados, então optou-se por analisar apenas um livro didático, que é de conhecimento do autor deste trabalho.

Os livros didáticos agora deverão estar dentro dos moldes da Base Nacional Comum Curricular(BNCC), homologada pelo Conselho Nacional de Educação(CNE) no dia 20 de dezembro de 2017 para Educação Infantil e para o Ensino Fundamental. A lei que a instituiu definiu um prazo de dois anos para que o complexo sistema educacional brasileiro se adapte às novas diretrizes.

- **Informações Importantes do Edital do Exame**

INSCRIÇÕES: Dura em média um mês, começa final de abril e vai até final de maio.

PROVA: Inicio de agosto.

DURAÇÃO DO CURSO: 03 anos.

SEXO: Somente Masculino.

IDADE: Possuir 15 (quinze) e menos de 18 (dezoito) anos de idade no primeiro dia do mês de janeiro do ano da matrícula no curso.

VAGAS: 190 vagas de nível fundamental para candidatos do sexo masculino.

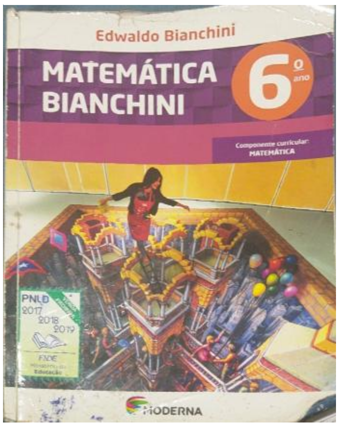
SALÁRIO: Durante a formação, remuneração mensal de R$ 1.300,00 (aproximadamente)

PROGRAMA PARA A PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA: Foi separado conforme o ano de escolaridade e está localizado logo no início da análise de cada livro didático.

2.1 LIVRO: MATEMÁTICA BIANCHINI

O livro possui uma boa abordagem nos conteúdos de maneira bem didática, com a linguagem fácil de entender, e exemplificando a teoria de forma crescente de dificuldade, ou seja, começa com exemplo simples, e vai trabalhando novos casos que torna o exercício mais rebuscado. A seguir faremos uma análise dos quatros volumes desta obra.

Figura 1-Livro Didático 6ºAno



Fonte: O autor

2.1.1 6ºAno

A seguir vamos analisar os conteúdos programáticos do concurso referente a esse ano de escolaridade, onde será feito uma comparação de como a matéria é trabalhada nos exercícios e de como ela é cobrada no concurso. Seguem os conteúdos referentes ao 6º ano:

- **Programa do Exame Referente ao Conteúdo do 6º ano**

ARITMÉTICA - Operações Fundamentais: adição, subtração, multiplicação, divisão e valor absoluto de números inteiros; Números Primos: decomposição em fatores primos, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum e suas propriedades; Frações Ordinárias: ideias de fração, comparação, simplificação, as quatro operações fundamentais e redução ao mesmo denominador; Frações Decimais: noção de fração e de número decimal, operações fundamentais, conversão de fração ordinária em decimal e vice-versa, e as dízimas periódicas e suas geratrizes; Sistema Métrico: unidades legais de comprimento, área, volume, ângulo,tempo, velocidade, massa, operações fundamentais, múltiplo e submúltiplo; Potências e raízes: definições, operações em potências, extração da raiz quadrada, potências e raízes de frações.

ÁLGEBRA – Noções sobre Conjuntos: caracterização de um conjunto, subconjunto, pertinência de um elemento a um conjunto e inclusão de um conjunto em outro conjunto, união, interseção, diferença de conjuntos, simbologia de conjuntos, sistemas de numeração, conjunto N dos números naturais, Z dos números inteiros, Q dos números racionais e R dos números reais;

GEOMETRIA – Introdução à Geometria Dedutiva: definição, postulado, teorema; Linhas, Ângulos e Polígonos: linhas, ângulos, igualdade de ângulos, triângulos, suas retas notáveis e soma de seus ângulos, quadriláteros, suas propriedades e soma de seus ângulos, construção geométrica e noção de lugar geométrico.

- **Análise da Seção da Aritmética**
    - **Operações Fundamentais: adição, subtração, multiplicação, divisão e valor absoluto de números inteiros**.

Esse conteúdo é uma das bases da matemática, aparecendo de forma direta ou indireta em todo certame. Um exemplo da forma direta que pode ser exigido, é esboçado pela questão a seguir:

(CN-2016) Calcule o valor de $X = \left(\frac{\sqrt{1^{1256}}+8943^0+\frac{3125}{5^5}+\sqrt[7]{1}}{1,5-2^{-1}+(-1)^{2058}}\right)^{\sqrt[7]{\frac{3^{21}+3^{23}}{10}}}$

No livro, o mais próximo que chegamos disso é na página 239, número 85 na seguinte questão:

(Fatec-SP) Efetuando as operações indicadas e simplificando a expressão $\left\{\left[(1,25) \times \frac{4}{25}\right] \div 0,08\right\} \div \left(\frac{16}{25} - 0,04\right)$, obtemos?

- **Números Primos: decomposição em fatores primos, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum e suas propriedades.**

O Contéudo neste livro é trabalhado de forma basica, deixando algumas brechas como a ausência do Algoritmo de Euclides e a relação entre MDC e MMC dada por: $mdc(a,b) \cdot mmc(a,b) = a \cdot b$

Essa relação é Fundamental para resolver algumas questões, como a seguir:

(**CN-2017)** O número h tem 241 algarismos e $h = (z \cdot w)^x$. O $MDC(x, 25)$, com x natural, resolvido pelo algoritmo das divisões sucessivas de Euclides, gera o esquema a seguir:

	y	1	4	← quocientes
x	25	z	w	← dividendos e divisores
z	w	0		← restos

Sendo assim, é correto afirma que a soma $x + y + z + w$ é igual a:

Nesse caso era imprescindível o conhecimento do algoritmo para resolução da questão, assim era fundamental conhecê-lo. Já no livro didático, sua aplicação ocorre principalmente através de situação-problema como a seguir:

(LIVRO-PG-118) Fiz 336 balas de coco e 252 balas de mel. Quero separá-las em pacotes, fazendo que cada pacote tenha o mesmo tipo e a mesma quantidade de balas. Qual é o maior número possível de balas em cada pacote? Quantos pacotes de bala terei?

- **Frações Ordinárias: ideias de fração, comparação, simplificação, as quatro operações fundamentais e redução ao mesmo denominador.**

Esse assunto é trabalhado de forma meticulosa e com bastante exercícios para reforçar o aprendizado, deixando a desejar na parte de expressão numérica que no geral é simples em comparação com as questões do exame, ou questão mais rebuscada que exija estratégia pois caso contrário, o candidato perderá um tempo precioso fazendo conta que poderia ser economizado, como no caso da questão a seguir:

(CN-2013) Sejam $P = \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{7}\right)\left(1 + \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{11}\right)$ e $Q = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{11}\right)$. Qual é o valor de $\sqrt{\frac{P}{Q}}$?

Resposta:

Efetuando a operação com fração em cada fator do produto, temos:

$P = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11}$ e $Q = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{11}$

$$\frac{P}{Q} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} \cdot \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{12}{3} = 4$$

Logo: $\sqrt{\frac{P}{Q}} = \sqrt{4} = 2$

Se tivesse multiplicado achando o valor de P e Q, para depois fazer a operação indicada, perderia muito tempo, e com mais chances de errar no calculo. Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-200) Calcule o valor da expressão:

$$\left[\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{9} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] \div \frac{7}{5}$$

- **Frações Decimais: noção de fração e de número decimal, operações fundamentais, conversão de fração ordinária em decimal e vice-versa, e as dízimas periódicas e suas geratrizes.**

O livro abrange de forma variada esse conteúdo possibilitando dar uma boa segurança ao estudante, na manipulação desses conteúdos, deixando uma lacuna em exercícios envolvendo periodicidade de dízimas periódicas, como na questão a seguir:

(CN-2013) Somando todos os algarismos até a posição 2012 da parte decimal da fração irredutível $\frac{5}{7}$ e, em seguida, dividindo essa soma por 23, qual será o resto dessa divisão?

Para resolver essa questão exige que o aluno tenha praticado esse raciocínio de somar números que se repetem periodicamente.

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-208) Represente $\frac{1}{1.000.000}$ na forma decimal.

- **Sistema Métrico: unidades legais de comprimento, área, volume, ângulo,tempo, velocidade, massa, operações fundamentais, múltiplo e submúltiplo;**

Assunto pouquíssimo abordado no concurso, para ser mais especifico, a última vez que caiu foi em 2001, através da questão:

(CN-2001) Para se demarcar o estacionamento de todo o lado direito de uma rua reta, foram pintados 20 retângulos de 4,5 metros de comprimento e 2,5 metros de largura. Sabendo-se que os carros estacionam no sentido do comprimento dos retângulos e da rua, e à frente e atrás de cada um dos retângulos tem 50 centímetros de folga, qual é o comprimento, em metros, da rua?

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-297) Quantos azulejos quadrados de 20 cm de lado são necessários para recobrir uma parede de 3,6 m por 3m?

Em outras vezes que o exame cobrou esse tema, também foi em situação-problema onde era necessário montar uma equação para resolver, e a unidade de medida era apenas um detalhe do problema, já nesse instrumento, é trabalhado de forma mais singela, em problemas que não necessitam de equação.

- **Potências e raízes: definições, operações em potências, extração da raiz quadrada, potências e raízes de frações.**

Analogamente, deixa a deseja no quesito expressão numérica, que em comparação ao exame, é deficiente. No capítulo 4, prova de acesso do ano 2016, questão 1 expressa bem essa ideia.

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-71) Calcule o valor da expressão:

$(2^3 \times 3^2 - 6^2) \div [18 \div (15 - 3 \times 2^2)]^2$

- **Análise da Seção da Álgebra**
    - **Noções de Conjuntos**

No geral, os livros didáticos atuais do Ensino Fundamental não trazem mais esse conteúdo: Noções de Conjuntos, só voltando a ser abordado no 1º ano do Ensino Médio.

- **Análise da Seção da Geometria**
    - **Introdução à Geometria Dedutiva: definição, postulado, teorema;**

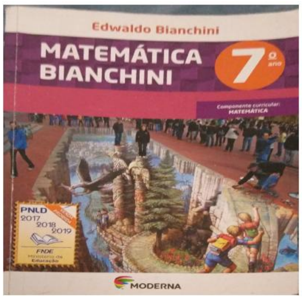
O livro da apenas uma noção bem superficial de ponto, reta e plano sem trabalhar com postulado e teorema.

- **Linhas, Ângulos e Polígonos: linhas, ângulos, igualdade de ângulos, triângulos, suas retas notáveis e soma de seus ângulos, quadriláteros, suas propriedades e soma de seus ângulos, construção geométrica e noção de lugar geométrico.**

Esses assuntos são permeados de forma superficial, onde são dadas as definições iniciais de ângulos, triângulos e quadriláteros sendo este último melhor caracterizado, por se tratar de um livro de 6º ano, muitos outros elementos importantes deixam de ser abordado.

2.1.2 7ºAno

Figura 2- Livro Didático do 7ºano



Fonte: O autor

- **Programa do Exame Referente ao Conteúdo do 7º ano**

ARITMÉTICA –

Razões e Proporções: razão de duas grandezas, proporção e suas propriedades, escala, divisão em partes direta e inversamente proporcionais, regras de três simples e composta, porcentagem.

ÁLGEBRA-

Números Relativos: noção de números relativos, correspondência dos números reais com os pontos de uma reta e operações com números relativos; Equações: equações e identidades, equações equivalentes, princípios gerais sobre a transformação de equações e sistema de equações; Equações e Inequações do 1º Grau: resolução e discussão de equações.

GEOMETRIA

ângulos, igualdade de ângulos.

- **Análise da Seção da Aritmética**
  - **Razões e Proporções: razão de duas grandezas, proporção e suas propriedades, escala.**

O livro apresenta alguns exemplos de grandezas e apresenta situações-problemas onde é aplicada, assim é resolvida através de uma equação do 1ºgrau. Já no concurso, é aplicada de forma mais bem elaborada, juntando com outros conteúdos como porcentagem, formando mais de uma equação do 1ºgrau. Um exemplo seria:

(CN-2008) Um reservatório deve ser cheio completamente com uma mistura de 76% de gasolina e de 24% de álcool. A torneira que fornece gasolina enche este tanque, sozinha, em 4 horas, e a torneira que fornece álcool enche este tanque, sozinha em 6 horas. Abrindo-se essas torneiras no mesmo instante, quanto tempo a mais uma delas deve ser deixada aberta, depois de a outra ser fechada, para que as condições estabelecidas sejam satisfeitas?

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-192) Mauro quer desenhar o terreno de sua casa, que é retangular e mede 15 m de frente por 20 m de fundo. Ele quer desenhá-lo em uma folha que tem 28 cm de comprimento e 18 cm de largura, na escala $\frac{1}{100}$. O desenho do terreno caberá nessa folha? E se a escala usada for $\frac{1}{20}$?

- **Divisão em partes direta e inversamente proporcionais.**

O livro trás uma boa abordagem do assunto, mostra como é aplicado nos exemplos resolvidos, mas para o exame em questão, podemos ver nos exemplos que se seguem que o estudante não fica totalmente preparado.

(CN-2007) O litro do combustível X custa R$ 2,00 e do combustível Y , R$ 3,00 . O tanque do veículo V, que se move indiferentemente com os combustíveis X e Y , tem capacidade total de 54 litros. O veículo V, quando abastecido unicamente com o combustível X , tem rendimento de 15 quilômetros por litro e, quando abastecido unicamente com combustível Y , tem rendimento de 18 quilômetros por litro. Quantos reais gastará proprietário de V, caso resolva abastecer completamente o seu tanque com uma mistura desses combustíveis, de forma que, numericamente, os volumes correspondentes de X e Y sejam, simultaneamente, diretamente proporcionais aos rendimentos e inversamente proporcionais aos custos de cada um deles?

(LIVRO-PG-209) Em um concurso para escolha das melhores fotos de monumentos, foi oferecido um prêmio de R$ 3.600,00. Esse prêmio foi dividido entre os dois primeiros colocados em partes diretamente proporcionais aos pontos obtidos. Sabendo que o primeiro colocado atingiu 10 pontos e o segundo, 8, qual foi o prêmio de cada um?

Podemos perceber a diferença discrepante no grau de dificuldade de uma questão para outra, assim cabe o candidato que está se preparando procurar outros materiais para suprir essas deficiências.

- **Regras de três simples e composta, porcentagem.**

O conteúdo é abordado de forma tradicional, dando uma base superficial ao estudante, uma questão da prova de acesso de 2018 que até foi resolvida nesse trabalho no capitulo 4, tinha apenas variáveis não fornecia valor numérico sendo tratada até como uma questão de álgebra, o que mostra como um estudante do ensino regular em geral está defasado quando comparado a um exame desse nível.

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-223) Em 4 horas, 9 pessoas colhem uma quantidade de laranjas que preenche um total de 360 caixas. Quantas pessoas colhem a quantidade necessária para preencher 510 caixas em 3 horas?

- **Análise da Seção da Álgebra**
  - **Números Relativos: noção de números relativos, correspondência dos números reais com os pontos de uma reta e operações com números relativos;**

O conteúdo é permeado deforma bem didática e com bastantes exercícios para reforçar o aprendizado, isso é de suma importância, pois errando regra de sinal nas operações com inteiros compromete toda questão, no exame o domínio desse assunto se faz mais necessário nas expressões numéricas, que como vimos nas análises anteriores, demanda muito domínio de todas propriedades algébricas com números inteiros.

- **Equações: equações e identidades, equações equivalentes, princípios gerais sobre a transformação de equações e sistema de equações; Equações e Inequações do 1º Grau: resolução e discussão de equações.**

O livro vem construindo a ideia de equação de forma detalhada para o aluno compreender bem o conteúdo, esse assunto é abordado no exame em vários conteúdos, já que é uma ferramenta para resolver problema, mas pode aparecer de forma direta e criativa como na questão a seguir:

5)**(CN-2018)** Se $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+x}}$, é correto afirmar que o valor de x está no intervalo?

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-121) Calcule o valor de x na equação:

$$10 - 2(x + 3) = 8 + 3(2x + 5)$$

Como ferramenta para resolver problema, o livro consegue atingir o objetivo, mas no ramo da criatividade, o autor conclui que deixa a desejar.

- **Análise da Seção da Geometria**
  - **Ângulos, igualdade de ângulos**.

Esse ano de escolaridade começa a dar introdução ao assunto, apresentando conteúdos como: ângulos opostos pelo vértices, bissetriz de uma ângulos, ângulos complementares, suplementares e etc. Esse tópico é trabalhado com mais profundidade no 8ºano e depois complementado no 9ºano.

2.1.3 8ºAno

Figura 3-- Livro Didático do 8ºano

Fonte: O autor

- **Programa do Exame Referente ao Conteúdo do 8º ano**

  ARITMÉTICA

  Regras de aproximação no cálculo de uma raiz, dízimas periódicas e suas geratrizes.

  ÁLGEBRA

Operações Algébricas: adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios, produtos notáveis, fatoração, mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de polinômios; Frações Algébricas: expoente negativo, adição, subtração, multiplicação e divisão. Resolução e discussão de um sistema de duas ou três equações com duas ou três incógnitas, artifícios de cálculos,representação gráfica de uma equação com duas incógnitas, significado gráfico da solução de um sistema de duas equações com duas incógnitas, desigualdade, inequação e sua resolução, e resolução de um sistema de duas inequações com duas incógnitas;

  GEOMETRIA

Circunferência: diâmetros e cordas, tangentes, ângulos em relação à circunferência, segmento capaz, quadrilátero inscritível e construções geométricas, propriedade da bissetriz interna e externa. Medições na Circunferência: razão da circunferência para o seu diâmetro, cálculo de “Pi” pelos perímetros, o grau e seus submúltiplos em relação à medida de arcos em radianos, e mudança de sistemas;

- **Análise da Seção da Aritmética**
  - **Regras de aproximação no cálculo de uma raiz.**

O Livro trabalha o conteúdo de forma simples, mas bem direta, tratando apenas da raiz quadrada, as outras raízes, tal como raiz cúbica, quarta e etc, não apresenta nenhum exemplo de sua aplicação, mesmo sendo raro este tópico nos exames, mas sabemos que já foi abordado em seleções anteriores como:

(CN-1987) O número $\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$ está situado entre quais inteiros?

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-51) Entre os números 3,87 e 3,88, qual deles se aproxima mais de $\sqrt{15}$?

- **Dízimas periódicas e suas geratrizes.**

O livro didaticamente mostra como converter dízimas periódicas em fração, ou seja, achando suas geratrizes, mas não trabalha a mesma, em expressão numérica, apesar de ser dessa forma que é avaliado no exame. A seguir, apresenta-se uma questão onde tal conhecimento era necessário:

(C.N-2012) O valor de $\sqrt{9^{0,5}\times 0,333\cdots+\sqrt[7]{4\times\sqrt{0,0625}}-\frac{(3,444\cdots+4,555\cdots)}{\sqrt[3]{64}}}$ é?

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-59)(PUC-RJ) O valor de $\frac{\sqrt{1,777\cdots}}{\sqrt{0,111\cdots}}$ é?

- **Análise da Seção da Álgebra**
    - **Operações Algébricas: adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios, produtos notáveis.**

O conteúdo é trabalhado algebricamente e através da geometria, também usando a noção de perímetro e área para esboçar a ideia, ilustrando mais o conceito. Neste caso, o livro cumpriu seu papel, mas não aprofundou muito nas aplicações, apesar de conter algumas questões de concursos, de modo geral, o livro não chega ao nível da questão que é apresentada a seguir:

(CN-2008) Se $x+y=2$ e $\frac{(x^2+y^2)}{x^3+y^3}=4$, então xy é?

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-121) Sendo $x^2+\frac{1}{x^2}=5$. Calcule o valor de: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

- **fatoração, mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de polinômios; Frações Algébricas: expoente negativo, adição, subtração, multiplicação e divisão.**

Esses conteúdos são trabalhados muito bem de forma isolada, mas de maneira conjunta, deixa a desejar, pois eles são aplicados no exame, na maioria das vezes, juntos ou intercalando um com o outro. No capítulo 4, na prova de 2001, a questão 3 expressa bem essa ideia.

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-193)(OBM) Se $x + y = 8$ e $xy = 15$, qual é o valor de $x^2 + 6xy + y^2$?

