UFRRJ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

Números complexos: desenvolvimento e aplicações

Ronaldo Rafael Guedes Junior

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

NÚMEROS COMPLEXOS: DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÕES

RONALDO RAFAEL GUEDES JUNIOR

Sob a Orientação da Professora
Eulina Coutinho Silva do Nascimento

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ
Agosto de 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

RONALDO RAFAEL GUEDES JUNIOR

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre,** no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 31/08/2016

Eulina Coutinho Silva do Nascimento. Dr.ª UFRRJ
(Orientadora)

Aline Mauricio Barbosa. Dr.ª UFRRJ

Agnaldo da Conceição Esquincalha. Dr. UERJ

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo apresentar um material voltado tanto para professores como para alunos de Ensino Médio, com vistas a ajudá-los a preencher algumas lacunas no ensino dos números complexos e em suas aplicações. O trabalho realizado se constitui em uma tentativa de despertar um maior interesse do aluno em relação à Matemática, especificamente, quanto aos números complexos, convergindo, então, para que esses façam suas próprias descobertas tornando e despertando a curiosidade dos mesmos para esta aprendizagem. A metodologia adotada para o estudo foi a revisão bibliográfica, através de livros, artigos e *sites* indexados à *internet*, destacada na explicação detalhada, minuciosa e exata da parte do conteúdo acerca dos números complexos.

Palavras-chave: Números complexos; Aplicações; Resolução de problemas.

ABSTRACT

This research aimed to present a material both for teachers and for high school students, who can help fill in some gaps in the teaching of complex numbers and its applications. The work constitutes an attempt to arouse greater interest of student in relation to mathematics, specifically, the complex numbers, converging, so these make your own discoveries making and arousing the curiosity of the same for this learning. The methodology adopted for the study was to review, through books, articles and internet sites indexed, highlighted in detailed explanation, thorough and accurate piece of content on the complex numbers.

Keywords: Complex numbers; Applications; Troubleshooting.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Comparação de notações..17
Figura 2 – Representação Trigonométrica..28
Figura 3 – Representação de um Par Ordenado..32
Figura 4 – Representação de um Número Complexo no Plano.................34
Figura 5 – Representação de Números Complexos Conjugados..............36
Figura 6 – Módulo e Argumento...37
Figura 7 – Multiplicação por **i**..49

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 8
2 AS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E AS QUANTIDADES SOFISTICADAS 12
3 DO DESCONFORTO À LEGITIMIDADE DOS NÚMEROS COMPLEXOS............21
4 CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS..31
4.1 Forma Algébrica dos Números Complexos..35
4.2 Aplicações da Representação Geométrica 37
4.2.1 Números complexos conjugados..37
4.2.2 Módulo ou norma de um número complexo..38
4.3 Quociente de dois Números Complexos...39
4.4 Potências de i 40
4.5 Forma Trigonométrica ou Polar dos Números Complexos 41
4.6 Operações na Forma Trigonométrica 42
4.6.1 Multiplicação 42
4.6.2 Divisão 42
4.6.3 Potenciação 43
4.6.4 Radiciação 44
4.6.5 Exercício 45
5 FORMA EXPONENCIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS E APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE SOMATÓRIOS 48
5.1 Aplicações da Forma Exponencial...49
5.1.1. Produto de números complexos na forma exponencial 49
5.1.2. Quociente de números complexos na forma exponencial 51
5.1.3 Potência de números complexos..51
5.1.4 Raízes N-ésimas da Unidade 51
5.2 Aplicações em Problemas de Somatórios..52
5.2.1 Exercícios resolvidos 55
CONSIDERAÇÕES FINAIS 61
REFERÊNCIAS 62

1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos, com a experiência adquirida ministrando aulas de matemática para turmas de ensino médio de instituições particulares e públicas, bem como cursinhos preparatórios, tanto na área civil quanto militar, percebemos certa deficiência por parte dos alunos em relação à identificação das conexões existentes entre os conceitos e definições matemáticas, principalmente no sentido de correlacionar assuntos teoricamente distintos.