- **Resolução e discussão de um sistema de duas ou três equações com duas ou três incógnitas, artifícios de cálculos,representação gráfica de uma equação com duas incógnitas, significado gráfico da solução de um sistema de duas equações com duas incógnitas.**

O livro trás uma base superficial para o exame, apresenta dois métodos de resolver sistema de equação do 1ºgrau, faz as discussões de raízes e representação gráfica, para ferramenta de resolução de problema cumpre bem os objetivos, mas quando a questão é específica, o material se mostra bem insuficiente. A questão a seguir expressa bem essa deficiência:

(CN-2014) Dado que a e b são números reais não nulos, com $b \neq 4a$, e que $\begin{cases} 1 + \frac{2}{ab} = 5 \\ \frac{5-2b^2}{4a-b} = 4a + b \end{cases}$, qual é o valor de $16a^4b^2 - 8a^3b^3 + a^2b^4$?

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-217) Sabendo que o par(x, y) é a solução do sistema abaixo, determine $\frac{x}{y}$.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{2x - y}{3} - \dfrac{x + 3y}{5} = 0 \end{cases}$$

- **Desigualdade, inequação e sua resolução, e resolução de um sistema de duas inequações com duas incógnitas.**

Analogamente a forma que aborda equação, o autor procede assim com a inequação do 1ºgrau, dando um bom embasamento, mas não aprofundando, assim em questão como essa do exame:

(CN-2011) No conjunto dos números reais, qual o conjunto solução da inequação $\frac{88}{\sqrt{121}} - \frac{1}{x} \leq 0{,}25^{\frac{1}{2}}$?

O aluno estará vulnerável, sem referência didática para solucionar a inequação. Já que o livro trabalha com esse assunto da seguinte forma:

(LIVRO-PG-139) Resolva a inequação a seguir:

$$4(x+3) > 2(x-1)$$

Foi observado que não se trabalhou o assunto sistema de inequação do 1ºgrau, que apesar de ter alguns anos que o exame não aborda, para ser mais específico, apareceu através da questão:

(CN-1994) Se $\begin{cases} \frac{4x-9}{7} \leq x-3 \\ \frac{3x+10}{4} \leq 2x-5 \end{cases}$, então x está entre que intervalo inteiro?

- **Análise da Seção da Geometria**
  - **Circunferência: diâmetros e cordas, tangentes, ângulos em relação à circunferência, segmento capaz, quadrilátero inscritível e construções geométricas, propriedade da bissetriz interna e externa**.

Os conteúdos são trabalhados de forma isolada e bem didática, com bastantes exercícios aplicando os conceitos, mas sem grau de dificuldade que possa dar uma boa base para fazer a prova. Uma questão que exige o conhecimento de quase todo o assunto para ser resolvida é exemplificada no capítulo 4, no ano de 2016, número 6. Já no livro didático, temos:

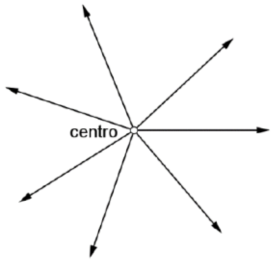
(LIVRO-PG-235) Um quadrilátero ABCD é circunscrito a uma circunferência. As medidas de seus lados são $AD = 12\ cm$, $DC = 9\ cm$, $BC = x + 7$ e $AB = 2x + 1$, com x em centímetro. Calcule o perímetro desse quadrilátero.

- **Medições na Circunferência: razão da circunferência para o seu diâmetro, cálculo de "Pi" pelos perímetros, o grau e seus submúltiplos em relação à medida de arcos em radianos, e mudança de sistemas.**

O livro aborda o assunto de forma bem resumida, sem exemplo mostrando a aplicação, e os exercícios que apresenta são bem básicos, distantes do que são vistos no exame. No exemplo a seguir, mostra como é aplicado no exame:

(CN-2016) Observe a figura a seguir.

Figura 4-Trajeto



Fonte: CN-2015

A figura acima representa o trajeto de sete pessoas num treinamento de busca em terreno plano, segundo o método "radar". Nesse método, reúne-se um grupo de pessoas num ponto chamado de "centro" para, em seguida, fazê-las andar em linha reta, afastando-se do "centro". Considere que o raio de visão eficiente de uma pessoa é 100 m e que $\pi = 3$. Qual a quantidade mais próxima do mínimo de pessoas necessárias para uma busca eficiente num raio de 900 m a partir do "centro" e pelo método "radar"?

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-225) Uma roda de bicicleta tem $40\,cm$ de raio. Calcule o comprimento da circunferência dessa roda. Considerando $\pi = 3{,}14$.

2.1.4 9ºAno

Figura 5- Livro Didático do 9ºano

Fonte: O Autor

- **Programa do Exame Referente ao Conteúdo do 9º ano**

ARITMÉTICA

cálculo de médias.

ÁLGEBRA

Números Irracionais: ideias de número irracional, expoente fracionário, radical e seu valor, cálculo aritmético dos radicais, operações com radicais e racionalização de denominadores; Equações do 2º Grau: resolução e discussão de uma equação, relações entre coeficientes e as raízes, sistemas do 2º Grau com duas ou três incógnitas, resolução de equações biquadradas e de equações irracionais, inequações irracionais; e Trinômio do 2º Grau: decomposição de fatores de 1º Grau, sinal do Trinômio, forma canônica, posição de um número em relação aos zeros do trinômio, valor máximo do trinômio, inequação do 2º Grau com uma incógnita, sistemas de inequações do 2º Grau e interseção dos conjuntos.

GEOMETRIA

Linhas Proporcionais e Semelhanças: ponto que divide um segmento em uma razão dada, divisão, harmônica, segmentos proporcionais, média proporcional, segmento áureo, linhas proporcionais nos triângulos, semelhança de triângulos e polígonos, e construções geométricas; Relações Métricas dos Triângulos: relações métricas no triângulo retângulo e em um triângulo qualquer, medianas e altura de um triângulo qualquer; Relações Métricas no Círculo: linhas proporcionais no círculo, potência de um ponto em relação a um círculo, relações métricas nos quadriláteros e construções geométricas; Áreas Planas: área dos triângulos, dos quadriláteros e dos polígonos regulares, do círculo, do segmento circular, do setor circular e da coroa circular, relações métricas entre áreas e figuras equivalentes.

- **Análise da Seção da Aritmética**
  - **cálculo de médias.**

Esse assunto é permeado de forma superficial no tópico Estatística e Probabilidade, onde é mostrado como simples aplicação de fórmula, já no concurso, é aplicado de forma contextualizada na qual exige que o estudante use o raciocínio lógico. Podemos ver isso na questão:

(**CN-2016)** Para obter o resultado de uma prova de três questões, usa-se a média ponderada entre as pontuações obtidas em cada questão. As duas primeiras questões têm peso 3,5 e a 3ª, peso 3. Um aluno que realizou essa avaliação estimou que:

I)sua nota na 1ª questão está estimada no intervalo fechado de 2,3 a 3,1; e

II) sua nota na 3ª questão foi 7.

III) Esse aluno quer atingir média igual a 5,6. A diferença da maior e da menor nota que ele pode ter obtido na 2ª questão de modo a atingir o seu objetivo de média é?

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-96) Num concurso, a prova escrita tem peso 3 e a prova prática tem peso 2. Qual é a média de um candidato que obteve nota 8 na prova escrita e nota 5 na prova prática?

- **Análise da Seção da Álgebra**
  - **Números Irracionais: ideias de número irracional, expoente fracionário, radical e seu valor, cálculo aritmético dos radicais, operações com radicais e racionalização de denominadores.**

O livro trabalha o assunto de forma minuciosa, cada propriedade do radical é didaticamente declarada e depois exemplificada através de vários exercícios resolvidos. No entanto, em se tratando do exame, se torna insuficiente, servindo apenas como ferramenta de embasamento, pode certificar disso através da comparação a seguir:

(LIVRO-PG-40) Racionalize a expressão $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

(CN-2013) Sabendo que $A = \frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}$, qual é o valor de $\frac{A^2}{\sqrt[6]{A^7}}$?

  - **Equações do 2º Grau: resolução e discussão de uma equação, relações entre coeficientes e as raízes.**

No quesito discussão das raízes o livro consegue dar um suporte para o exame, com exercícios no mesmo nível da prova, no capítulo 4, ano 2018, a questão 3 mostra como esse assunto é abordado. Já correlação aos coeficientes e raízes, fica devendo muito, pois é cobrado de uma forma bem rebuscada, como podemos ver na questão:

(CN-2012) A soma das raízes de uma equação do 2º grau é $\sqrt{2}$ e o produto dessas raízes é $0{,}25$. Determine o valor de $\frac{a^3-b^3-2ab^2}{a^2-b^2}$, sabendo que 'a' e 'b' são as raízes dessa equação do 2º grau e $a > b$.

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-127) Determine o valor de m na equação $4x^2 - (m-2)x + 3 = 0$ para que a soma das raízes seja $\frac{3}{4}$.

- **sistemas do 2º Grau com duas ou três incógnitas, resolução de equações biquadradas e de equações irracionais, inequações irracionais.**

O livro aborda os assuntos de forma resumida, dando uma definição básica e exemplificando com dois exemplos cada, exceto o conteúdo de inequações irracionais, que não é contemplado pelo material, por isso está no capítulo 3 como conteúdo não abordado pelo exame. No capítulo 4, na prova de ano 2016, número 3, mostra bem como a equação irracional é cobrada, bem distante do grau de dificuldade das que são trabalhadas no livro, a seguir um exemplo de como a equação biquadrada é aplicada:

(CN-2014) A equação $x^4 - (a-6)x^2 + (9-a) = 0$, na variável x, tem quatro raízes reais e distintas, se e somente se, a está entre qual intervalo inteiro?

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-121) Determine o conjunto solução da seguinte equação biquadrada

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

- **Trinômio do 2º Grau: decomposição de fatores de 1º Grau, sinal do Trinômio, forma canônica, posição de um número em relação aos zeros do trinômio, valor máximo do trinômio.**

O conteúdo é trabalhado com bastantes exercícios, situações-problemas aplicando os assuntos, mostra como pode ser útil em expressões algébricas para simplificação, utiliza função do 2º para mostrar a importância do valor Máximo, sendo que não teve aplicação na geometria, pois como podemos ver na questão a seguir, é exigido também.

(CN-2016) No triângulo isósceles ABC, AB=AC=13 e BC=10. Em AC marca-se R e S, com CR= 2x e CS=x . Paralelo a AB e passando por S traça-se o segmento ST, com T em BC. Por fim, marcam-se U, P e Q, simétricos de T, S e R, nessa ordem, e relativo à altura de ABC com pé sobre BC. Ao analisar a medida inteira de x para que a área do hexágono PQRSTU seja máxima, obtém-se:

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-199) Calcule o valor máximo da função dada pela lei

$y = -x^2 + 11x - 18$

- **inequação do 2º Grau com uma incógnita, sistemas de inequações do 2º Grau e interseção dos conjuntos.**

Esses assuntos não são trabalhados no livro de 9ºano, mas no 1º ano do ensino médio.

- **Análise da Seção da Geometria**
    - **Linhas Proporcionais e Semelhanças: ponto que divide um segmento em uma razão dada, divisão, harmônica, segmentos proporcionais, média proporcional, segmento áureo, linhas proporcionais nos triângulos, semelhança de triângulos e polígonos, e construções geométricas.**

Esses conteúdos são bem trabalhados de forma individual com exemplos singelos para demonstrar sua aplicação, mas ai que está sua deficiência, pois esses assuntos raramente são cobrados no exame de forma individual, e sim conectados a três ou quatro ou mais assuntos relacionados com a geometria. Na comparação das questões a seguir, isso fica bem evidente, enquanto na questão do livro usa só semelhança de triângulos, a do exame, além disso, usa Pitágoras, potência do ponto e trigonometria no triângulo retângulo.

(CN-2016) Seja ABCD um quadrado de lado “2a” cujo centro é “O”. Os pontos M, P e Q são os pontos médios dos lados AB, AD e BC, respectivamente. O segmento BP intersecta a circunferência de centro “O” e raio “a” em R e, também OM, em “S”. Sendo assim, a área do triângulo SMR é?

(LIVRO-PG-75) Os lados AB e AC de um triângulo medem, respectivamente, 35cm e 42 cm. No lado AB, distante 10 cm de A, marca-se um ponto D. Por D traça-se uma paralela a BC, que encontra AC no ponto E. Determine as medidas de AE e EC.

- **Relações Métricas dos Triângulos: relações métricas no triângulo retângulo e em um triângulo qualquer, medianas e altura de um triângulo qualquer; Relações Métricas no Círculo: linhas proporcionais no círculo, potência de um ponto em relação a um círculo, relações métricas nos quadriláteros e construções geométricas.**

Analogamente ao comentário anterior, esses conteúdos são abordados de forma individual faltando uma correlação entre eles, no geral, são explicados com uma boa didática e exemplos expressando os conceitos. Uma outra questão mostrando como esses assuntos são aplicados em conjunto, é exposta a seguir:

(CN-2002) Considere um triângulo equilátero ABC, inscrito em um círculo de raio R. Os pontos M e N são, respectivamente, os pontos médios do arco menor AC e do segmento BC. Se a reta MN também intercepta a circunferência desse círculo no ponto P, $P \neq M$, então o segmento NP mede?

Já no livro didático, temos:

(LIVRO-PG-145) Quanto mede, em cm, a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 15 cm e 20 cm?

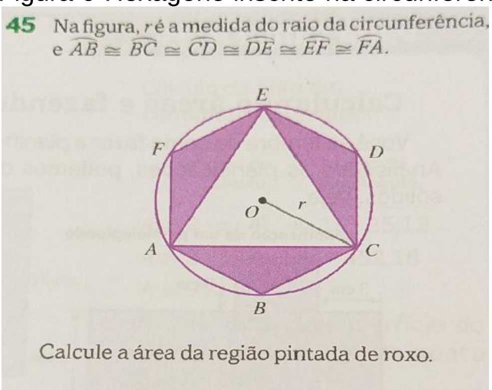
- **Áreas Planas: área dos triângulos, dos quadriláteros e dos polígonos regulares, do círculo, do segmento circular, do setor**

circular e da coroa circular, relações métricas entre áreas e figuras equivalentes.

O livro aborda o assunto de maneira sucinta, exemplificando aplicação com apenas um exemplo singelo, não dando uma boa base para os próprios exercícios propostos, que apresentam um nível um pouco acima da média, mas não chega no mesmo patamar do exame em grau de dificuldade. Podemos constatar isso na comparação a seguir:

(LIVRO-PG-243)

Figura 6-Hexágono inscrito na circunferência



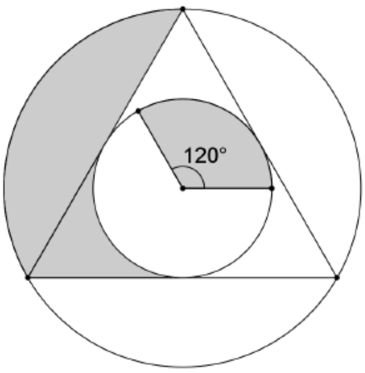
45 Na figura, r é a medida do raio da circunferência, e $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{CD} \cong \overset{\frown}{DE} \cong \overset{\frown}{EF} \cong \overset{\frown}{FA}$.

Calcule a área da região pintada de roxo.

Fonte: Livro Didático

(C.N-2019) Observe a figura a seguir.

Figura 7-Triângulo inscrito na circunferência



Fonte: CN-2019

Essa figura representa um triângulo equilátero, inscrito numa circunferência maior, e circunscrito a uma outra circunferência menor de raio igual a 2 cm, onde destacou-se a região central de 120°. Sendo assim, é correto afirmar que a área total correspondente à parte sombreada mede, em cm^2 ?

Em resumo de tudo que foi analisado, conclui-se que o livro Bianchini, apesar de trazer em sua maioria os conteúdos necessários à preparação para o concurso de seleção do colégio naval, acreditamos que está longe de ser suficiente para que o candidato faça uma boa prova...

CAPÍTULO 3-CONTEÚDOS NÃO ABORDADOS PELOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste capitulo iremos trabalhar alguns assuntos não permeados pelos livros didáticos do ensino fundamental, para que sirva de auxilio aos estudantes que almejam prestar o concurso.

3.1 ARITMÉTICA

3.1.1 Equações Diofantinas Lineares

3.1.1.1 Definição

Uma equação diofantina linear é uma equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$ onde $x_1\ ,x_2, \cdots, x_n$ são as incógnitas e $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ são inteiros dados. O tipo mais simples de equação diofantina é a equação diofantina linear de duas incógnitas $x\ e\ y$ tal que $ax + by = c$ onde a, b e c são inteiros dados, sendo $ab \neq 0$.

Se um par de inteiros x_0,y_0 satisfaz $ax_0 + by_0 = c$ então denomina-se que x_0,y_0 é uma solução inteira ou apenas solução da equação $ax + by = c$.

3.1.1.2 Condição de Existência de Solução

A equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução se e somente se d divide c, sendo $d = mdc(a, b)$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)Suponhamos que $ax + by = c$ tem uma solução, isto é, que existem inteiros x_0,y_0 tais que $ax_0 + by_0 = c$. Por ser o $mdc(a.b) = d$, existem inteiros r e s tais que $a = dr$ e $b = ds$, e temos: $c = ax_0 + by_0 = drx_0 + dsy_0 = d(rx_0 + sy_0)$, e como $rx_0 + sy_0$ é um inteiro,segue-se que d divide c.

($\Leftarrow$) Suponhamos que d divide c, isto é, que $c = dt$, onde t é um inteiro.

Por ser o $mdc(a, b) = d$, existem inteiros x_0 e y_0 tais que $d = ax_0 + by_0$ o que implica: $c = dt = (ax_0 + by_0)t = a(tx_0) + b(ty_0)$, isto é,o par de inteiros: $x = tx_0 = \left(\frac{c}{d}\right)x_0$, $u = ty_0 = \left(\frac{c}{d}\right)y_0$ é uma solução da equação $ax + by = c$.

3.1.1.3 Soluções da equação $\boldsymbol{ax + by = c}$

Seja x_0, y_0 uma solução da equação $ax + by = c$, onde $(a, b) = 1$.Então, as soluções x, y em $\mathbb{Z}$ da equação são $x = x_0 + tb$, $y = y_0 - ta$; $t \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLO 3.1.1 (CN-2018) Seja A o conjunto formado pelos pares (x, y), onde x e y são inteiros positivos tais que $2x + 3y = 2018$. Sendo assim, é correto afirmar que a quantidade de elementos do conjunto A é

Resolução

Como mdc$(2,3) = 1$, logo, possui infinitas soluções inteiras. Por inspeção, observamos que uma solução particular dessa equação é $x = 1000$ e $y = 6$. Assim, a solução geral é $\begin{cases} x = 1000 + 3t \\ y = 6 - 2t \end{cases} com\ t \in \mathbb{Z}$

Para que x e y sejam inteiros e positivos, devemos ter

$x = 1000 + 3t > 0 \Leftrightarrow t > -\frac{1000}{3} \Rightarrow t \geq -333$

$y = 6 - 2t > 0 \Leftrightarrow t < 3 \Longrightarrow t \leq 2$

Portanto, $-333 \leq t \leq 2\ com\ t\ \in \mathbb{Z}$, como para cada valor de t obtém uma solução (x, y), logo o número de solução é dada por: $2 - (-333) + 1 = 336$

EXEMPLO 3.1.2 De que maneiras podemos comprar selos de quinze e de sete reais, de modo a gastar cem reais?

Resolução

Temos:

$\boldsymbol{x}$ → Quantidade de selos de quinze reais a serem comprados.

$\boldsymbol{y}$ →Quantidade de selos de sete reais a serem comprados.

Do enunciado podemos montar a seguinte equação diofantina linear:

$$15x + 7y = 100$$

Como $mdc(7,15) = 1$, logo a equação possui soluções inteiras. Vamos achar uma solução particular da equação usando o algoritmo da divisão.

$$15 = 2 \cdot 7 + 1 \Rightarrow 15 \cdot 1 + 7 \cdot (-2) = 1 \underset{\times 100}{\Longrightarrow} 15 \cdot (100) + 7 \cdot (-200) = 100$$

Assim o par $(100, -200)$ corresponde a uma solução da equação $15x + 7y = 100$. Daí, temos a seguinte solução geral para a equação:

$$\begin{cases} x = 100 + 7t \\ y = -200 - 15t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Como $x \geq 0\ e\ y \geq 0$, temos:

$$100 + 7t \geq 0 \Longrightarrow t \geq -14{,}3$$

$$200 - 15t \geq 0 \Rightarrow t \leq -13{,}3$$

Logo conclui-se: $t = -14$, substituindo no sistema acima, temos:

$$\begin{cases} x = 100 + 7 \cdot (-14) = 2 \\ y = -200 - 15 \cdot (-14) = 10 \end{cases}$$

Portanto a única opção é comprarmos 2 selos de quinze reais e 10 selos de sete reais.