Boa parte dos alunos que deixam o ensino médio leva consigo a impressão de que a matemática nada mais é do que um volume imenso de regras desconexas e sem sentido que eles devem decorar e, o que é mais grave, que eles são incapazes de aprendê-las. Isso pode ser explicado devido a uma exposição tradicional dos conteúdos, restringidas por um material didático limitado ou até mesmo por certo desconhecimento por parte dos professores (seja por uma possível deficiência na formação ou falta de um bom texto de referência para consulta). Isso gera um cenário de grande risco, motivo de grande preocupação por parte dos educadores, em especial, os da área de matemática.

Na apresentação da Segunda versão preliminar da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Ribeiro (2016, p. 116) afirma que “em uma sociedade cada vez mais baseada no desenvolvimento tecnológico, os conhecimentos matemáticos tornam-se imprescindíveis para as diversas ações humanas, das mais simples às mais complexas”.

Hoje em dia, verificamos um grande avanço no sentido da formulação de leis e estratégias que visam atender aos alunos com dificuldade de aprendizagem ou até mesmo desinteresse pelo estudo da matemática. Contudo, com o intuito de proporcionar aos professores e também aos alunos interessados em aprofundar os seus estudos em matemática de nível médio e a concorrer a vagas nos mais disputados concursos, bem como participação em olimpíadas de matemática, elaboramos um material que visa preencher algumas lacunas deixadas pelos tradicionais livros de ensino médio com relação a um dos assuntos que mais amedrontam alunos e professores: os números complexos.

Seja por uma infeliz escolha do nome (já que complexo nos remete a algo difícil) ou pelo fato de ser um dos últimos assuntos abordados nessa fase, acarretando assim pouco tempo para a exposição, os números complexos e principalmente suas aplicações, deixam de ser apresentados aos alunos de uma forma adequada, constituindo-se, assim, na visão dos estudantes, em mais uma ferramenta inventada para que equações algébricas tenham sempre solução.

É importante ressaltar que os números complexos não fazem parte da atual versão preliminar da Base Nacional Comum Curricular, para o ensino médio. Essa base curricular, como o próprio nome indica, representa um norteador para a organização dos conteúdos mínimos que devem ser trabalhados, como consta no documento de apresentação da BNCC:

> A base é a base. Ou, melhor dizendo: a Base Nacional Comum, prevista na Constituição para o ensino fundamental e ampliada, no Plano Nacional de Educação, para o ensino médio, é a base para a renovação e o aprimoramento da educação básica como um todo. (RIBEIRO, 2016, p. 2)

Porém, sendo essa base um indicador dos conteúdos mínimos que devem ser trabalhados, ela não impede que outros tópicos sejam abordados, possibilitando, assim, uma organização que permita aos alunos terem acesso a um conhecimento mais amplo. Nesse sentido, julgamos pertinente a escolha desse tema, por entender que ele representa um avanço na matemática aprendida no ensino médio, bem como um importante elemento para correlacionar assuntos tradicionalmente distintos, possibilitando, assim, aumento na capacidade de resolução de exercícios.

Tradicionalmente, em uma primeira aula sobre o assunto, os alunos são apresentados aos números complexos da seguinte forma: Um número complexo é todo número que pode ser escrito na forma $z = a + bi$, onde *a* e *b* são números reais e *i* é a unidade imaginária. O número real *a* é a parte real do número complexo z e o número real *b* é a parte imaginária do número complexo z, denotadas por: $a = Re(z)$ e $b = Im(z)$, onde são definidas a adição, a multiplicação e a igualdade (TOFFOLI; SODRÉ, 2005).

É fato que as definições acima permitem que o conceito de número complexo seja apresentado aos alunos como uma extensão do conjunto dos números reais, conjunto esse que norteia grande parte dos seus estudos em matemática. Porém, a simples descrição dessa unidade imaginária, representada por *i*, sem qualquer tipo de justificativa, dá a impressão de que o ponto alto desse avanço no conceito de número está vinculado à resolução de equações do segundo grau com discriminante negativo e que as operações definidas com esse novo tipo de número nada mais são do que regras estabelecidas para preservar as propriedades operacionais dos números reais.

Ao trabalhar como professor em cursos pré-militares, principalmente com turmas de preparação para vestibulares do IME e ITA, nos deparamos com alguns alunos que, ou não tinham tido contato com números complexos ou tinham sido apresentados de uma forma considerada “não ideal”. Uma vez que esse assunto é muito cobrado nesses concursos, decidimos elaborar um material que pudesse auxiliar alunos e professores interessados em se aprofundar no assunto.

Sendo assim, a questão que norteou esse trabalho foi: Como ensinar números complexos aos alunos do ensino médio utilizando, não só uma apresentação diferente da usual, como também incluindo técnicas mais sofisticadas como a forma exponencial? O objetivo desta dissertação é, portanto, apresentar um material tanto para professores como para alunos de Ensino Médio, que ajude a preencher algumas lacunas no ensino dos números complexos e suas aplicações. A metodologia adotada para o estudo foi a revisão bibliográfica, através de livros, artigos e *sites* indexados à *internet.*

O trabalho está dividido em 5 capítulos, sendo o capítulo 1 a introdução ao tema, onde consta a motivação e a questão norteadora do trabalho. No capítulo 2 falaremos sobre as Equações Algébricas e as quantidades sofisticadas. Para tanto, apresentaremos o desenvolvimento histórico do conceito de número complexo através do avanço das técnicas de resolução das equações algébricas.

No capítulo 3 apresentaremos a busca pela legitimidade dos Números Complexos. Somamos a isso, as contribuições de Jean-Robert Argand e Johann Carl Friedrich Gauss para uma interpretação geométrica e a identificação das operações com esses números, não no sentido quantificado, como ocorrem no conjunto dos números naturais, mas sim como operadores de transformações no plano.

No capítulo 4, o conjunto dos números complexos será apresentado, segundo as ideias de William Rowan Hamilton, como um conjunto de pares ordenados de números reais, para definirmos as formas algébrica e trigonométrica, bem como suas propriedades. Para apresentar uma relativa vantagem à apresentação operacional tradicional das formas algébrica e trigonométrica, apresentamos a forma exponencial de Euler como uma das maiores contribuições do trabalho.

No capítulo 5 apresentaremos as aplicações da forma exponencial. Nos concentraremos em mostrar como a Teoria dos Números Complexos pode ser utilizada como ferramenta para resolução de problemas com elevado grau de dificuldade envolvendo, essencialmente, somatórios. Para isso, utilizaremos alguns resultados conhecidos do Cálculo Diferencial, Teorema do Binômio de Newton, bem como Relações Trigonométricas.

Por fim, nos apoiaremos em alguns exercícios selecionados de alguns dos mais concorridos vestibulares do país, bem como de olimpíadas de matemática, nacionais ou internacionais, para mostrar, de uma forma prática, as aplicações das ideias desenvolvidas nesse trabalho.

2 AS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E AS QUANTIDADES SOFISTICADAS

Ao anunciarmos o início dos estudos sobre números complexos em sala de aula, somos naturalmente levados, com o objetivo de motivar e, talvez justificar a necessidade de tal tema, a apresentar a insuficiência dos números reais, mediante a radiciação, como o elemento motivador dessa nova teoria.

Mesmo que a essa altura, a resolução de equações quadráticas não seja nenhuma novidade para os estudantes, até esse ponto, toda a matemática estudada utilizava, no máximo, o conjunto dos números reais como universo, ou seja, as equações que apresentavam soluções envolvendo raízes quadradas de números negativos eram simplesmente classificadas como não possuindo solução.

As manipulações com as raízes quadradas de números negativos e, consequentemente o surgimento dos números complexos, estão intimamente relacionados aos avanços obtidos nas resoluções de equações algébricas de terceiro grau, e não de segundo grau, como naturalmente somos levados a apresentar aos nossos alunos.

Sendo assim, com o intuito de valorizar todo caminho que foi percorrido até aqui e acreditando que somente o reconhecimento dos esforços do passado podem nos dar uma real leitura do presente e, consequentemente um planejamento futuro, estudaremos aqui a história dos métodos de resolução das equações cúbicas, bem como os matemáticos que contribuíram para tal avanço, dando ênfase aos trabalhos desenvolvidos por Girolamo Cardano e Rafael Bombelli.