3.1.2 Congruências

Sejam a e b dois inteiros quaisquer e seja m um inteiro positivo fixo. Diz-se que a é congruente a b módulo m se e somente se m divide a diferença $a-b$. Em outros termos, a é congruente a b módulo m se e somente se existe um inteiro k tal que $a-b=km$. Com a notação $a \equiv b(mod\ m)$ indica-se que a é congruente a b módulo m. Portanto, simbolicamente:

$a \equiv b(mod\ m) \Leftrightarrow m|(a-b)$ ou seja: $a \equiv b(mod\ m) \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z}$ tal que $a-b=km$

PROPRIEDADES

Seja m um inteiro positivo fixo $(m>0)$ e sejam $a, b, c\ e\ d$ inteiros quaisquer. São válidas as seguintes propriedades:

$$(1)\quad a \equiv a(mod\ m)$$

$$(2)\quad a \equiv b(mod\ m) \Longrightarrow b \equiv a(mod\ m)$$

$$(3)\quad a \equiv b(mod\ m)\ e\ b \equiv c(mod\ m) \Longrightarrow a \equiv c(mod\ m)$$

$$(4)\quad a \equiv b(mod\ m)\ e\ n|m, com\ n>0, \Longrightarrow a \equiv b(mod\ n)$$

$$(5)\quad a \equiv b(mod\ m)\ e\ c>0, \Longrightarrow ac \equiv bc(mod\ mc)$$

$$(6) a \equiv b(mod\ m)\ e\ a, b, m\ são\ todos\ divisíveis\ pelo\ inteiro\ d>0 \Longrightarrow \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d}\left(mod\ \frac{m}{d}\right)$$

$$(7)\quad a \equiv b(mod\ m)\ e\ c \equiv d(mod\ m) \Longrightarrow a+c \equiv b+d(mod\ m)\ e\ a \cdot c \equiv b \cdot d(mod\ m)$$

$$(8)\quad a \equiv b(mod\ m) \Longrightarrow a+c \equiv b+c(mod\ m)\ e\ a \cdot c \equiv b \cdot c(mod\ m)$$

$$(9)\quad a \equiv b(mod\ m) \Longrightarrow a^n \equiv b^n(mod\ m)\ para\ todo\ inteiro\ positivo\ n$$

EXEMPLO 3.1.3(CN-2004) O resto da divisão de $5^{131} + 7^{131} + 9^{131} + 15^{131}$ por 12 é igual a: a)0 b)2 c)7 d)9 e)11

Resolução:

$$7 \equiv -5(mod\ 12) \Longrightarrow\ 7^{131} \equiv (-5)^{131}(mod\ 12) \Longrightarrow\ 5^{131} + 7^{131} \equiv 0(mod\ 12)(1)$$

$$15 \equiv -9(mod\ 12)\ \Longrightarrow\ 15^{131} \equiv (-9)^{131}(mod\ 12)\ \Longrightarrow 9^{131} + 15^{131} \equiv 0\ (mod\ 12)(2)$$

Somando as congruências (1) e (2): $5^{131} + 7^{131} + 9^{131} + 15^{131} \equiv 0(mod\ 12)$

Resposta:a

EXEMPLO 3.1.4 Qual é o dígito das unidades do número 3^{1998}?

Resolução:

$$3^2 \equiv -1(mod\ 10)\ \Longrightarrow (3^2)^{999} \equiv (-1)^{999}(mod\ 10)\ \Longrightarrow\ 3^{1998} \equiv -1(mod\ 10)$$

$\Longrightarrow 3^{1998} \equiv 9(mod\ 10)$ logo o dígito das unidades de 3^{1998} é 9.

3.1.3 Desigualdade Das Médias

Definição: Sejam $a_1, a_2, \cdots a_n$ números reais positivos. Define-se a média aritmética(MA) e a média geométrica(MG) de $a_1, a_2, \cdots, a_n$ da seguinte forma:

$MA = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ e $MG = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

Teorema: Se $a_1 a_2, \cdots, a_n$ são reais positivos, $n \geq 2$, então $MA \geq MG$, ou seja,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

EXEMPLO 3.1.5 (CN-2011) Sejam p e q números reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{2010}}$. Qual o valor mínimo do produto pq?

a)8040 b)4020 c)2010 d)1005 e)105

Resolução:

Aplicando a desigualdade das médias, temos:

$$\frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q}} \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{2}{\sqrt{pq}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2010}} \geq \frac{2}{\sqrt{pq}} \Leftrightarrow \sqrt{pq} \geq 2\sqrt{2010} \Leftrightarrow \sqrt{pq} \geq 8040$$

Logo, o valor mínimo do produto pq é 8040, que ocorre para $p = q = 2\sqrt{2010}$.

EXEMPLO 3.1.6 Qual o valor mínimo de $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ para todos os valores positivos de x?

Resolução:

Reescrevendo a expressão temos:

$$f(x) = x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x}$$

De imediato aplicamos $MA \geq MG$

$$x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} \Rightarrow x^2 + \frac{16}{x} \geq 3\sqrt[3]{64} \Rightarrow x^2 + \frac{16}{x} \geq 12$$

Assim o valor mínimo assumido pela função é 12.

3.2 ÁLGEBRA

3.2.1 Identidades Fatoradas

Nesta seção, iremos ver algumas identidades que podem ser úteis, ao resolver algumas questões que já foram cobradas no colégio naval.

i)$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(a+c)(b+c)$

ii)$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - ab)$

iii)$a^4 + 4b^4 = [(a-b)^2 + b^2][(a+b)^2 + b^2]$

iv)$(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$

v)$(a+b+c)^3 + 3abc = a^3 + b^3 + c^3 + (a+b+c)(ab+ac+bc)$

EXEMPLO 3.2.1 (C.N-1995)O quociente da divisão de $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ por $(a+b)[c^2 + c(a+b) + ab]$ é:

a)1 b)2 c)3 d)4 e)5

Resolução:

Do enunciado temos:

$$\frac{(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3}{(a+b)[c^2 + c(a+b) + ab]}$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3}{(a+b)[c^2 + ca + cb + ab]}$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3}{(a+b)[c(c+a) + b(c+a)]}$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3}{(a+b)[(c+a)(b+c)]}$$

$$\xRightarrow{por\ (i)} \frac{3(a+b)(a+c)(b+c)}{(a+b)[(c+a)(b+c)]} = 3$$

Resposta: C

EXEMPLO 3.2.2 Calcule

$$\frac{(10^4 + 324)(22^4 + 324)(34^4 + 324)(46^4 + 324)(58^4 + 324)}{(4^4 + 324)(16^4 + 324)(28^4 + 324)(40^4 + 324)(52^4 + 324)}$$

Resolução:

Utilizando (iii) temos: $a^4 + 4b^4 = [(a-b)^2 + b^2][(a+b)^2 + b^2]$

Assim: $n^4 + 324 = n^4 + 4 \cdot 3^4 = [(n-3)^2 + 9][(n+3)^2 + 9]$

Fazendo essa substituição em cada termo da fração

$$\frac{(7^2+9)(13^2+9)(19^2+9)(25^2+9)\cdots(55^2+9)(61^2+9)}{(1^2+9)(7^2+9)(13^2+9)(19^2+9)\cdots(49^2+9)(55^2+9)}$$

$$\frac{61^2+9}{1^2+9}=\frac{3730}{10}=373$$

3.2.2 Radical Duplo

A fórmula de simplificação de radicais duplos é dada por:

$\sqrt{A \mp \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \mp \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, onde $C=\sqrt{A^2-B}$.

Obs: Essa fórmula só tem alguma utilidade quando A^2-B for um quadrado. Dessa forma, é possível extrair a raiz quadrada $\sqrt{A^2-B}$

EXEMPLO 3.2.3(C.N-2005) Um aluno resolvendo uma questão de múltipla escolha chegou ao seguinte resultado $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}$, no entanto as opções estavam em números decimais e pedia-se a mais próxima do valor encontrado para resultado, e, assim sendo, procurou simplificar esse resultado, a fim de melhor estimar a resposta. Percebendo que o radicando da raiz de índice 4 é quarta potência de uma soma de dois radicais simples, concluiu, com maior facilidade, que a opção para a resposta foi

a)3,00 b)3,05 c)3,15 d)3,25 e)3,35

Resolução:

$\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}} = \sqrt{\sqrt{49+20\sqrt{6}}} = \sqrt{\sqrt{49+\sqrt{2400}}}$ Aplicando a fórmula do radical duplo, temos: $C=\sqrt{49^2-2400}=\sqrt{2401-2400}=1$, Assim:

$\sqrt{49+\sqrt{2400}} = \sqrt{\frac{49+1}{2}} + \sqrt{\frac{49-1}{2}} = 5+\sqrt{24}$ ficando assim o radicando:

$\sqrt{5+\sqrt{24}}$ Aplicando mais uma vez: $C=\sqrt{5^2-24}=1$

$$\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2} \cong 1{,}73+1{,}41=3{,}14$$

Resposta: c

EXEMPLO 3.2.4 Simplificar a expressão $\sqrt{4-\sqrt{7}}$

Resolução:

Aplicando a fórmula do radical duplo, temos: $C = \sqrt{4^2 - 7} = 3$, logo:

$$\sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{4+3}{2}} - \sqrt{\frac{4-3}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{7\times 2}{2\times 2}} - \sqrt{\frac{1\times 2}{2\times 2}} = \frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3.2.3 Inequação Irracional

Inequação Irracional $\sqrt{\boldsymbol{f(x)}} < g(x)$

Devemos ter esquematicamente : $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow 0 \le f(x) < [g(x)]^2 e\ g(x) > 0$

Analogamente para inequação $\sqrt{f(x)} \le g(x)$

$$\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le [g(x)]^2\ e\ g(x) \ge 0$$

EXEMPLO 3.2.5(CN-2002) Se x é um número inteiro tal que $\sqrt{2x^2+3x-5} \le x+1$, o número de elementos do conjunto solução dessa inequação é igual a:

a)0 b)1 c)2 d)3 e)4

Resolução:

Aplicando a teoria acima, temos: $0 \le 2x^2+3x-5 \le (x+1)^2\ \ e\ x+1 \ge 0$, daí fica:

$$\begin{cases} 2x^2+3x-5 \ge 0 \\ 2x^2+3x-5 \le (x+1)^2 \\ x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\frac{5}{2}\ ou\ x\ \ge 1\ (I) \\ -3 \le x \le 2 \quad (II) \\ x \ge -1 \quad (III) \end{cases}$$

Logo a interseção é $\boldsymbol{I \cap II \cap III = 1 \le x \le 2}$

Como x é inteiro temos: $S = (1,2)$, ou seja, o conjunto solução têm dois elementos.

Resposta:C

Inequação Irracional $\sqrt{\boldsymbol{f(x)}} > g(x)$

Devemos ter esquematicamente : $\sqrt{f(x)} > g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \; e \; g(x) < 0 \\ ou \\ f(x) > [g(x)]^2 \; e \; g(x) \geq 0 \end{cases}$

Analogamente para inequação $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \; e \; g(x) < 0 \\ ou \\ f(x) \geq [g(x)]^2 \; e \; g(x) \geq 0 \end{cases}$$

EXEMPLO 3.2.6 Resolva, em $\mathbb{R}$ a inequação: $\sqrt{2x-1} > x-2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \; e \; x-2 < 0 \quad (I) \\ ou \\ 2x-1 > (x-2)^2 \;\; e \; x-2 \geq 0 \;\; (II) \end{cases}$$

Resolvendo (I), temos:

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ e \\ x-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \;\; (III) \\ e \\ x < 2 \;\; (IV) \end{cases}$$

$$(III) \cap (IV) = S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \frac{1}{2} \leq x < 2 \right\}$$

Resolvendo (II), temos:

$$\begin{cases} 2x-1 < (x-2)^2 \\ e \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < x < 5 \; (v) \\ e \\ x \geq 2 \;\; (vi) \end{cases}$$

$$(v) \cap (vi) = s_2 = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x < 5\}$$

A solução da inequação proposta é dada por:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \frac{1}{2} \leq x < 5 \right\}$$

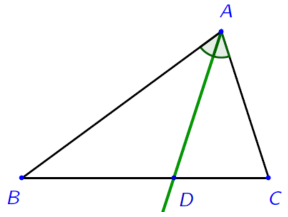
3.3 GEOMETRIA

3.3.1 Teorema das Bissetrizes

Teorema da bissetriz interna: Em um triângulo, a bissetriz de um ângulo interno divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.

Na figura a seguir, AD é bissetriz do ângulo interno A. O teorema diz que $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Figura 8-Bissetriz de um triângulo



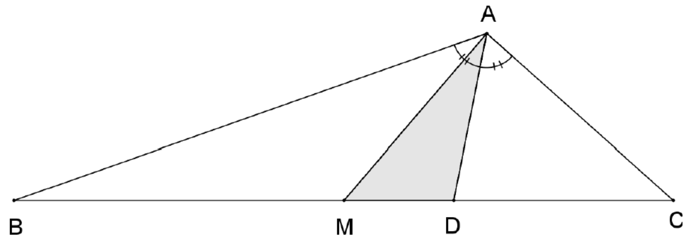
Fonte: Caminha,2013

EXEMPLO 3.3.1(C.N-1985) Num triângulo ABC, a medida do lado $\overline{AB}$ é o dobro da medida do lado $\overline{AC}$. Traça-se a mediana $\overline{AM}$ e a bissetriz $\overline{AD}\left(M \text{ e } D \text{ pertencentes a } \overline{BC}\right)$. Se a área do triângulo ABC é S, então a área do triângulo AMD é:

(A)$\frac{S}{3}$ (B)$\frac{S}{4}$ (C)$\frac{S}{6}$ (D)$\frac{3S}{8}$ (E)$\frac{S}{12}$

Resolução

Figura 9-Mediana e Bissetriz de um triângulo



Fonte: O autor

Como os triângulos AMD e ABC têm vértice comum e base sobre a mesma reta suporte, então $\frac{S_{AMD}}{S_{ABC}} = \frac{MD}{BC}$.

Pelo teorema das bissetrizes internas, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \xRightarrow{AB=2AC} \frac{BD}{DC} = \frac{2}{1} \Rightarrow BD = 2DC$

O ponto M é ponto médio de BC, então $BC = BD + DC = 3D$, daí $BM = \frac{3DC}{2}$

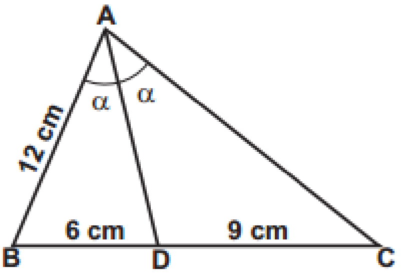
Assim, temos $MD = BD - BM = 2DC - \frac{3DC}{2} = \frac{DC}{2}$

Portanto, a área do ΔAMD é dada por $\frac{S_{AMD}}{S_{ABC}} = \frac{MD}{BC} \Leftrightarrow \frac{S_{AMD}}{S} = \frac{\frac{DC}{2}}{3DC} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow S_{AMD} = \frac{S}{6}$

Resposta: C

Exemplo 3.3.2 No triângulo ABC abaixo, sendo AD a bissetriz do ângulo interno do vértice A, determine a medida do segmento AC.

Figura 10-Bissetriz de um triângulo



Fonte: O autor

Resolução:

Aplicando o Teorema das Bissetrizes Internas, temos:

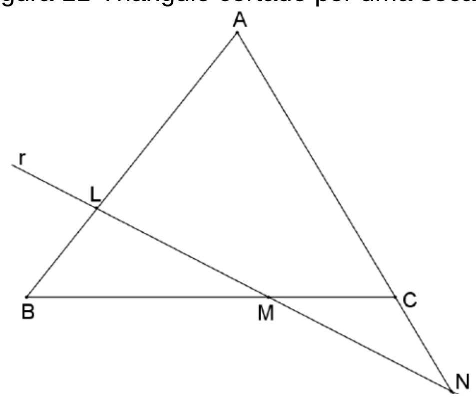
$$\frac{12}{AC} = \frac{6}{9} \Leftrightarrow 6AC = 12 \cdot 9$$

$$AC = 18cm$$

3.3.2 Teorema De Menelaus

Se uma reta determina sobre os lados de um triângulo ABC os pontos L, M e N, conforme a figura abaixo, então $\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$.

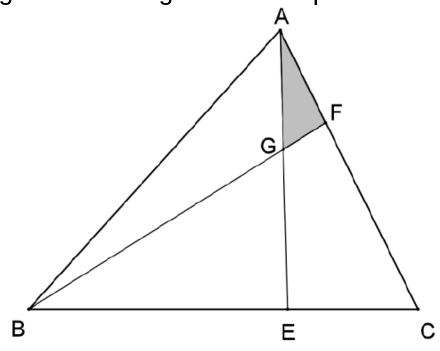
Figura 11-Triângulo cortado por uma secante



Fonte: O autor

EXEMPLO 3.3.3(CN- 1983) Na figura: $\overline{AC} = 3\overline{AF}$ e $\overline{BC} = 3\overline{CE}$, sendo S a área do triângulo ABC , a área do triângulo AGF é:

Figura 12-Triângulo cortado por uma secante



Fonte: CN-1983

(A)$\frac{S}{3}$ (B)$\frac{S}{7}$ (C)$\frac{S}{9}$ (D)$\frac{S}{21}$ (E)$\frac{S}{18}$

Resolução:

Aplicando o teorema de Menelaus no ΔACE, com a secante BGF, temos:

$\frac{AF}{CF} \cdot \frac{EG}{AG} \cdot \frac{CB}{EB} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{EG}{AG} \cdot \frac{3}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{EG}{AG} = \frac{4}{3}$

Usando o fato de que triângulos de mesmo vértice e que tem bases sobre a mesma base possuem áreas proporcionais às suas bases.

$$\frac{S_{AEC}}{S_{ABC}} = \frac{EC}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{AEC} = \frac{S}{3}$$

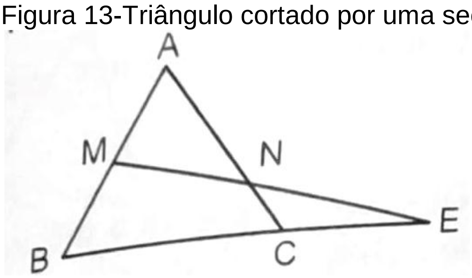
$$\frac{S_{AEF}}{S_{AEC}} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{3} \cdot S_{AEC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{3} = \frac{S}{9}$$

$$\frac{S_{AFG}}{S_{AEF}} = \frac{AG}{AE} = \frac{3}{7} \Rightarrow S_{AFG} = \frac{3}{7} \cdot S_{AEF} = \frac{3}{7} \cdot \frac{S}{9} = \frac{S}{21}$$

Resposta: D

EXEMPLO 3.3.4 Na figura abaixo o perímetro do triângulo equilátero ABC é 72 cm, M é o ponto médio de AB e $\overline{CE} = 16cm$. Então, a medida do segmento CN, em cm é ?

Figura 13-Triângulo cortado por uma secante



Fonte: Rufino, 2010.

Resolução:

Como o perímetro de ΔABC é 72 cm então seu lado mede 18 cm. Aplicando o teorema de Menelaus tomando como referência o triângulo ΔABC e a transversal ME, temos:

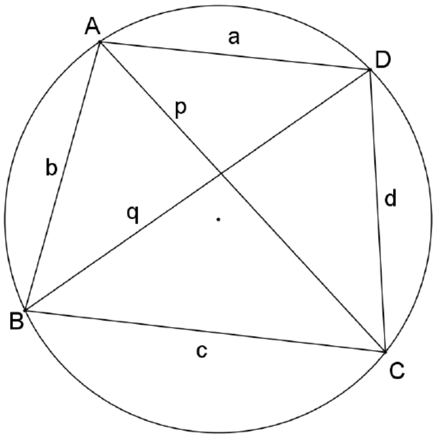
$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{CN}{AN} \cdot \frac{BE}{CE} = 1 \Rightarrow 1 \cdot \frac{CN}{18 - CN} \cdot \frac{16 + 18}{16} = 1 \Rightarrow 34CN = 16(18 - CN)$$

$$21CN = 144 \Rightarrow CN = \frac{48}{7} cm$$

3.3.3 Teorema De Ptolomeu

Em um quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.

Figura 14-Quadrilátero cortado por duas diagonais



Fonte: Rufino, 2010.

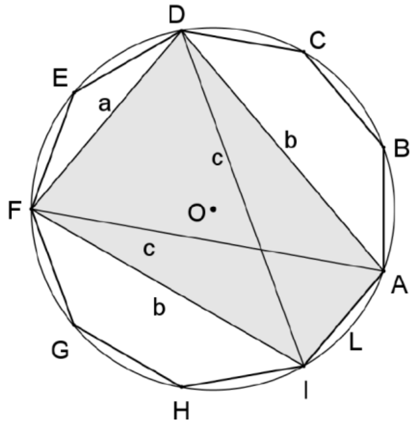
$$ac + bd = pq$$

EXEMPLO 3.3.5 (CN-1988) Uma expressão que dá o lado do eneágono regular, em função das diagonais a, b e c, com $a < b < c$, é:

a)$\frac{C^2+b^2}{a}$ b)$\frac{bc}{a}$ c)$\frac{c^2-b^2}{a}$ d)$\frac{(c+b)^2}{a}$ e)$\frac{(c-b)^2}{a}$

Resolução:

Figura 15-Eneágono inscrito na circunferência



Fonte: O autor

Aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero inscritível ADFI,temos:

$$\mathrm{a} \cdot \mathrm{L} + \mathrm{b} \cdot \mathrm{b} = \mathrm{c} \cdot \mathrm{c} \iff \mathrm{L} = \frac{\mathrm{c}^2 - \mathrm{b}^2}{\mathrm{a}}$$

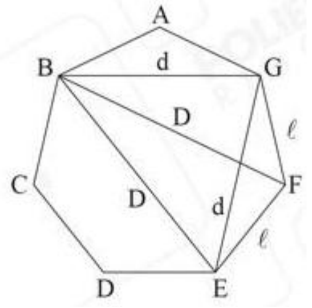
Resposta:c

EXEMPLO 3.3.6 (IME-2018) Seja um heptágono regular de lado l cuja menor diagonal vale d. O valor da maior diagonal satisfaz a qual das expressões?

a)$\frac{l \cdot d}{d-l}$ b)$\frac{d^2}{d-l}$ c)$\frac{l \cdot d}{d+l}$ d)$\frac{l^2}{d+l}$ e)$\frac{3 \cdot d}{2}$

Resolução:

Figura 16-Heptágono



Fonte: O Autor

O quadrilátero BGFE é inscritível. Aplicando o teorema de Ptolomeu:

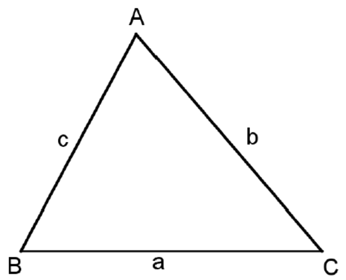
$$D \cdot d = Dl + dl \ \Rightarrow D(d - l) = dl \ \Rightarrow D = \frac{d \cdot l}{d - l}$$

Resposta:a

3.3.4 Fórmula de Heron

A área de um triângulo é igual à raiz quadrada do produto do semiperímetro pela diferença entre o semiperímetro e cada um dos lados do triângulo.

Figura 17-Triângulo



Fonte: O autor

O Semiperímetro é dado por $p = \frac{a+b+c}{2}$, então a área do triângulo é:

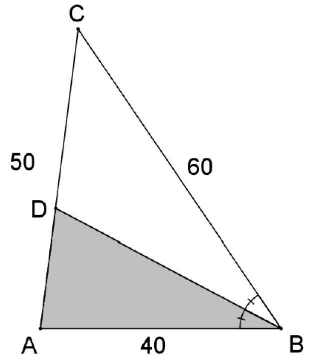
$$S_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

EXEMPLO 3.3.7 (CN-1989) Os lados de um triângulo medem $\overline{AB} = 40$, $\overline{AC} = 50$ e $\overline{BC} = 60$. Sendo D a interseção da bissetriz interna do ângulo B com o lado $\overline{AC}$, a área do triângulo ABD é:

a)$225\sqrt{7}$ b)$\frac{375}{2}\sqrt{7}$ c)$150\sqrt{7}$ d)$125\sqrt{7}$ e)$75\sqrt{7}$

Resolução:

Figura 18-Bissetriz de um Triângulo



Fonte: O autor

Aplicando a Fórmula de Heron para calcular a área do ΔABC

$$S(ABC) = \sqrt{75(75-60)(75-50)(75-40)} = 375\sqrt{7}$$

Pelo teorema das Bissetrizes: $\frac{CD}{60} = \frac{DA}{40} = \frac{CD+DA}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow CD = 30 \; e \; DA = 20$

$$\frac{S_{(ABD)}}{S_{(ABC)}} = \frac{AD}{AC} = \frac{20}{50} \Leftrightarrow S_{(ABD)} = \frac{2}{5} \cdot 375\sqrt{7} = 150\sqrt{7}$$

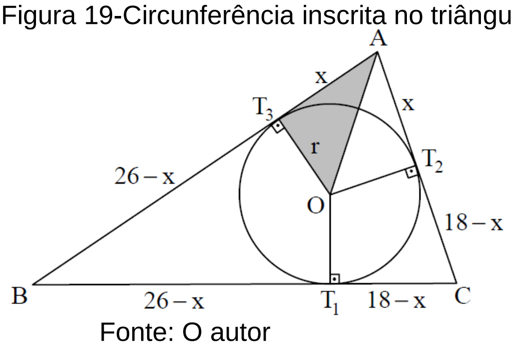
Resposta:c

EXEMPLO 3.3.8 (IME-2010) Sejam ABC um triângulo de lados AB, BC e AC iguais a 26, 28 e 18, respectivamente. Considere o círculo de centro O inscrito nesse triângulo. A distância AO Vale:

a)$\frac{\sqrt{104}}{6}$ b)$\frac{\sqrt{104}}{3}$ c)$\frac{2\sqrt{104}}{3}$ d)$\sqrt{104}$ e)$3\sqrt{104}$

Resposta:

Figura 19-Circunferência inscrita no triângulo



Fonte: O autor

Temos pela figura e como $BC = 28$

$26 - x + 18 - x = 28 \;\; \Leftrightarrow 44 - 2x = 28 \;\; \Leftrightarrow x = 8$

Calculando a área de duas formas do ΔABC, temos:

$$S_{ABC} = \sqrt{36(36-26)(36-28)(36-18)} = 72\sqrt{10}$$

Agora usando a fórmula $S_{ABC} = pr \;\Rightarrow\; S_{ABC} = 36r$

Logo, temos: $36r = 72\sqrt{10} \quad \Leftrightarrow r = 2\sqrt{10}$

Aplicando Pitágoras em ΔAOT_3 $(AO)^2 = x^2 + r^2 \Leftrightarrow (AO)^2 = 64 + 40 = 104$

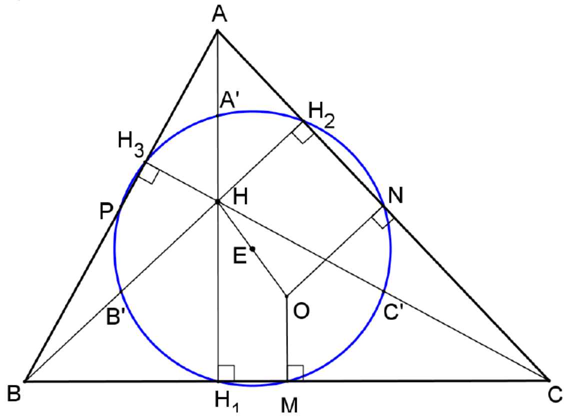
$$\Leftrightarrow AO = \sqrt{104}$$

Resposta: d

3.3.5 Circulo dos Nove Pontos

O círculo dos nove pontos de um triângulo tem raio igual à metade do raio do círculo circunscrito; tem centro no ponto médio do segmento que une o ortocentro ao circuncentro; contém os três pontos médios dos lados; contém os três pés das alturas; e contém os três pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices.

Figura 20-Circulo dos Nove Pontos



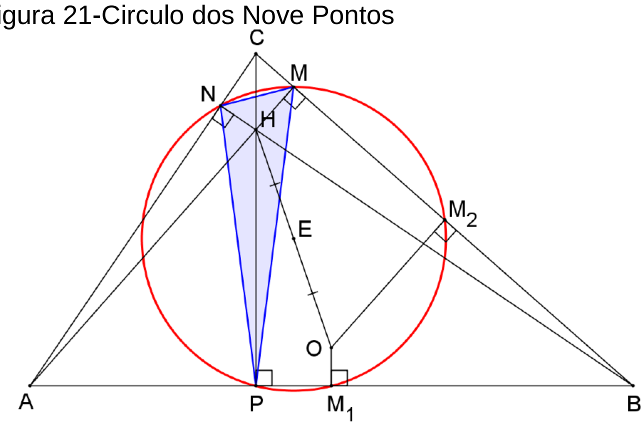
Fonte: http://madematica.blogspot.com/2015/04/

EXEMPLO 3.3.9 Seja ABC um triângulo de lados medindo 8, 10 e 12. Sejam M, N e P os pés das alturas traçadas dos vértices sobre os lados desse triângulo. Sendo assim, o raio do círculo circunscrito ao triângulo MNP é

a)$\frac{5\sqrt{7}}{7}$ b)$\frac{6\sqrt{7}}{7}$ c)$\frac{8\sqrt{7}}{7}$ d)$\frac{9\sqrt{7}}{7}$ e)$\frac{10\sqrt{7}}{7}$

Resolução:

Figura 21-Circulo dos Nove Pontos



Fonte: O autor

O círculo circunscrito ao triângulo MNP (triângulo órtico) é o círculo de nove pontos, cujo raio é igual a $\frac{R}{2}$, onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

Para calcular R, vamos calcular a área do triângulo ABC de duas formas distintas.

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{a.b.c}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Onde $a = 8, b = 10, c = 12$ e $p = \frac{8+10+12}{2} = 15$. Assim, temos:

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{8.10.12}{4\sqrt{15\cdot 7\cdot 5\cdot 3}} = \frac{16\sqrt{7}}{7}$$

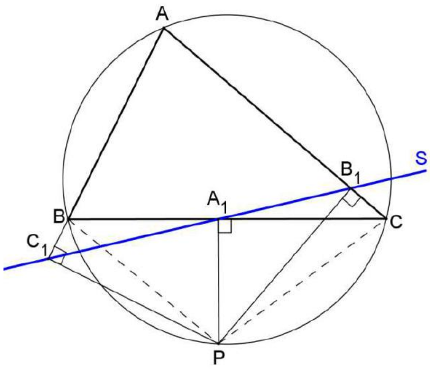
Portanto, o raio do círculo circunscrito ao triângulo MNP é $\frac{R}{2} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$

Resposta: c

3.3.6 Reta de Simson

Os pés das três perpendiculares traçadas de um ponto do círculo circunscrito a um triângulo aos lados do triângulo são colineares, sendo a reta que contém esses três pontos chamada reta de Simson do ponto P.

Figura 22-Reta de Simson



Fonte: SBM

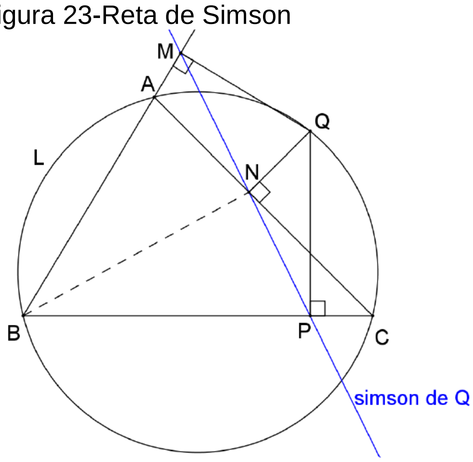
EXEMPLO 3.3.10(CN-2014) Seja ABC um triângulo acutângulo e "L" a circunferência circunscrita ao triângulo. De um ponto Q (diferente de A e de C) sobre o menor arco AC de "L" são traçadas perpendiculares às retas suportes dos lados do triângulo. Considere M, N e P os pés das perpendiculares sobre os lados AB, AC e BC, respectivamente. Tomando $MN = 12$ e $PN = 16$, qual é a razão entre as áreas dos triângulos BMN e BNP?

a)$\frac{3}{4}$ b)$\frac{9}{16}$ c)$\frac{8}{9}$ d)$\frac{25}{36}$ e)$\frac{36}{49}$

Resolução:

Observemos que os pontos M, N, e P são colineares(esses pontos estão sobre a reta simson do ponto Q em relação aoΔABC).

Figura 23-Reta de Simson



Fonte: SBM modificada

Como os pontos M, N e P são colineares, então os triângulos BMN e BNP têm bases sobre a mesma reta suporte(a simson de Q) o que implica que os triângulos possuem altura comum no vértice B. Então para triângulos que possuem altura comum, a razão entre suas áreas é igual à razão entre $\frac{S_{BMN}}{S_{BNP}} = \frac{MN}{PN} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

CAPÍTULO 4-DISCUSSÃO DE QUESTÕES RESOLVIDAS DE PROVAS ANTERIORES E APLICAÇÃO DE UMA ATIVIDADE EM SALA DE AULA

Neste capítulo resolveremos questões de provas de seleções anteriores com o objetivo de trabalhar os conteúdos do ensino fundamental mostrando em cada solução como eles se relacionam entre si. Serão resolvidas questões de 5 anos de provas, sendo 3 dos últimos anos e 2 à partir de 2000, mostrando que com o passar dos anos, a prova sofreu pouca mudança, houve o acréscimo de três conteúdos, a saber: Desigualdade das Médias, Equações Diofantinas Lineares e Congruências. Esses tópicos não aparecem explícitos nos conteúdos, mas, na visão do autor, é necessário o conhecimento de tal ferramenta para resolver os problemas dentro de um tempo hábil. As questões foram distribuídas da seguinte forma, por ano de acesso:

- Duas questões de Aritmética;
- Duas questões de Álgebra;
- Duas questões de Geometria.

Foi aplicada uma atividade numa turma de 9ºano com o objetivo de diagnóstico e análise de desempenho, como forma de mostrar, como esse instrumento resolução de problema, pode ser trabalhado para detectar deficiências e observar em que nível de domínio do conteúdo está o aluno, e assim poder planejar quais serão as melhores abordagens pedagógicas a se adotar.

4.1 QUESTÕES DA PROVA DE ACESSO 2018

4.1.1 Aritmética

1) Considere a expressão $(2018^{2018})^{2018}$, que é potência de uma potência. É correto afirmar que o último algarismo do resultado dessa expressão é:

a)0 b)2 c)4 d)6 e)8

Resolução

Para encontrar o último algarismo analisamos esse número módulo 10.

$$2018^{2018} \equiv 8^{2018} \equiv (2^3)^{2018} \equiv 2^{6054} (mod 10)$$

Estudando as Potências de 2 módulo 10.

$$2^1 \equiv 2(mod 10)$$
$$2^2 \equiv 4(mod 10)$$
$$2^3 \equiv 8(mod 10)$$
$$2^4 \equiv 6(mod 10)$$
$$2^5 \equiv 2(mod 10)$$

Daí, como $6054 = 4 \cdot 1513 + 2$, então $2018^{2018} \equiv 2^{6054} \equiv 2^2 \equiv 4(mod 10)$

Analisando o número $(2018^{2018})^{2018}$módulo 10.

$$(2018^{2018})^{2018} \equiv (4)^{2018} \equiv (2^2)^{2018} \equiv 2^{4036} (mod 10).$$

Como $4036 = 4 \cdot 1009$, então $(2018^{2018})^{2018} \equiv 2^{4036} \equiv 2^4 \equiv 6(mod10)$

Portanto, o último algarismo de $(2018^{2018})^{2018}$ é 6.

Alternativa: d

Comentário: *Foram utilizados algumas propriedades da congruência e trabalhou com o período, observando de quanto em quanto ela se repetia, em cima desse período e isso é que simplificou a questão, podendo obter a resposta.*

2) Considere os dois números naturais ‘a’ e ‘b’, ambos formados por dois algarismos. Sabe-se que $a.b = 2160$ e que o máximo divisor comum de ‘a’ e ‘b’ é 12. Sendo assim, é correto afirmar que, ao se dividir a diferença positiva entre ‘a’ e ‘b’ por 11, encontra-se resto igual a:

a)9 b)6 c)5 d)2 e)1

Resolução:

Do enunciado, temos:

$$\begin{cases} a \cdot b = 2160 \\ mdc(a,b) = 12 \end{cases}$$

Como $mdc(a,b) = 12$, então podemos escrever $a = 12m$ e $b = 12n$, onde $m, n \in \mathbb{N}$, substituindo em a e b, temos:

$$12m \cdot 12n = 2160$$

$$m \cdot n = \frac{2160}{144} = 15$$

Repare que {m, n} = {1, 15} ou {m, n} = {3, 5}, pois o produto m.n resulta em 15. Além disso, se m ou n for 15, então a ou b será $12 \times 15 = 180$, tendo três algarismos irá contrariar o enunciado. Assim, o par de valores que atende ao enunciado é {m, n} = {3, 5}.

Assim, $a = 12m = 12 \cdot 5 = 60$ e $b = 12n = 12 \cdot 3 = 36$

A diferença entre a e b é $a - b = 60 - 36 = 24$, cujo resto na divisão por 11 é 2.

Resposta: d

Comentário: *<u>A questão utiliza a noção de mdc para reduzir o resultado do produto, ficando com apenas duas possibilidades para os fatores, daí pelo enunciado, conclui qual a opção correta.</u>*

4.1.2 Álgebra

3) O maior valor inteiro de k para que $x^2 + 2018x + 2018k = 0$ tenha soluções reais é:

a)2018 b)1010 c)1009 d)505 e)504

Resolução:

Para ter soluções reais devemos ter $\Delta \geq 0$, logo:

$$\Delta = 2018^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2018k$$

$daí$

$$2018^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2018k \geq 0$$

$$k \leq 504{,}5$$

Logo o maior valor de K é 504

Alternativa: e

Comentário: *<u>Foram utilizados os conceitos de equação do 2ºgrau e inequação do 1º grau.</u>*

4) Um fazendeiro possui ‘x’ galinhas e ração estocada suficiente para ‘n’ dias. Sabe-se que cada galinha consome a mesma quantidade de ração diariamente. No final de ‘t’ dias $(1 < t < n)$, o fazendeiro adquire outras ‘k’ galinhas, sendo que cada nova galinha consome o triplo da ração diária que uma das ‘x’ galinhas anteriores consome. Supondo que não houve renovação no estoque de ração e que nenhuma ração foi usada para outro propósito, além de alimentar todas as galinhas conforme suas necessidades diárias, marque a opção cuja sentença permite obter a quantidade de dias ‘y’ que faltam para acabar o estoque atual de ração deste fazendeiro.

a)$(3k + x)y = x \cdot (n - t)$ d)$(2k + x)y = x \cdot (3n - t)$
b)$(3k + x)y = x \cdot (2n - t)$ e)$(3k + 3x)y = x \cdot (2n - t)$
c)$(2k + 3x)y = x \cdot (3n - t)$

Resolução

Seja r a quantidade de ração que cada x galinhas iniciais consomem por dia, então o estoque inicial de ração é $r \cdot x \cdot n$.

A quantidade de ração consumida pelas x galinhas em t dias é $r \cdot x \cdot t$ o que implica que a quantidade de ração restante é $r \cdot x \cdot (n - t)$.

Com a aquisição de mais k galinhas que consomem 3r de ração por dia cada uma, o consumo diário passa a ser $r \cdot x + 3r \cdot k = r \cdot (x + 3k)$.

Dessa forma, o número y de dias que faltam para acabar o estoque de ração é o quociente entre a quantidade de ração restante $r \cdot x \cdot (n - t)$ e o novo consumo diário $r \cdot (x + 3k)$. Assim, temos: $y = \frac{r \cdot x \cdot (n-t)}{r \cdot (x+3k)} \Leftrightarrow (3k + x) \cdot y = x \cdot (n - t).$

Alternativa: a

Solução 2:

Repare que x galinhas consome um estoque 'E' de ração por n dias.

Veja que após 't' dias, onde 1 < t < n, x galinhas consumiram uma fração do estoque, ou seja, $\frac{t}{n} \cdot E$, sobrando de estoque o correspondente a $E - \frac{t}{n} \cdot E$.

Além disso, o fazendeiro adquire mais 'k' galinhas, onde cada uma dessas consomem o triplo da qualquer uma das 'x' galinhas. Podemos concluir então que esse acréscimo equivale a 3.k galinhas das anteriores, totalizando (x + 3k) galinhas.