É muito importante ressaltar que o desenvolvimento dos números complexos não se deu a partir da necessidade de resolução de equações do segundo grau ou de qualquer outra. Era um fato bem comum e nem um pouco traumático, o reconhecimento, por parte dos matemáticos, de determinadas equações algébricas não possuírem solução. O elemento propulsor do desenvolvimento dessa teoria foi o fato de determinadas equações, de soluções válidas e conhecidas, quando desenvolvidas por métodos profícuos, permitirem o surgimento de raízes de números negativos, quantidades até então chamadas de inválidas.

Na verdade, o fato de determinadas equações não possuírem solução ou terem suas soluções descartadas não é um fato condicionado apenas às raízes quadradas de números negativos. As famosas e tão praticadas equações do segundo grau, por exemplo, são abordados ao longo da história da matemática desde a época dos egípcios, babilônios, gregos, hindus e chineses. Como os resultados obtidos nas resoluções eram geralmente interpretados geometricamente, não fazia nenhum sentido considerar, por exemplo, raízes negativas, sendo tais equações consideradas sem solução.

> O primeiro registro das equações polinomiais do 2°grau foi feita pelos babilônios. Eles tinham uma álgebra bem desenvolvida e resolviam equações de segundo grau por métodos semelhantes aos atuais ou pelo método de completar quadrados. Como as resoluções dos problemas eram interpretados geometricamente não fazia sentido falar em raízes negativas. O estudo de raízes negativas foi feito a partir do século XVIII (LUCHETA, 2008).

Podemos observar no trecho a seguir que, independente do avanço que as técnicas de resolução de equações quadráticas passavam, esses tipos de raízes continuavam sendo desprezados.

> Mesmo quando as equações quadráticas já eram resolvidas por métodos de solução por radicais, sempre que a fórmula levava a resultados associados a números negativos ou a raízes quadradas de números negativos, indicava-se a inexistência de soluções (PINTO JUNIOR, 2009, p.11).

Motta (2008 p. 92), afirma que historicamente as raízes quadradas de números negativos já se apresentavam aos matemáticos muito antes desse período. Data do século I d.C., decorrente de um problema geométrico, o primeiro contato de um matemático com tais raízes.

Herão de Alexandria, em sua obra "Esteriometria", ao estudar o volume de um tronco de pirâmide, no qual a base maior é um quadrado de lado *a*, sua base menor um quadrado de lado *b* e sua altura *h*, utiliza uma fórmula, que já era conhecida pelos egípcios:

$$V = \frac{1}{3}.h.(a^2 + ab + b^2)$$

Contudo, para determinar a altura do tronco de pirâmide, Herão deduziu a fórmula $h = \sqrt{c^2 - 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$, sendo c o comprimento da aresta lateral do tronco. Como os valores de *a, b* e *c* eram de fácil obtenção, por meio de medições diretas, a fórmula se mostrou bastante útil. Ao tentar obter a altura do tronco de uma pirâmide com os valores de *a, b* e *c*, respectivamente iguais a 28, 4 e 15, ele não percebeu que a medida 15 era insuficiente para "fechar" o tronco e obteve, através da fórmula $h = \sqrt{-63}$.

Pinto Junior (2009. p. 11-12) afirma que foi somente no período conhecido como Renascimento, que o problema de resolver equações cúbicas mostrou aos matemáticos da época a real necessidade de se reconhecer os números negativos e as raízes quadradas dos mesmos como números legítimos na matemática.

No mesmo texto, vimos que é verdade que, mesmo na antiguidade grega, já se encontravam registros de problemas que remetem a soluções de equações cúbicas. Nesse contexto, podemos citar o problema da duplicação do cubo, que consiste em encontrar duas médias proporcionais entre o comprimento da aresta de um cubo dado e o dobro da medida dessa aresta.