Agora, podemos questionar qual o tempo restante 'y' em que (x + 3k) galinhas esgotam o estoque $E - \frac{t}{n} \cdot E$. Com isso, podemos montar a seguinte regra de três composta:

Figura 24-Regra de Três

Fonte: O Autor

Onde as grandezas:

- Galinhas ×Dias são Inversamente Proporcional;
- Estoque × Dias São Diretamente Proporcional.

Aplicando o conceito de regra de três composta, temos:

$$\frac{t}{y} = \frac{(x+3k)}{x} \cdot \frac{\frac{t}{n} \cdot E}{\left(E - \frac{t}{n} E\right)} \Leftrightarrow \frac{t}{y} = \frac{(x+3k)}{x} \cdot \frac{\frac{t}{n} \cdot E}{\left(\frac{n-t}{n}\right) \cdot E}$$

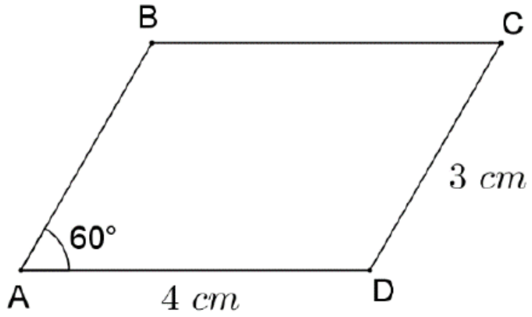
$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{(x+3k)}{x} \cdot \frac{1}{n-t} \Leftrightarrow (3k + x) \cdot y = (n - t) \cdot x$$

Comentário: *<u>Na primeira solução foi usado basicamente equação do 1ºgrau, montada á partir do enunciado, onde a razão entre elas fornecia a resposta do problema, e na segunda, foi aplicado os conceitos de regra de três, que apesar de ser um processo mais mecânico, exigia uma certa perícia algébrica nessa questão.</u>*

4.1.3 Geometria

5) Analise a figura a seguir

Figura 25-Paralelograma



Fonte: CN- 2018

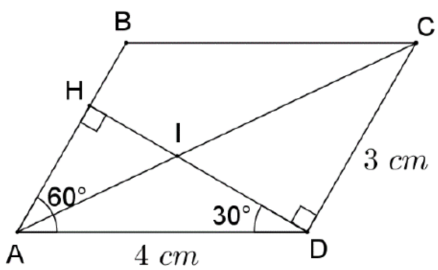
Essa figura representa o paralelogramo $ABCD$, cujas medidas dos lados são $AB = CD = 3cm$, $BC = AD = 4cm$ e $\hat{A} = 60°$. Do vértice D

Traça-se a altura DH, relativa ao lado AB, que encontra a diagonal AC no ponto I. Determine, em cm, a medida DI e marque a opção correta.

a)$\frac{6\sqrt{3}}{5}$ b)$\frac{7}{3}$ c)$\frac{5\sqrt{3}}{3}$ d)$\frac{9}{5}$ e)$\frac{2\sqrt{5}}{3}$

Resolução:

Figura 26-Paralelograma



Fonte: O Autor

No triângulo retângulo ADH, temos:

$$sen30° = \frac{AH}{AD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{4} \Rightarrow AH = 2$$

$$COS30° = \frac{DH}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{DH}{4} \Rightarrow DH = 2\sqrt{3}$$

Os triângulos AIH e CID são semelhantes, pois possuem lados paralelos. Logo:

$$\frac{AH}{DC} = \frac{HI}{DI} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{HI}{DI} \Rightarrow HI = \frac{2DI}{3}$$

Como $DH = HI + ID$, temos o sistema:

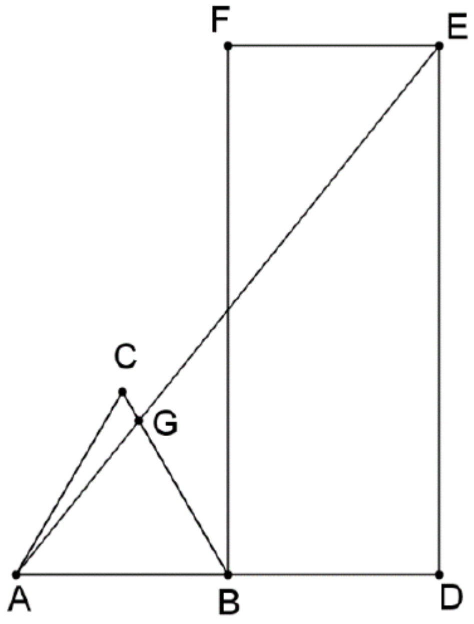
$$\begin{cases} HI + ID = 2\sqrt{3} \\ HI = \dfrac{2DI}{3} \end{cases} \Rightarrow DI = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

Alternativa: a

Comentário*: Para encontrar a solução, utilizou-se trigonometria no triângulo retângulo, após semelhança de triângulo e por último, sistema de equação do 1ºgrau.*

6) Observe a figura a seguir.

Figura 27-Triângulo e Retângulo



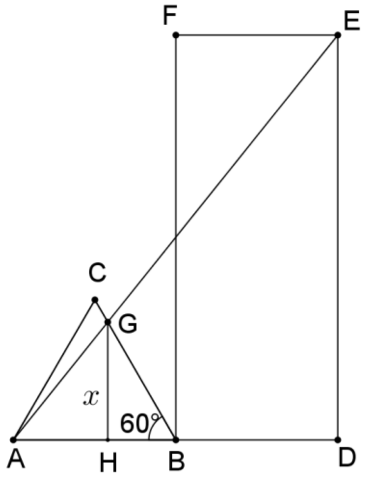
Fonte: CN-2018

O triângulo ABC acima é equilátero de lado igual a 2 cm. BDEF é um retângulo de medidas 2 cm× 5 cm. Além disso, A, B e D estão alinhados. Sendo assim, é correto afirmar que a medida do segmento GB, em centímetros, é:

a) $\frac{20}{5+4\sqrt{3}}$ b) $\frac{11}{4+2\sqrt{3}}$ c) $\frac{8}{3+\sqrt{3}}$ a) $\frac{15}{5+2\sqrt{3}}$ a) $\frac{13}{4+5\sqrt{3}}$

Resolução:

Figura 28-Triângulo e Retângulo



Fonte: O Autor

Como $GH \perp AB$ e $GH = x$

$$\frac{GH}{BH} = tg60º \Leftrightarrow \frac{x}{BH} = \sqrt{3} \Leftrightarrow BH = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{GH}{GB} = sen60º \Leftrightarrow \frac{x}{GB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow GB = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

Isso implica $AH = AB - BH = 2 - \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-x}{3}$

Como $AHG \sim ADE$, temos que: $\frac{AH}{AD} = \frac{GH}{ED} \Leftrightarrow \frac{\frac{2\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}}}{4} = \frac{x}{5}$

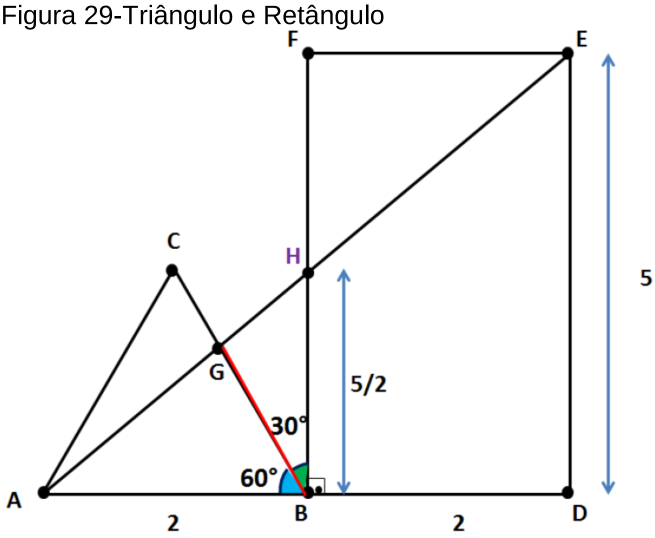
$$\Leftrightarrow 10\sqrt{3} - 5x = 4\sqrt{3}x$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{10\sqrt{3}}{5 + 4\sqrt{3}}$$

Portanto, $GB = \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{5+4\sqrt{3}} = \frac{20}{5+4\sqrt{3}}$

Solução2:

Figura 29-Triângulo e Retângulo



Fonte: O Autor

Temos o seguinte:

- O ângulo $G\hat{B}H$ equivale a $180º - G\hat{B}A - H\hat{B}D = 180º - 60º - 90º = 30º$
- O ponto B é ponto médio AD assim como H é o ponto médio de AE e BF.

Logo:$HB = \frac{FB}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{5}{2}$

Como: $S_{\Delta ABH} = S_{\Delta ABG} + S_{\Delta BGH}$,ou seja, a área do triângulo ABH é igual a soma das áreas dos triângulos ABG e BGH. Daí temos:

$$S_{\Delta ABH} = \frac{GB \cdot AB \cdot sen60°}{2} + \frac{GB \cdot BH \cdot sen30°}{2}$$

$$\Leftrightarrow S_{\Delta ABH} = \frac{GH \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} + \frac{GB \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow S_{\Delta ABH} = GB \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow S_{\Delta ABH} = GB \cdot \left(\frac{4\sqrt{3} + 5}{8}\right)$$

Temos que: $S_{\Delta ABH} = \frac{2 \cdot \frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{2}$. Igualando as expressões:

$$\frac{5}{2} = GB \cdot \left(\frac{4\sqrt{3} + 5}{8}\right)$$

Logo: $GB = \frac{20}{5+4\sqrt{3}}$

Resposta: A

Comentário: _Na primeira solução foi utilizado trigonometria no triângulo retângulo e semelhança de triângulo, já na segunda, foi utilizado o teorema das_ *áreas, onde as duas soluções apresentam mesmo grau de dificuldade, sendo importante o estudante perceber as duas formas de resolver.*

4.2 QUESTÕES DA PROVA DE ACESSO 2017

4.2.1 Aritmética

1) Sejam os conjuntos $A = \{9,27,45,\cdots,423,441\}$, $B = \{18,36,54,\cdots,432,450\}$, $C = \{3,9,15,\cdots 141,147\}$ e $D = \{6,12,18,\cdots,144,150\}$. Define-se P_K como sendo o produto de todos os elementos do conjunto K. Nas condições apresentadas, é correto afirmar que a expressão $\frac{P_A \cdot P_B}{P_C \cdot P_D} \cdot 243^{-10}$ é igual a

a)1000 b)500 c)100 d)10 e)1

Resolução:

$$\mathrm{P_A} = 9 \cdot 27 \cdot 45 \cdot \cdots \cdot 423 \cdot 441 = (9 \cdot 1) \cdot (9 \cdot 3) \cdot (9 \cdot 5) \cdot \cdots \cdot (9.47) \cdot (9 \cdot 49)$$

$$\mathrm{P_B} = 18 \cdot 36 \cdot 54 \cdot \cdots \cdot 432 \cdot 450 = (9 \cdot 2) \cdot (9 \cdot 4) \cdot (9 \cdot 6) \cdot \cdots \cdot (9 \cdot 48) \cdot (9 \cdot 50)$$

$$\Rightarrow \mathrm{P_A} \cdot \mathrm{P_B} = (9 \cdot 1) \cdot (9 \cdot 2) \cdot (9 \cdot 3) \cdot (9 \cdot 4) \cdot \cdots \cdot (9 \cdot 49) \cdot (9 \cdot 50) = 9^{50} \cdot 50!$$

$$\mathrm{P_C} = 3 \cdot 9 \cdot 15 \cdot \cdots \cdot 141 \cdot 147 = (3 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 5) \cdot \cdots \cdot (3 \cdot 47) \cdot (3 \cdot 49)$$

$$\mathrm{P_D} = 6 \cdot 12 \cdot 18 \cdot \cdots \cdot 144 \cdot 150 = (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 6) \cdot \cdots \cdot (3 \cdot 48) \cdot (3 \cdot 50)$$

$$\Rightarrow \mathrm{P_C} \cdot \mathrm{P_D} = (3 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 4) \cdot \cdots \cdot (3 \cdot 49) \cdot (3 \cdot 50) = 3^{50} \cdot 50!$$

$$\frac{P_A \cdot P_B}{P_C \cdot P_D} \cdot 243^{-10} = \frac{9^{50} \cdot 50!}{3^{50} \cdot 50!} \cdot (3^5)^{-10} = 3^{50} \cdot 3^{-50} = 1$$

Comentário: *A questão aparenta ser bem complexa mas com uma observação mais apurada, vê-se que um produto complementa o outro, formando um produto de números consecutivos, o que torna a simplificação bem pratica e fácil.*

Resposta: e

2) O número h tem 241 algarismos e $h = (z \cdot w)^x$. O $MDC(x, 25)$, com x natural, resolvido pelo algoritmo das divisões sucessivas de Euclides, gera o esquema a seguir:

	y	1	4	← quocientes
x	25	z	w	← dividendos e divisores
z	w	0		← restos

Sendo assim, é correto afirma que a soma $x + y + z + w$ é igual a:

a)274 b)224 c)199 d)149 e)99

Resolução:

Seguindo o algoritmo das divisões sucessivas de Euclides, temos:

$$\begin{cases} x = 25y + z \\ 25 = z \cdot 1 + w \\ z = w \cdot 4 + 0 \end{cases}$$

Substituindo $z = 4w$ em $25 = z + w$, temos: $25 = 4w + w = 5w \Leftrightarrow w = 5$

Substituindo o valor de w em $z = 4w$, vem: $z = 4 \cdot 5 = 20$

Vamos agora substituir os valores de z e w na expressão de h e utilizar o fato de que h tem 241 algarismos.

$$h = (z \cdot w)^x = (20 \cdot 5)^x = (10^2)^x = 10^{2x}$$

Para que h tenha 241 algarismos, o expoente de 10 deve ser 240, então $2x = 240$

Logo, $x = 120$. Substituindo os valores de x e z em $x = 25 \cdot y + z$,

obtemos $120 = 25y + 20 \Leftrightarrow y = 4$

Portanto, a soma pedida é $x + y + z + w = 120 + 4 + 20 + 5 = 149$.

Resposta: d

Comentário: _Era necessário conhecer o algoritmo de Euclides para solucionar a questão e, muitos livros didáticos utilizam outro método para achar o MDC, não trazendo mais essa teoria, daí a importância do estudante estudar por outras fontes._

4.2.2 Álgebra

3) Sobre o sistema $\begin{cases} \sqrt[5]{y} + x^{-3} = \frac{3}{5} \\ y^{\frac{2}{5}} - (x^{-2})^3 = \frac{4}{25} \end{cases}$ pode-se afirmar que o valor de

a)y^2 é $\frac{169}{900}$ b)x^4 é $\frac{13}{30}$ c)x é $\sqrt[3]{3}$ d)y é $zero$ e)x^3 é 6

Resolução:

Seja $\sqrt[5]{y} = a$ e $x^{-3} = b$, então o sistema pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} a + b = \dfrac{3}{5} \\ a^2 - b^2 = \dfrac{4}{25} \Leftrightarrow (a+b)(a-b) = \dfrac{4}{25} \Rightarrow \dfrac{3}{5} \cdot (a-b) = \dfrac{4}{25} \Leftrightarrow a - b = \dfrac{4}{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = \frac{3}{5} \\ a - b = \frac{4}{15} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{13}{30} \ e \ b = \frac{1}{6}$$

Achando o valor de x e y:

$$\sqrt[5]{y} = a = \frac{13}{30} \Leftrightarrow y = \left(\frac{13}{30}\right)^5$$

$$x^{-3} = b = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x^3 = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{6} \Leftrightarrow x^3 = 6$$

Resposta:e

Comentário: *<u>A utilização do artifício, que é fazer a substituição de variável por outras mais adequadas, torna a resolução de muitos sistemas de equação mais simples e essa técnica só é aprimorada, com a prática de resolução de exercícios.</u>*

4)Seja o número real x tal que $W = \frac{2x^2}{9} - \frac{\sqrt{6}}{6}x + 21$. Sendo assim, qual o valor de x para que W seja mínimo?

a)$3\sqrt{6}$ b)$\frac{3\sqrt{6}}{8}$ c)$7\sqrt{9}$ d)$\frac{2\sqrt{6}}{3}$ e)$6\sqrt{6}$

A expressão $W = \frac{2x^2}{9} - \frac{\sqrt{6}}{6}x + 21$ é um trinômio do 2º grau, e assume mínimo quando x é $x_v = \frac{-b}{2a}$, ou seja, basta achar abscissa do vértice, temos:

$x_v = \frac{-\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)}{2\cdot\left(\frac{2}{9}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$, que é o valor de x que faz W ser mínimo.

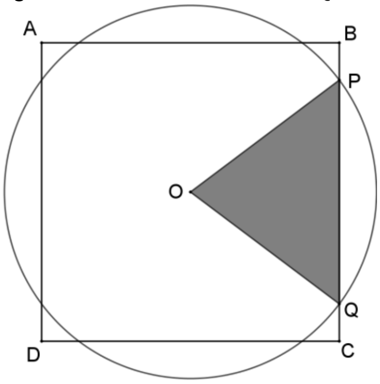
Resposta: b

Comentário: *<u>Diria que é a questão mais simples da prova, apesar de não ser uma equação do 2º grau, não muito convencional, mas como só desejava a abscissa do vértice, daí sua simplicidade.</u>*

4.2.3 Geometria

5) Analise a figura a seguir.

Figura 30-Circunferência e Quadrado



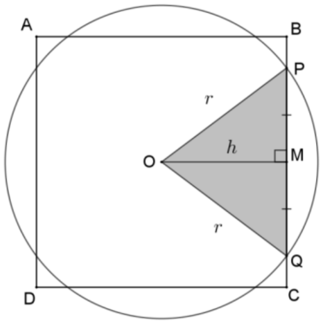
Fonte: CN-2017

Pelo centro O do quadrado de lado $\sqrt{6}$ cm acima, traçou-se a circunferência que corta o lado BC nos pontos P e Q. O triângulo OPQ tem área $\frac{\sqrt{3}}{2}\,cm^2$. Sendo assim, é correto afirmar que o raio dessa circunferência, em cm, é igual a

a)1 b)$\sqrt{2}$ c)$\sqrt{3}$ d)$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ e)$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução:

Figura 31-Circunferência e Quadrado



Fonte: O Autor

A altura do triângulo OPQ é metade do lado do quadrado, ou seja, $\boldsymbol{h = OM = \frac{\sqrt{6}}{2}}$

A área do triângulo OPQ é dada por $\frac{PQ \cdot OM}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow PQ = \sqrt{2}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OMP, temos:

$$OP^2 = MP^2 + OM^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{6}{4} = 2 \Leftrightarrow r = OP = \sqrt{2}$$

Resposta: b

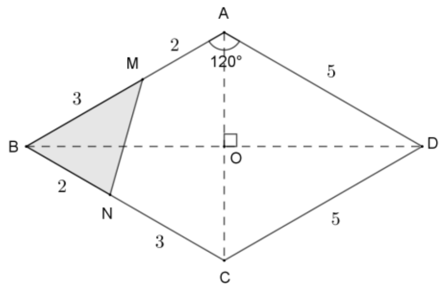
Comentário: *<u>Bastava observar a simetria da figura e a característica de uma circunferência, que já podia perceber que a altura do triângulo era metade do lado do quadrado, ponto chave da solução.</u>*

6) Considere um losango ABCD de lado igual a 5 cm, diagonais AC e BD, e ângulo interno $B\hat{A}D = 120°$. Sabe-se que um ponto M sobre o lado AB está a 2 cm de A enquanto um ponto N sobre o lado BC está a 3 cm de C. Sendo assim, a razão entre a área do losango ABCD e a área do triângulo de vértices MBN é igual a

a)$\frac{15}{2}$ b)$\frac{21}{4}$ c)$\frac{25}{3}$ d)$\frac{32}{5}$ e)$\frac{49}{4}$

Resolução:

Figura 32-Losangulo



Fonte: O Autor

Os triângulos MBN e ABC têm um ângulo comum, então a razão entre as suas áreas é

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MBN}} = \frac{BA \cdot BC}{BM \cdot BN} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{25}{6}$$

A área do triângulo ABC é metade da área do losango ABCD, então

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MBN}} = \frac{25}{6} \Leftrightarrow \frac{\frac{S_{ABCD}}{2}}{S_{MBN}} = \frac{S_{ABCD}}{S_{MBN}} = 2 \cdot \frac{25}{6} = \frac{25}{3}$$

Resposta: c

Comentário: *De um modo geral, uma questão simples para esse concurso, bastando fazer uma algebrização entre as razões das áreas que chegava a razão pedida.*

4.3 QUESTÕES DA PROVA DE ACESSO 2016

4.3.1 Aritmética

1) Calcule o valor de $X = \left(\frac{\sqrt{1^{1256}}+8943^{0}+\frac{3125}{5^{5}}+\sqrt[7]{1}}{1{,}5-2^{-1}+(-1)^{2058}}\right)^{\sqrt[7]{\frac{3^{21}+3^{23}}{10}}}$ e assinale a opção correta.

a)2^{16} b)2^{20} c)2^{24} d)2^{26} e)2^{27}

Resolução:

Efetuando as potências e as raízes temos:

$$\left(\frac{1+1+\frac{5^{5}}{5^{5}}+1}{1{,}5-\frac{1}{2}+1}\right)^{\sqrt[7]{\frac{3^{21}(1+3^{2})}{10}}} = \left(\frac{4}{2}\right)^{\sqrt[7]{3^{21}}} = 2^{3^{3}} = 2^{27}$$

Resposta:e

Comentário: *Para um estudante despreparado, essa questão poderia assustar, vide o dilema dos livros didáticos, mas para um ambientado, sem dúvida que ela poderia ser considerada fácil.*

2) Sejam x e y números reais tais que $xy = 2\sqrt{3}$. Sendo assim, o valor mínimo de $x^{8}+y^{8}$ é

a) múltiplo de 18 b)um número primo c)divisível por 5 d) divisível por 13 e)par maior que 300

Resolução:

Como x e y são reais, então x^8 e y^8 são números não negativos. Aplicando a desigualdade das médias, temos:

$\frac{x^8+y^8}{2} \geq \sqrt{x^8 \cdot y^8} \Leftrightarrow x^8 + y^8 \geq 2x^4y^4 = 2 \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^4 = 32 \cdot 9 = 288$

que é múltiplo de 18.

Resposta:a

Comentário: *Embora a questão aparenta ser bem complicada, usando a desigualdade das médias, ela pôde ser resolvida de forma bem simples, daí a importância de tal conteúdo*.

4.3.2 Álgebra

3) O conjunto solução da equação $x + 1 = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$ em $\mathbb{R}$, conjunto dos números reais, é

a)$\mathbb{R}$ b)$[-1, \infty[$ c)$\mathbb{R} - [-1, \infty[$ d)$[0, \infty[$ e)$\left[-\frac{1}{2}, \infty\right[$

Resolução:

A condição de existência é $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Desenvolvendo a equação irracional.

$$x + 1 = \sqrt{x^2 + \sqrt{(2x+1)^2}} \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{x^2 + |2x + 1|}$$

$$2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow x + 1 = \sqrt{x^2 + 2x + 1} \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = x + 1$$

Assim, uma parte do conjunto solução é $S_1 = \left[-\frac{1}{2}, \infty\right[$

$$2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \Rightarrow x + 1 = \sqrt{x^2 - (2x+1)} \Leftrightarrow (x+1)^2 = x^2 - 2x - 1$$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x - 1 \Leftrightarrow 4x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (não convém)

O conjunto solução é : $S = \left[-\frac{1}{2}, \infty\right[$

Resposta: e

Comentário: *Para um estudante não muito preparado ou descuidado, poderia ter marcado a opção A, não observado que quando elimina-se a raiz quadrada, o radicando tem que ficar em módulo.*

4) Seja $P(x) = x^2 - 2016x - 2017$ um polinômio com “x” real tal que $p(60002) = k$. Sendo assim, o valor de $p(-57986)$ é

a)k b)$2k + 1$ c)k^2 d)$3k^2 - 1$ e)$5 - k^2$

Resolução:

A abscissa do vértice do trinômio do 2° grau $p(x) = x^2 - 2016x - 2017$ é $x_v = \frac{-(-2016)}{2\cdot1} = 1008$. Como $6002 - 1008 = 58994$ e $1008 - (-57986) = 58994$, então esses dois pontos são equidistantes do vértice, o que implica $p(-57986) = p(60002) = k$.

Resposta: a

Comentário: _Essa é uma questão de função quadrática diferente do usual, trabalhando com a noção de gráfico dessa função, daí a chave da questão estava em analisar a abscissa do vértice, tema que não é muito comum,_

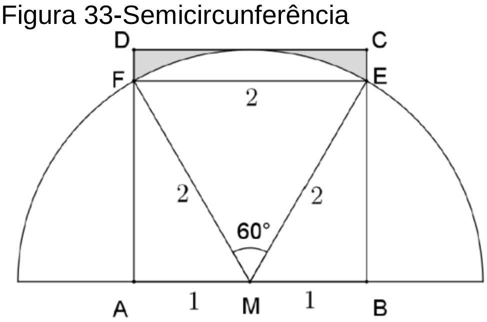
4.3.3 Geometria

5) Seja o quadrado ABCD de lado 2. Traça-se, com centro no ponto M, médio do lado AB, uma semicircunferência de raio 2 que intersecta os lados BC e AD, respectivamente, em "E" e "F". A área da superfície externa à semicircunferência e que também é interna ao quadrado, é igual a (Dado $\Pi = 3$)

a)$3 - \sqrt{3}$ b)$2 - \sqrt{3}$ c)$3 + \sqrt{3}$ d)$2 + \sqrt{3}$ e)$3 - \sqrt{2}$

Resolução:

Figura 33-Semicircunferência



Fonte: O Autor

Na figura, temos $ME = MF = 2(raio)$ e $EF = AB = 2$. Daí o triângulo EFM é equilátero . Aplicando Pitágoras no triângulo retângulo AFM, temos $AF^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \Leftrightarrow AF = \sqrt{3}$. Seja S a área da região sombreada, então S é igual à área do quadrado ABCD, menos a área de um setor circular de $60°$e raio 2, e menos a área dos triângulos retângulos AMF e BME. Assim, temos:

$$S = S_{ABCD} - S_{setor\,60°} - S_{AMF} - S_{BME} = 2^2 - \frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{1\cdot\sqrt{3}}{2} - \frac{1\cdot\sqrt{3}}{2} = 4 - \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

Como $\pi = 3$, temos $S = 4 - \frac{2\cdot3}{2} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$

Resposta: b

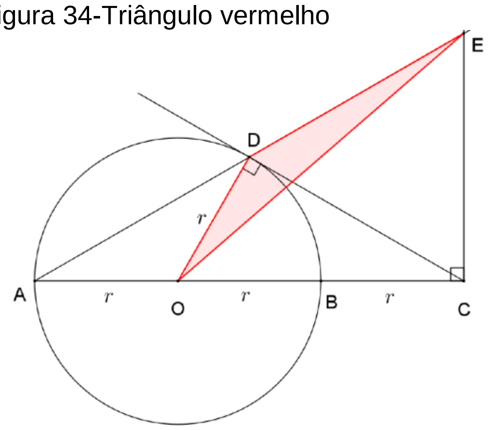
Comentário: *Essa é uma questão de geometria, que era necessário uma boa construção da figura para enxergar a solução, raciocinando como na maioria das questões de áreas entre figuras geométrica, bastava calcular as áreas relacionadas, onde a diferença entre elas, resultava na solução pedida.*

6) Considere uma circunferência de centro “O” e raio “r”. Prolonga-se o diâmetro AB de um comprimento BC de medida igual a “r” e, de “C”, traça-se uma tangente que toca a circunferência em “D”. A perpendicular traçada de “C”, a BC, intersecta a reta que passa por “A” e “D” em “E”. Sendo assim, a área do triângulo ODE em função do raio é

a) $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$ b) $r^2\sqrt{6}$ c) $\frac{r^2\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{r^2\sqrt{2}}{4}$ e) $r^2\sqrt{3}$

Resolução:

Figura 34-Triângulo vermelho



Fonte: O Autor

Como CD é tangente à circunferência, $OD \perp CD$.

No triângulo retângulo OCD, temos $sen O\hat{C}D = \frac{OD}{OC} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \Rightarrow O\hat{C}D = 30°$,

$C\hat{O}D = 90° - 30° = 60°$ e $sen C\hat{O}D = \frac{CD}{OC} \Leftrightarrow sen 60° = \frac{CD}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow CD = r\sqrt{3}$

Como $O\hat{C}E = 90°$, então $E\hat{C}D = O\hat{C}E - O\hat{C}D = 90° - 30° = 60°$

O ângulo C$\hat{O}D = 60°$ é ângulo externo do triângulo isósceles AOD, então $O\hat{A}D = O\hat{D}A = \frac{60°}{2} = 30°$.

No triângulo retângulo ACE, temos $C\hat{A}E = O\hat{A}D = 30°$ e $C\hat{E}A = 90° - C\hat{A}E = 90° - 30° = 60°$.

No triângulo CDE, temos $C\hat{E}D = C\hat{E}A = 60°$ e $E\hat{C}D = 60°$, logo $C\hat{D}E = 180° - 60° - 60° = 60°$ e o triângulo CDE é equilátero. Assim temos $DE = CE = CD = r\sqrt{3}$.

No triângulo ODE, temos: $O\widehat{D}E = O\widehat{D}C + C\widehat{D}E = 90° + 60° = 150°$. Assim, sua área é dada por: $S_{ODE} = \frac{DO \cdot DE}{2} \cdot senD\hat{O}E = \frac{r \cdot r\sqrt{3}}{2} \cdot sen150° = \frac{r^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$

Resposta: a

Comentário: *Nesta questão, uma boa construção da figura era necessário para começar a determinar os ângulos e achar o lado e o ângulo do triângulo, podendo assim calcular a área do triângulo. A questão exigia uma base razoável em geometria, pois havia um número considerável de relação entre ângulos que deveria ser feito.*

4.4 QUESTÕES DA PROVA DE ACESSO 2000

4.4.1 Aritmética

1) Dois sinais luminosos fecham juntos num determinado instante. Um deles permanece 10 segundos fechado e 50 segundos aberto, enquanto o outro permanece 10 segundos fechado e 40 segundos aberto. O número mínimo de segundos necessários, a partir daquele instante, para que os dois sinais voltem a fechar juntos outra vez é de:

a) 110 b) 120 c) 150 d) 200 e)300

Resolução:

O primeiro sinal volta a fechar em 60 segundos (10 + 50) e o segundo sinal volta a fechar em 50 segundos (10 + 40). O intervalo de tempo necessário para que os dois voltem a fechar juntos novamente é dado pelo mínimo múltiplo comum desses dois intervalos de tempo:

$$mmc(60,50) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300 segundos$$

Resposta:e

Comentário: *Essa é uma questão de aplicação de mínimo múltiplo comum(mmc), onde o candidato tinha que atentar para o fato que o intervalo de tempo, que o sinal fica fechado, também foi considerado na hora de calcular o mmc.*

2) Seja N = xyzzyx um número natural escrito na base dez, onde x, y e z são algarismos distintos. Se N_1 e N_2 são os dois maiores números divisíveis por 3 e 25, obtidos a partir de N pela substituição de x, y e z, então $N_1 + N_2$ é igual a:

a) 1008800 b) 1108800 c) 1156650 d) 1157000 e) 1209800

Resposta:

Se N_1 e N_2 são divisíveis por 25, então terminam em 00, 25, 50 ou 75.

Para que os números sejam os dois maiores possíveis divisíveis por 25,então devem terminar em 75 e serão da forma 57zz75.

Como $N_1\ e\ N_2$ são também múltiplos de 3, a soma de seus algarismos $5+7+z+z+7+5=24+2z$ deve ser múltipla de 3, o que implica que z deve ser múltiplo de 3. Assim, os dois maiores números com as propriedades pedidas são $N_1=579975$ e $N_2=576675$, e $N_2+N_2=1156650$

Resposta:c

Comentário: *Essa é uma questão envolvendo divisibilidade e raciocínio lógico e, apesar de aparentar ser complexa, por ter letras substituindo algarismos, ao aplicar o critério de divisibilidade por 25 e a hipótese do enunciado, a questão estava praticamente resolvida.*

4.4.2 Álgebra

3) O valor de $(a^2+a^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}+(b^2+a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}$ é:

A) $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}$ B) $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}}$ C) $(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}}$ D) $(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ E) $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

Resolução:

$$\left(a^2+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(b^2+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+\left[b^{\frac{4}{3}}\left(b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Solução2:

Chamando o valor procurado de x, sendo que $x\geq 0$ no domínio dos números reais:

$$x=(a^2+a^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}+(b^2+a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

Elevando os dois lados da equação ao quadrado:

$$x^2=\left[(a^2+a^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}+(b^2+a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

Desenvolvendo o produto notável correspondente ao quadrado da soma de dois termos:

$$x^2 = \left[(a^2 + a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\right]^2 + 2 \cdot (a^2 + a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \cdot (b^2 + a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} + \left[(b^2 + a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$x^2 = (a^2 + a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}) + 2 \cdot \left[(a^2 + a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}})(b^2 + a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}})\right]^{\frac{1}{2}} + (b^2 + a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}})$$

A expressão entre colchetes na equação acima é desenvolvida à parte:

$$y = (a^2 + a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}})(b^2 + a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}})$$

Aplicando a distributiva:

$$y = a^2 b^2 + a^{\left(2+\frac{2}{3}\right)} \cdot b^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\left(\frac{2}{3}+2\right)} + a^{\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)} \cdot b^{\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)}$$

$$y = a^2 b^2 + a^{\frac{8}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{8}{3}} + a^2 \cdot b^2$$

Reagrupando os termos:

$$y = \left(a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}}\right)^2$$

Rearranjando os expoentes:

$$y = \left(a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^2 + 2 \cdot a^{\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)} \cdot b^{\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)} + \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}}\right)^2$$

Obtém-se a expressão equivalente ao produto notável do quadrado da soma de dois termos:

$$y = \left(a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}}\right)^2$$

Voltando à equação em x e substituindo a expressão obtida em y:

$$x^2 = (a^2 + a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}) + 2 \cdot \left[\left(a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + (b^2 + a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}})$$

$$x^2 = (a^2 + a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}) + 2 \cdot (a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}}) + (b^2 + a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}})$$

$$x^2 = a^2 + a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} + 2 \cdot a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} + 2 \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}} + b^2 + a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}}$$

$$x^2 = a^2 + 3 \cdot a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} + 3 \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}} + b^2$$

Rearranjando os expoentes:

$$x^2 = a^{2\cdot\frac{3}{3}} + 3\cdot a^{\frac{2\cdot 2}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} + 3\cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{2\cdot 2}{3}} + b^{2\cdot\frac{3}{3}}$$

$$x^2 = (a^{\frac{2}{3}})^3 + 3\cdot (a^{\frac{2}{3}})^2 \cdot b^{\frac{2}{3}} + 3\cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot (b^{\frac{2}{3}})^2 + (b^{\frac{2}{3}})^3$$

Obtém-se a expressão do produto notável correspondente ao cubo da soma de dois termos:

$$x^2 = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^3$$

Lembrando das condições iniciais ($x \in R, x \geq 0$), resulta:

$$x = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

Resposta: e

Comentário: _A primeira solução obtida seria a mais indicada para ser trabalhada num concurso onde o tempo é limitado, bastando fazer duas fatorações, já a segunda, exige bem mais tempo, onde terá que desenvolver duas vezes produto de polinômio e duas fatorações de produto notáveis, ou seja, um caminho mais longo, com mais chances de errar e que deixaria o estudante mais extenuado._

4) Um comerciante comprou **k** objetos idênticos por **t** reais, onde **t** é um número inteiro positivo. Ele contribuiu para um bazar de caridade, vendendo dois objetos pela metade do preço de custo. Os objetos restantes foram vendidos com um lucro de seis reais por unidade. Se o seu lucro total foi de setenta e dois reais, o menor valor possível para **k** é:

a) 11 b) 12 c) 15 d) 16 e) 18

Resolução:

Seja x o preço unitário de custo dos objetos comprados, sendo que x é um número inteiro, então:

$$k \cdot x = t$$

O comerciante vendeu (k-2) objetos com lucro de 6 reais cada um. Isso lhe dá um lucro parcial de 6·(k-2) reais. Contudo, houve um "prejuízo" representado pelos dois objetos vendidos pela metade do preço de custo, ou seja, $2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)$ reais. O lucro total é dado por:

$$6\cdot(k-2) - 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right) = 72$$

$$k = \frac{84 + x}{6}$$

Para que k seja um número inteiro e estritamente positivo, (84+x) deve ser um múltiplo positivo de 6. Observa-se que 84 é múltiplo de 6. Dessa forma, o menor valor de x, também inteiro e estritamente positivo, que satisfaz essa condição é 6, e esse valor fornece o menor valor possível para k:

$$k = \frac{84 + 6}{6} \Leftrightarrow k = 15$$

Resposta:c

Comentário: <u>Essa é uma *questão que envolvia noções básicas de matemática financeira e um pouco de aritmética onde deveria usar a hipótese do enunciado para chegar na resposta específica. Esse é um problema diferenciado e escasso nos livros didáticos .*</u>

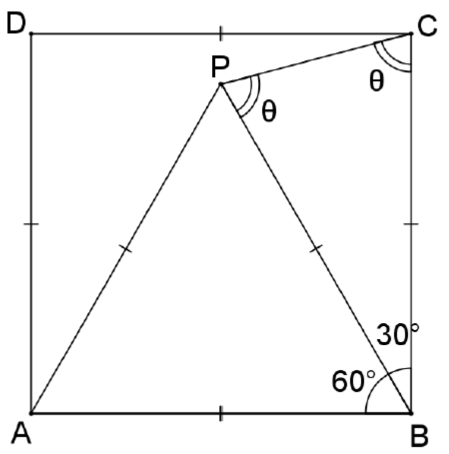
4.4.3 Geometria

5) A, B, C e D são vértices consecutivos de um quadrado e PAB é um triângulo equilátero, sendo P interno ao quadrado ABCD. Qual é a medida do ângulo PCB?

a) 30^o b) 45^o c) 60^o d) 75^o e) 90^o

Resolução:

Figura 35-Quadrado e Triângulo



Fonte: O Autor

O ângulo $A\hat{B}C$ é reto, pois é um dos ângulos internos do quadrado ABCD. O ângulo $A\hat{B}P$, por ser ângulo interno do triângulo equilátero PAB, mede 60^o. Então:

$$m(P\hat{B}C) = m(A\hat{B}C) - m(A\hat{B}P) = 90^o - 60^o = 30^o$$

Os segmentos BC e BP são congruentes, pois o lado do triângulo eqüilátero tem a mesma medida do lado do quadrado. Logo, o triângulo PBC é isósceles e os ângulos da base são iguais:

$$m(B\hat{P}C) = m(P\hat{C}B)$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o :

$$m(B\hat{P}C) + m(P\hat{C}B) + m(P\hat{B}C) = 180^o$$

$$2\cdot[\, m(P\hat{C}B)] + 30^o = 180^o$$

$$m(P\hat{C}B) = \frac{180^o - 30^o}{2} \Rightarrow m(P\hat{C}B) = 75^o$$

Resposta: d

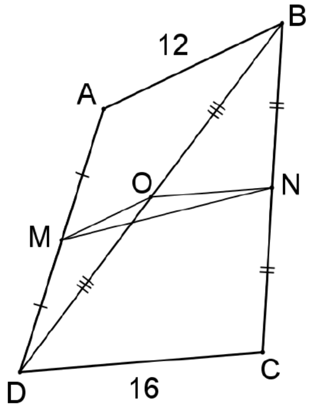
Comentário: _A construção de uma boa figura era essencial para enxergar a solução, onde se tratava de relacionar os lados dos polígonos para determinar os ângulos, sabendo apenas das características do quadrado e triângulo equilátero._

6) Seja ABCD um quadrilátero qualquer onde os lados opostos NÃO são paralelos. Se as medidas dos lados opostos AB e DC são, respectivamente, iguais a 12 e 16, um valor possível para o segmento de extremos M(ponto médio do lado AD) e N(ponto médio da lado BC) é:

a) 12,5 b) 14 c) 14,5 d) 16 e) 17

Resolução:

Figura 36-Quadrilátero



Fonte: O Autor

Tracemos a diagonal BD e seja O o seu ponto médio.

MO é base média do $\Delta ABD \Rightarrow MO = \frac{AB}{2} = 6$

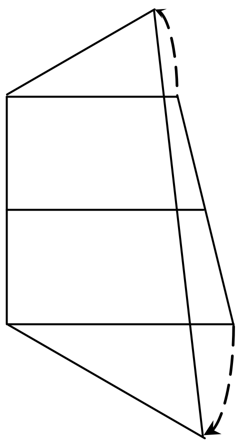
NO é base média do $\Delta BCD \Rightarrow NO = \frac{CD}{2} = 8$

Aplicando a desigualdade triangular no ΔMNO ,temos: $2 = NO - MO < MN < MO + NO = 14$.

Logo, a única opção possível é $MN = 12{,}5$.

Solução2:

Se *o* quadrilátero em questão fosse um trapézio, o segmento MN representaria a mediana, e sua medida seria:



$$MN' = \frac{AB' + DC'}{2} = \frac{12 + 16}{2} = 14 \text{ , para } AB' // DC'$$

Porém, uma vez que os lados opostos não são paralelos, existirá um ângulo relativo entre AB e DC. Então, a mediana passa a apresentar uma medida menor do que 14 e pode assumir qualquer valor no intervalo aberto:

12 < MN < 14

Um valor possível, portanto, seria 12,5, que está contido neste intervalo.

Resposta: a

Comentário: *A primeira solução é mais técnica e sofisticada, usa a desigualdade triangular por meio de uma construção de dois triângulos ao traçar uma diagonal, daí usa a base média neles, determinando os lados dos triângulos que foi aplicada a desigualdade. Já na segunda, usou-se um pouco da intuição e construção geométrica para concluir que se os lados opostos não forem paralelos, o valor que MN pode assumir, é menor que a base média do quadrilátero.*

4.5 QUESTÕES DA PROVA DE ACESSO 2001

4.5.1 Aritmética

1) O mínimo múltiplo comum entre dois números naturais a e b é 360 e $a \cdot b = 360$. Qual o menor valor $a + b$ pode assumir?

a)120 b)130 c)150 d)200 e)370

Resolução:

$$mmc(a,b)\cdot mdc(a,b) = a\cdot b \Rightarrow 360\cdot mdc(a,b) = 3600 \Leftrightarrow mdc(a,b) = 10$$

$$mdc(a,b) = 10 \Rightarrow \exists p,q \in \mathbb{N}^* \ tais\ que\ a = 10p, b = 10q\ e\ mdc(p,q) = 1$$

$$a\cdot b = 3600 \Rightarrow 10p\cdot 10q = 3600 \Leftrightarrow p\cdot q = 36$$

$$mdc(p,q) = 1\ e\ p\cdot q = 36 \Rightarrow (p,q) \in \{(1,36);(4,9);(9,4);(36,1)\}$$

O menor valor possível para a soma de a e b é $a + b = 10\cdot 4 + 10\cdot 9 = 130$.

Resposta:b

Comentário: _Essa é uma questão que necessitava usar a relação entre mmc e mdc, relação essa que não é permeada por muitos livros didáticos e só é encontrada em material específico para o concurso. Depois de usar esses conceitos, era só trabalhar com a definição de mdc restringindo o número de possibilidades dos números procurados pelo fato que são primos entre si._

2) Se a é um número natural, $a^5 - 5a^3 + 4a$ é sempre divisível por:

a) 41 b)48 c)50 d)60 e)72

Resolução:

$a^5 - 5a^3 + 4a = a(a^4 - 5a^2 + 4)$

$= a(a^2 - 4)(a^2 - 1) = (a-2)(a-1)(a)(a+1)(a+2)$

Como $a \in \mathbb{N}$, então a expressão do enunciado é o produto de cinco números naturais consecutivos o que implica que há pelo menos um múltiplo de 5, um múltiplo de 4, um múltiplo de 3 e um múltiplo de 2 não múltiplo de 4. Portanto, a expressão é sempre múltipla de $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$ e, consequentemente, sempre divisível por 60.

Resposta:d

Comentário: _Essa é uma questão que mistura álgebra com aritmética, necessitando fatorar para enxergar a solução, onde iria concluir, por se tratar de 5 números consecutivos, que necessariamente haveria de ter um múltiplo de cada número citado acima ._

4.5.2 Álgebra

3) Conjunto solução da equação $\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-1}} = 1$ é igual:

a)$\emptyset$ b)$\mathbb{R}$ c)$\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$ d)$\mathbb{R}-\{-1,1\}$ e)$\{0\}$

Resolução:

$$\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-1}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}}{\frac{2(x-1)+2(x+1)}{(x+1)(x-1)}} = 1 \Leftrightarrow \frac{4x}{4x} = 1$$

Daí concluímos que a equação é satisfeita para todo x, menos aqueles que torna o denominador igual a zero,logo a solução é dada por: $S = \mathbb{R}-\{-1,0,1\}$

Resposta:c

Comentário<u>*: Essa é uma questão de equação sofisticada, já que exigia um domínio algébrico ao se igualar o denominador e fazer as simplificações, depois tinha que notar que alguns valores deveriam ser excluídos da solução, já que eles tornavam a equação impossível ou indeterminada.*</u>

4) Marta comprou petecas, bolas e bonecas, pagando por cada unidade, respectivamente, R$ 1,00 ,R$ 10,00 e R$ 20,00 . Gastou R$ 220,00 em um total de 101 unidades desses brinquedos. Quantas petecas ela comprou?

a)95 b)93 c)92 d)91 e)90

Resolução:

Sejam x, y e z as quantidades de petecas, bolas e bonecas compradas, respectivamente, então

$$\begin{cases} x+10y+20z=220 \\ x+y+z=101 \end{cases} \sim$$

$$x+10y+20z=220 \Rightarrow (101-y-z)+10y+20z=220 \Leftrightarrow 9y+19z=119$$

$$9y+19z=119 \Rightarrow 19z \le 119 \Leftrightarrow z \le 6$$

$$9y+19z=119 \Leftrightarrow y = \frac{119-19z}{9} = 13-2z+\frac{2-z}{9}$$

$0 \le z \le 6$ e $y = 13-2z+\frac{2-z}{9} \in \mathbb{Z}$ $z=2, y=9$ e $x=90$

Logo, foram compradas 90 petecas.

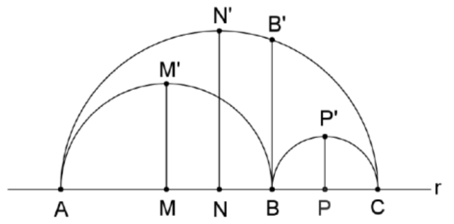
Resposta: e

Comentário: *Essa é uma questão de sistema de equações com três variáveis e duas equações, que geralmente tem infinitas soluções, mas como as variáveis só podem assumir valores inteiros positivos, isso possibilitou obter uma solução particular usando noções de aritmética. Estudantes não habituados com esse tipo de problema ou desatentos, certamente não solucionou a questão.*

4.5.3 Geometria

5)Observe a figura abaixo que representa três semicircunferências de centros M, N e P, tangentes duas a duas, respectivamente, nos pontos A, B e C. Os segmentos MM', NN', BB' e PP' são perpendiculares à reta r. Se a medida do segmento BB' é 6 cm, a área do triângulo $M'N'P'$ em cm^2, é igual a:

Figura 37-Três Circunfências



a)9 b)10 c)12 d)18 e)36

Resolução:

$$S_{M'N'P'} = S_{MM'N'N} + S_{PP'N'N} - S_{MM'P'P}$$

Seja r o raio da circunferência de centro N, "a" o centro da circunferência de centro M e "b" o centro da circunferência de centro P.

$2r = 2a + 2b = a + b$

$$S_{MM'N'N} = \frac{(MM' + NN') \cdot MN}{2} = \frac{(r+a)(r-a)}{2} = \frac{(a+b+a)(a+b-a)}{2} = \frac{(2a+b)b}{2}$$

$$S_{PP'N'N} = \frac{(NN' + PP') \cdot NP}{2} = \frac{(r+b)(r-b)}{2} = \frac{(a+b+b)(a+b-b)}{2} = \frac{(a+2b)a}{2}$$

$$S_{MM'P'P} = \frac{(MM' + PP')MP}{2} = \frac{(a+b)(a+b)}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$$

$$S_{M'N'P'} = \frac{(2a+b)b}{2} + \frac{(a+2b)a}{2} - \frac{(a+b)^2}{2}$$

$$S_{M'N'P'} = \frac{2ab + b^2 + a^2 + 2ab - a^2 - b^2 - 2ab}{2} = ab$$

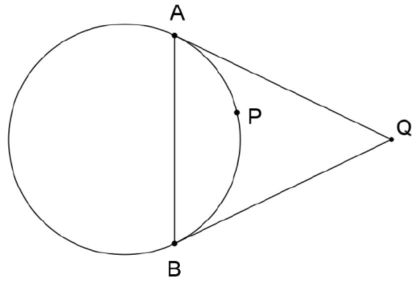
O triângulo $AB'C$ é retângulo em B' e BB' é a altura relativa à hipotenusa, então $(BB')^2 = AB \cdot BC \Rightarrow 6^2 = 2a \cdot 2b \Leftrightarrow ab = 9 \Rightarrow S_{M'N'P'} = ab = 9cm^2$

Resposta:a

Comentário: *Essa é uma questão com um altíssimo grau de dificuldade, só fornece um valor numérico e pede uma determinada área que exigia mais três valores, que são os raios das circunferências. Para isso, era necessário ter espírito de determinação e uma boa visualização algébrica, para perceber que iria sobrar exatamente o produto dos raios das circunferências menores, ao fazer a diferença das áreas para achar a área pedida. Daí a relação da altura relativa a hipotenusa no triângulo retângulo formado na figura, fornecia o valor desse produto.*

6)Na figura abaixo, o ponto P do menor arco AB dista $6cm$ e $10cm$, respectivamente, das tangentes AQ e BQ. A distância, em cm, do ponto P à corda AB é igual a:

Figura 38-Tangentes ao circulo

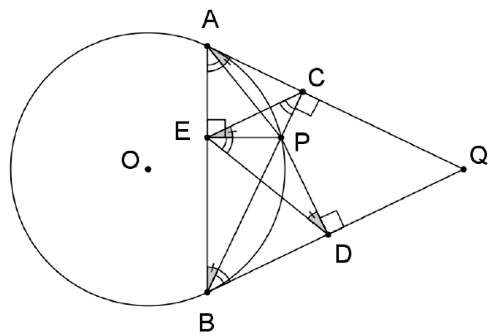


Fonte: CN-2001

a)$\sqrt{30}$ b)2$\sqrt{15}$ c)16 d)18 e)$6\sqrt{10}$

Resolução:

Figura 39-Tangentes ao circulo



Fonte: O Autor

Sejam PC, PD e PE as perpendiculares a AQ, BQ e AB, respectivamente.

Tracam-se PA, PB, EC e ED.

$A\hat{C}P + A\hat{E}P = 90° + 90° = 180° \Rightarrow \boxdot\ ACPE$ é inscritível.

$B\widehat{D}P + B\widehat{E}P = 90° + 90° = 180° \Rightarrow \boxdot\ BDPE$ é inscritível.

$$\Rightarrow C\hat{E}P = C\hat{A}P = \frac{AP}{2} = A\hat{B}P = E\widehat{D}P$$

$$\Rightarrow D\hat{E}P = D\hat{B}P = \frac{BP}{2} = B\hat{A}P = E\hat{C}P$$

$C\hat{E}P = E\widehat{D}P$ e $E\hat{C}P = D\hat{E}P \ \Rightarrow\ \Delta CEP \sim \Delta EDP \ \Rightarrow \frac{PE}{PD} = \frac{PC}{PE} \Leftrightarrow\ PE^2 = PC \cdot PD$

Nesse caso, temos $PC = 6cm$ e $PD = 10cm$, logo $PE^2 = 6 \cdot 10 \Leftrightarrow PE = 2\sqrt{15}cm$.

Resposta:b

Comentário: _Nessa questão, havia necessidade de observar o quadrilátero inscrito e os ângulos que cobriam o mesmo arco, para conseguir determinar a semelhança de triângulo, que chegava na resposta da questão. Essa questão tem no livro fundamentos de matemática elementar 9 do autor G.IEZZI. Resolver todos os exercícios desse livro, na visão do autor, é fundamental para o estudante que almeja uma vaga no concurso._

4.6 APLICAÇÃO DE UMA ATIVIDADE EM SALA DE AULA

Essa seção é dedicada à discussão da avaliação aplicada em sala de aula, onde foram selecionadas questões antigas do colégio naval, usando como critério do autor, selecionar aquelas que tivessem no mesmo nível do livro didático usado pelos estudantes, o que para uma prova desse porte não foi uma tarefa simples.

Essa prova elaborada e aplicada, serviu como avaliação diagnóstica, já que envolviam assuntos de 6º e 7º ano e foi aplicada numa turma de 9º ano, que têm 42 alunos, onde estavam presentes 38. Os alunos que eram considerados por mim como bons, tiveram bons resultados e os que não eram considerados por mim como os melhores, se saíram mal, mostrando a importância de desenvolver uma boa base em matemática. A seguir, apresento uma amostra do desempenho da turma na avaliação:

Total de Alunos com 0 acertos: 3

Total de Alunos com 1 acertos: 11

Total de Alunos com 2 acertos: 12

Total de Alunos com 3 acertos: 8

Total de Alunos com 4 acertos: 4

A seguir comentaremos cada uma das questões aplicadas, sendo um acerto e um erro de um determinado aluno, sendo que sua identificação foi omitida.

- **Comentário Sobre as Questões aplicadas**

1)(CN-1987) Uma cafeteira elétrica tem, no recipiente onde se coloca a água, um mostrador indicando de 1 a 20 cafezinhos. O tempo gasto para fazer 18 cafezinhos é de 10 minutos, dos quais 1 minuto é o tempo gasto para aquecer a resistência. Qual o tempo gasto por essa mesma cafeteira para fazer 5 cafezinhos?

Comentário: Uma questão envolvendo regra de três, mas tinha que atentar que o tempo gasto para aquecer a resistência, não contava na relação de proporcionalidade, já que não varia com o número de cafezinhos. Esse fato induzia o estudante ao erro.

2)(CN-1997) Os ponteiros das horas, dos minutos e dos segundos de um relógio indicam zero hora. Até as 9 horas do mesmo dia, os ponteiros dos minutos e dos segundos terão se encontrado um número de vezes igual a:

Comentário: Essa questão tinha um detalhe muito sutil que era**:** Os ponteiros dos minutos e dos segundos encontram-se uma vez a cada minuto. A exceção ocorre no último minuto e no primeiro minuto de cada hora, em que ocorre apenas um encontro para os dois, exatamente entre um e outro, já que o ponteiro dos minutos não está estático, o que implica na resposta: $60 \times 9 = 540$, teria que está, mas como não, tem que tirar as contagens a mais, daí fica: $540 - 9 = 531$.

Uma outra forma de fazer seria montando uma equação, onde consideraria os ponteiros como dois objetos se movimentando numa pista circular, daí acharia quantas vezes eles iriam se encontrar, análogo ao raciocínio da física cinemática.

3)(CN-1998)Uma roda gigante tem uma engrenagem que é composta de duas catracas, que funcionam em sentidos contrários. Em um minuto, a menor

dá três voltas completas enquanto a maior dá uma volta. Após dezoito minutos de funcionamento da menor, o número de voltas da maior é:

Comentário: Uma das questões mais fácil já aplicada no exame, como em 1 min a menor roda dá 3 voltas e a maior dá 1, a resposta era imediata e sem a necessidade de cálculo.

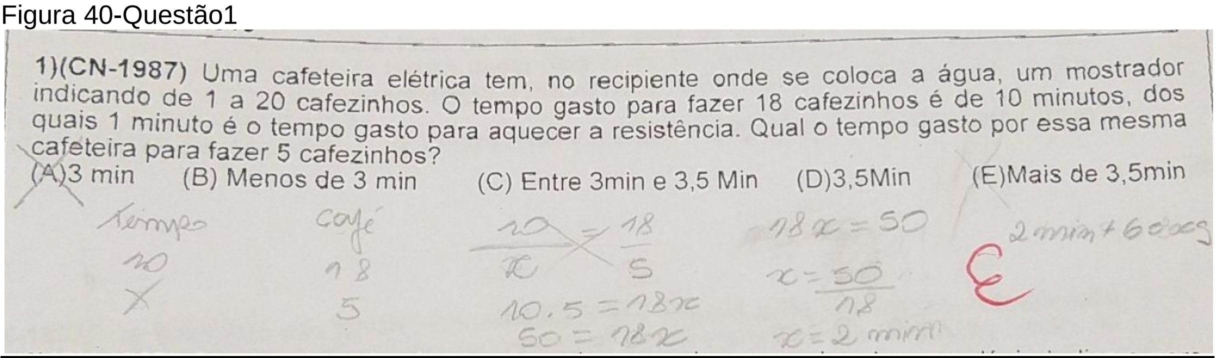
4)(CN-2007) Deseja-se revestir uma área retangular, de 198 cm de comprimento e 165cm de largura, com um número exato de lajotas quadradas, de tal forma que a medida do lado dessas lajotas, expressa por um número inteiro de cm, seja a maior possível. Quantas lajotas deverão ser usadas?

Comentário: A Questão envolvia áreas de figuras planas e aplicação de MDC, onde o estudante precisava dominar a operação de multiplicar e dividir.

- **Dissertando Sobre os Erros dos Alunos**

Aluno 1

Figura 40-Questão1



1)(CN-1987) Uma cafeteira elétrica tem, no recipiente onde se coloca a água, um mostrador indicando de 1 a 20 cafezinhos. O tempo gasto para fazer 18 cafezinhos é de 10 minutos, dos quais 1 minuto é o tempo gasto para aquecer a resistência. Qual o tempo gasto por essa mesma cafeteira para fazer 5 cafezinhos?

(A)3 min (B) Menos de 3 min (C) Entre 3min e 3,5 Min (D)3,5Min (E)Mais de 3,5min

tempo 10 x

café 18 5

$\frac{10}{x} = \frac{18}{5}$

$10.5 = 18x$

$50 = 18x$

$18x = 50$

$x = \frac{50}{18}$

$x = 2$ min

E

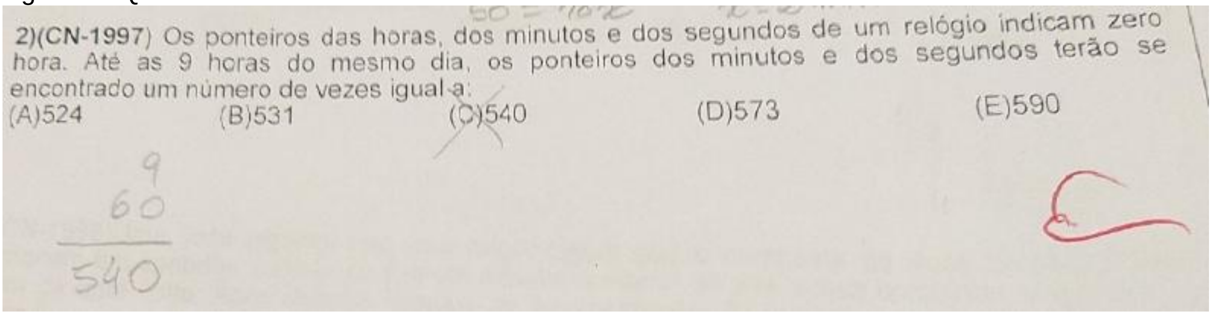
2 min + 60 secs

Fonte: O Autor

Comentário: *<u>Esse aluno não retirou o tempo que a resistência demora para aquecer ao montar a proporção, o que é um erro, já que o tempo para aquecer a resistência não é proporcional a quantidade de cafezinhos.</u>*

Aluno 2

Figura 41-Questão 2



2)(CN-1997) Os ponteiros das horas, dos minutos e dos segundos de um relógio indicam zero hora. Até as 9 horas do mesmo dia, os ponteiros dos minutos e dos segundos terão se encontrado um número de vezes igual a:

(A)524 (B)531 (C)540 (D)573 (E)590

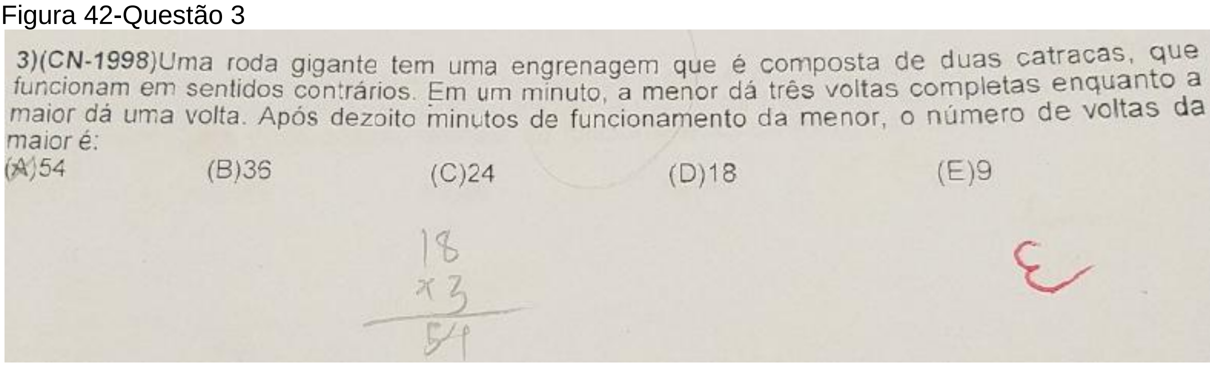
9
60
540

Fonte: O Autor

Comentário: _O aluno fez como se o ponteiro dos minutos estivesse estático, não tirou as contagens a mais, porém, numa avaliação curricular daria para o professor atribuir nota parcial da questão, considerando o raciocínio do aluno._

Aluno 3

Figura 42-Questão 3



3)(CN-1998) Uma roda gigante tem uma engrenagem que é composta de duas catracas, que *funcionam em sentidos contrários.* Em um minuto, a menor dá três voltas completas enquanto a *maior dá* uma volta. Após dezoito minutos de funcionamento da menor, o número de voltas da *maior é:*

(A)54 (B)36 (C)24 (D)18 (E)9

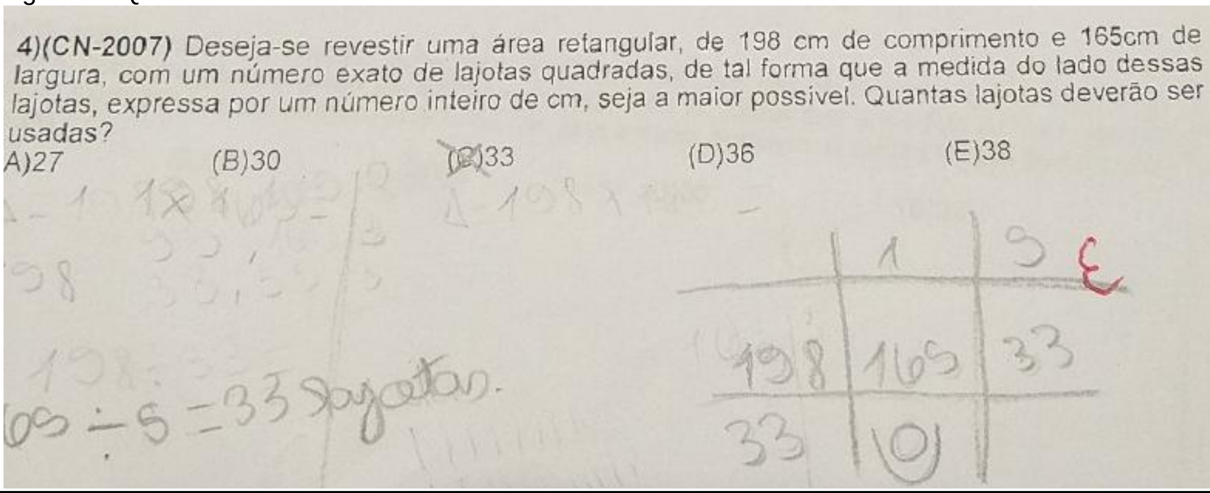
18
x3
54

Fonte: O Autor

Comentário: _Essa resposta estaria adequada se tivesse pedido o número de voltas da menor. Se a menor funcionou 18 min, a maior também, logo como a cada 1 min a maior da 1 volta, em 18 min dará 18 voltas. Por falta de atenção, o estudante inverteu a informação e fez como se a cada 1 min de funcionamento da menor, a maior percorresse 3 voltas._

Aluno 4

Figura 43-Questão 4


4)(CN-2007) Deseja-se revestir uma área retangular, de 198 cm de comprimento e 165cm de largura, com um número exato de lajotas quadradas, de tal forma que a medida do lado dessas lajotas, expressa por um número inteiro de cm, seja a maior possível. Quantas lajotas deverão ser usadas?

A)27 (B)30 (C)33 (D)36 (E)38

		1	5
	198	165	33
	33	0	

165 ÷ 5 = 33 lajotas.

E

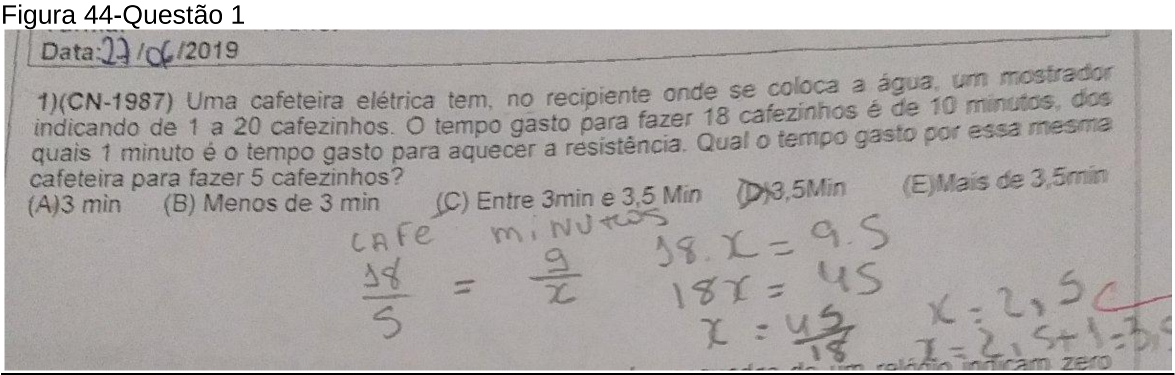
Fonte: O Autor

Comentário: _Essa resposta fornecida pelo MDC entre as dimensões, está dizendo quanto cm vai ter o maior lado possível das lajotas quadradas, o que não responde a pergunta do enunciado, que pedia o número de lajotas usadas para revestir a área retangular, daí era necessário calcular a área retangular e a área das lajotas quadradas, em seguida, dividir uma pela outra obtendo assim a resposta correta, letra b._

- **Dissertando Sobre os Acertos dos Alunos**

ALUNO 1

Figura 44-Questão 1


Data: 27/06/2019

1)(CN-1987) Uma cafeteira elétrica tem, no recipiente onde se coloca a água, um mostrador indicando de 1 a 20 cafezinhos. O tempo gasto para fazer 18 cafezinhos é de 10 minutos, dos quais 1 minuto é o tempo gasto para aquecer a resistência. Qual o tempo gasto por essa mesma cafeteira para fazer 5 cafezinhos?

(A)3 min (B) Menos de 3 min (C) Entre 3min e 3,5 Min (D)3,5Min (E)Mais de 3,5min

cafe minutos

$\frac{18}{5} = \frac{9}{x}$

$18 \cdot x = 9 \cdot 5$

$18x = 45$

$x = \frac{45}{18}$

$x = 2,5$

$x = 2,5 + 1 = 3,5$

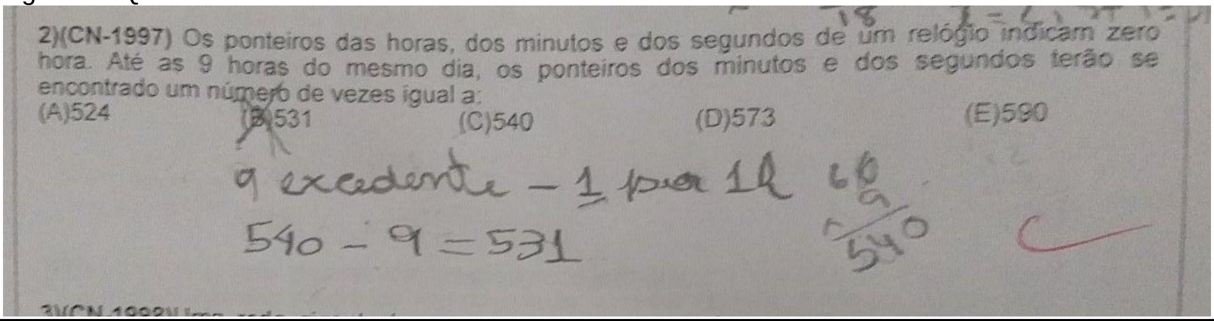
C

Fonte: O Autor

Comentário: _O aluno observou que o tempo para aquecer a resistência era constante e não variava conforme o número de cafezinho, daí não considerou na hora de armar a proporção e só acrescentando depois._

ALUNO 2

Figura 45-Questão 2



2)(CN-1997) Os ponteiros das horas, dos minutos e dos segundos de um relógio indicam zero hora. Até as 9 horas do mesmo dia, os ponteiros dos minutos e dos segundos terão se encontrado um número de vezes igual a:

(A)524 (B)531 (C)540 (D)573 (E)590

9 excedente – 1 por 1h

$540 - 9 = 531$

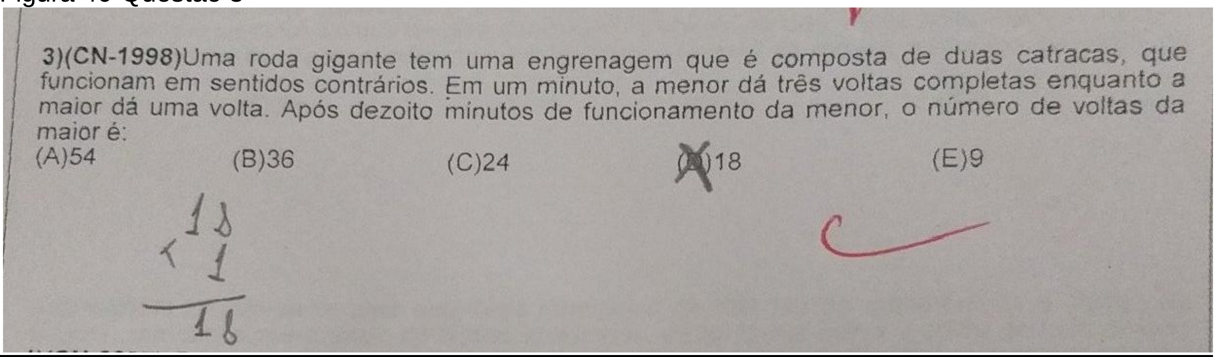
$60 \times 9 = 540$

Fonte: O Autor

Comentário: *O aluno percebeu que por causa dos pequenos deslocamentos do ponteiros dos minutos, o ponteiro dos segundos dava uma volta a menos a cada 1hora de funcionamento, assim fez a exclusão necessária.*

ALUNO 3

Figura 46-Questão 3



3)(CN-1998)Uma roda gigante tem uma engrenagem que é composta de duas catracas, que funcionam em sentidos contrários. Em um minuto, a menor dá três voltas completas enquanto a maior dá uma volta. Após dezoito minutos de funcionamento da menor, o número de voltas da maior é:

(A)54 (B)36 (C)24 (D)18 (E)9

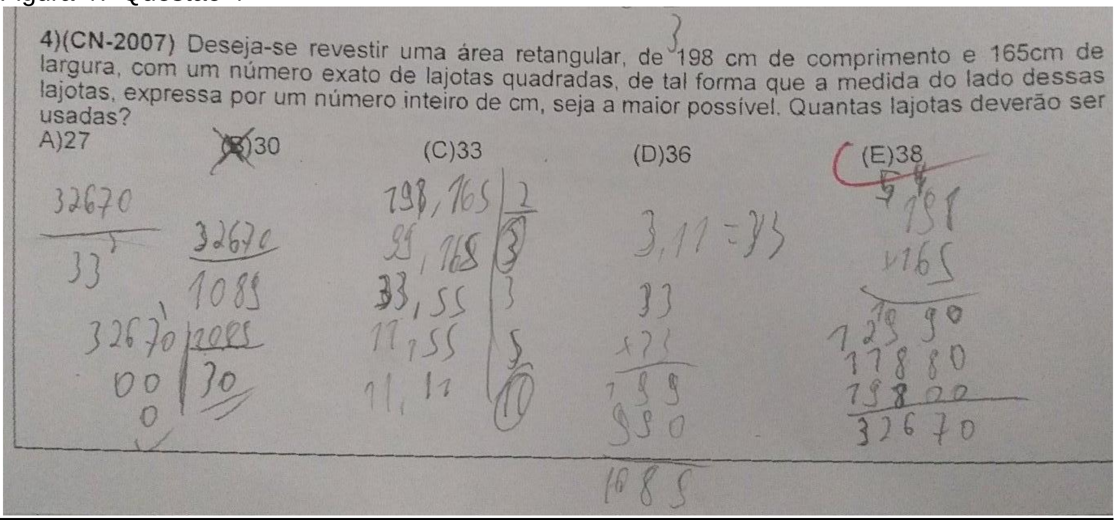
$18 \times 1 = 18$

Fonte: O Autor

Comentário: *O aluno observou que apesar do enunciado se referir ao tempo de funcionamento da menor, o mesmo se aplicava a maior, daí como a cada 1 minuto a maior percorre uma volta, logo a resposta era imediata, o cálculo servindo apenas para expressar o raciocínio.*

ALUNO 4

Figura 47-Questão 4


4)(CN-2007) Deseja-se revestir uma área retangular, de 198 cm de comprimento e 165cm de largura, com um número exato de lajotas quadradas, de tal forma que a medida do lado dessas lajotas, expressa por um número inteiro de cm, seja a maior possível. Quantas lajotas deverão ser usadas?

A)27 (B)30 (C)33 (D)36 (E)38

Fonte: O Autor

Comentário: *O aluno desenvolveu passo a passo toda solução da questão, primeiro achando o maior lado das lajotas, em seguida, calculando a área retangular e a área das lajotas quadradas, daí obtém o número de lajotas necessárias para revestir a área retangular, dividindo uma área pela outra.*

De modo geral, essa avaliação serviu para se ter um panorama geral da turma e, dessa forma, poder desenvolver um trabalho mais acertado com o perfil dos alunos. Sobre isso o PCN ainda afirma:

> A avaliação investigativa inicial instrumentalizará o professor para que possa pôr em prática seu planejamento de forma adequada às características de seus alunos. Esse é o momento em que o professor vai se informar sobre o que o aluno já sabe sobre determinado conteúdo para, a partir daí, estruturar sua programação, definindo os conteúdos e o nível de profundidade em que devem ser abordados. A avaliação inicial serve para o professor obter informações necessárias para propor atividades e gerar novos conhecimentos, assim como para o aluno tomar consciência do que já sabe e do que pode ainda aprender sobre um determinado conjunto de conteúdos. (PCN,1997,p.55)

Diante disso, não há duvida, de que essa prova foi de suma importância para conclusão do trabalho.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação que levou a confecção desse trabalho foi a necessidade de um material, que pudesse dar um suporte ao estudante que tenha a ambição de querer prestar concurso para o Colégio Naval, já que durante os dez anos de magistério, diversas vezes o autor se deparou com essa situação.

O objetivo geral de desenvolvimento desse trabalho necessitou de uma ampla pesquisa e estudo nos PCNs, livros didáticos escolares e os específicos para concursos militares, além de uma análise profunda nas provas anteriores que vai desde 1976 a 2018, para poder elaborar um material rico e bastante amplo, que dê um excelente suporte para um estudante que tenha objetivo de fazer o exame e, para o profissional da educação, que tenha se deparado com a problemática desse concurso ou queira se aperfeiçoar em conteúdo direcionado em grande parte ao ensino fundamental.

Os principais objetivos específicos concluídos com êxito estão comentados a seguir:

O Livro didático Bianchini foi detalhadamente analisado, utilizando como referencial os conteúdos abordados no concurso, daí foi dissertado, emitindo uma opinião do autor sobre sua qualidade, para uma suposta preparação para o exame e adicionado uma questão da prova anterior, ilustrando e corroborando com o ponto de vista ratificado.

Os conteúdos que não foram contemplados pelo livro didático, foram abordados no terceiro capítulo, com exemplos ilustrando sua aplicação, sendo um dos exemplos, questão que foi cobrada em exame anterior.

O último objetivo específico, efetuado com êxito, era resolver questões de alguns anos de seleções anteriores e também aplicar uma atividade em sala de aula, como amparo pedagógico para análise e estudos, que possam melhorar o ensino e abordagem didática em sala de aula.

De modo geral, esse trabalho será uma excelente ferramenta de apoio para estudantes e professores na jornada de desenvolvimento de competências e habilidades, que possa dar suporte nos seus objetivos. Servirá também, como material de auxílio para profissional da educação, fornecer aos seus alunos, que pretendam participar do processo seletivo do Colégio Naval.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI,E,.**Matemática Bianchini.**São Paulo:MODERNA.2015.6ºano

BIANCHINI,E,.**Matemática Bianchini.**São Paulo:MODERNA.2015.7ºano

BIANCHINI,E,.**Matemática Bianchini.**São Paulo:MODERNA.2015.8ºano

BIANCHINI,E,.**Matemática Bianchini.**São Paulo:MODERNA.2015.9ºano

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino** Fundamental. Ministério da Educação. Brasília: 1998.

CAMINHA, A.M.N. **GEOMETRIA**.Rio de Janeiro:SBM,2013.

CARLOS, J.A.L.**Praticando Aritmética.**Rio de Janeiro:issonnarte,2010.

CENTURIÓN,M.;JAKUBOVIC,J**,.Matemática na Medida Certa**.São Paulo:LEYA.2015.6ºano

CENTURIÓN,M.;JAKUBOVIC,J**,.Matemática na Medida Certa**.São Paulo:LEYA.2015.7ºano

CENTURIÓN,M.;JAKUBOVIC,J**,.Matemática na Medida Certa**.São Paulo:LEYA.2015.8ºano

CENTURIÓN,M.;JAKUBOVIC,J**,.Matemática na Medida Certa**.São Paulo:LEYA.2015.9ºano

GOMES,C.A.**Tópicos de Matemática IME-ITA-Olimpíadas.**Fortaleza:VestSeller,2010.v.1

GOMES,C.A.**Tópicos de Matemática IME-ITA-Olimpíadas.**Fortaleza:VestSeller,2010.v.2

OSVALDO, D.;NICOLAU,J.P.**Fundamentos da Matemática Elementar.**São Paulo:Saraiva,2011.v.9

OSVALDO, D.;NICOLAU,J.P.**Fundamentos da Matemática Elementar.**São Paulo:Saraiva,2011.v.1

RUFINO,M.O.;RODRIGO,M.R.P.**Coleção Elementos da Matemática.** Pará:VestSeller, 2010.v.1.

RUFINO,M.O.;RODRIGO,M.R.P.**Coleção Elementos da Matemática.** Pará:VestSeller, 2010.v.2

SOUZA,J.;PATARO,P,M,.**Vontade de Saber**.São Paulo:FTD.2015.6ºano

SOUZA,J.;PATARO,P,M,.**Vontade de Saber**.São Paulo:FTD.2015.7ºano

SOUZA,J.;PATARO,P,M,.**Vontade de Saber**.São Paulo:FTD.2015.8ºano

SOUZA,J.;PATARO,P,M,.**Vontade de Saber**.São Paulo:FTD.2015.9ºano

APÊNDICE A – PROVA DE DIAGNÓSTICO

PROVA ANTIGA DO COLEGIO NAVAL **PROF: FAGNER**

CIEP 026: SÃO VICENTE DE PAULA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Turma:________ **Aluno:**______________________________________

Data: / /2019

1)(CN-1987) Uma cafeteira elétrica tem, no recipiente onde se coloca a água, um mostrador indicando de 1 a 20 cafezinhos. O tempo gasto para fazer 18 cafezinhos é de 10 minutos, dos quais 1 minuto é o tempo gasto para aquecer a resistência. Qual o tempo gasto por essa mesma cafeteira para fazer 5 cafezinhos?
(A)3 min (B) Menos de 3 min (C) Entre 3min e 3,5 Min (D)3,5Min
(E)Mais de 3,5min

2)(CN-1997) Os ponteiros das horas, dos minutos e dos segundos de um relógio indicam zero hora. Até as 9 horas do mesmo dia, os ponteiros dos minutos e dos segundos terão se encontrado um número de vezes igual a:
(A)524 (B)531 (C)540 (D)573 (E)590

3)(CN-1998) Uma roda gigante tem uma engrenagem que é composta de duas catracas, que funcionam em sentidos contrários. Em um minuto, a menor dá três voltas completas enquanto a maior dá uma volta. Após dezoito minutos de funcionamento da menor, o número de voltas da maior é:
(A)54 (B)36 (C)24 (D)18 (E)9

4)(CN-2007) Deseja-se revestir uma área retangular, de 198 cm de comprimento e 165cm de largura, com um número exato de lajotas quadradas, de tal forma que a medida do lado dessas lajotas, expressa por um número inteiro de cm, seja a maior possível. Quantas lajotas deverão ser usadas?
A)27 (B)30 (C)33 (D)36 (E)38