Ainda em Pinto Junior (2009, p. 12), percebemos que contribuições semelhantes também são encontradas nos trabalhos da matemática árabe. Data do século XI o famoso livro *Demonstrações de problemas de al-jabr de Almuqabala*, do matemático árabe Omar Khayan, onde, utilizando as chamadas cônicas de Apolônio, encontra soluções para diversos tipos de equações cúbicas.

Porém, é inegável a conotação geométrica das situações descritas anteriormente. Um significado mais geral, no sentido de buscar um método geral para resolver equações cúbicas só será alcançado no período Renascentista. Isso se dá mais precisamente com a matemática italiana do século XVI, onde, depois de séculos de buscas, os matemáticos conseguiram apresentar um método de resolução envolvendo radicais, semelhante ao das equações quadráticas.

Domingues (apud IEZZI, 2013 p. 98-99) afirma que até o final do século XV, a álgebra pouco evoluíra em relação ao conhecimento que egípcios e babilônios tinham sobre o assunto, 1.800 anos a.C. Todavia, na virada para o século XVI, um impulso foi dado no sentido de criações de técnicas, geralmente pautadas por meio de manipulações geométricas, capazes de resolver equações algébricas, principalmente as de grau três.

E é justamente nesse cenário que vamos "mergulhar" a partir de agora, para melhor compreender as grandes contribuições dadas, no período renascentista, quanto às manipulações com raízes quadradas de números negativos.

Em sua dissertação, Pinto Junior (2009, p.12-13) afirma que o mais rico trabalho matemático do século XV foi o *"Summa de Arithmética, Geometria, proportioni et proportionalita"* de Luca Pacioli. Nele, Luca Pacioli garante que a solução de uma equação cúbica era tão impossível quanto à quadratura do círculo. Tal afirmação foi, na época, de certa forma, interpretada de uma forma dupla. Do mesmo modo que acabou por distanciar alguns matemáticos do objetivo de conseguir tal solução, acabou por incentivar outros a focar ainda mais na busca por tal resultado.

Nesse sentido, destacamos a figura de Scipione Del Ferro que, indo na contramão das previsões de Luca Pacioli, acabou por resolver o caso especial da equação cúbica $x^3 + px = q$, com p e q positivos. Nesse período, configurado por um cenário de muito estudo e repleto de intrigas, a não publicação dos resultados de Scipione Del Ferro, que fez apenas uma simples apresentação particular, contribuiu bastante para o surgimento de uma das mais acirradas disputas matemáticas envolvendo resoluções de equações algébricas.

Domingues (In IEZZI, 2013, p.98-99) conta que Antonio Maria Fior, discípulo de Scipione Del Ferro desafiou publicamente Nicolo Fontana, mais conhecido por Tartaglia, propondo a resolução de algumas equações de terceiro grau. Para Tartaglia, a busca sobre soluções de equações cúbicas não representava novidade alguma, visto que anos antes, através de um amigo, já tinha tido contato com problemas do gênero.

Em 1535, Tartaglia, conseguiu encontrar a solução geral para equações do tipo $x^3 + px^2 = q$. Fior e Tartaglia disputavam entre si, com o objetivo de solucionar problemas matemáticos.

Tartaglia venceu a disputa, pois, além de resolver todos os problemas propostos por Fior, não teve seus problemas propostos resolvidos pelo oponente, uma vez que estes implicavam na resolução de equações do tipo $x^3 + px^2 = q$. (PINTO JUNIOR 2009, p.13)

Reza a lenda que, ao saber do duelo travado entre Fior e Tartaglia, Girolamo Cardano (1501-1576), reconhecido por suas contribuições em diversas áreas do conhecimento, incluindo, é claro, a matemática, solicita a Tartaglia à sonhada solução das cúbicas, com a intenção de publicá-la, com devido reconhecimento autoral, em sua obra *Pratica Arithmeticae (*1539). Infelizmente, para Cardano, Tartaglia acaba por recusar o convite, visto que tinha planos próprios de publicação.

Pinto Junior (2009) diz que, após muita insistência, Cardano consegue obter de Tartaglia a famosa fórmula e a publica em sua obra *Ars Magna* (1545). O *Ars Magna,* com considerável influência de algumas obras antecessoras, como o *Líber Abaci (1202)* de Leonardo de Pisa e do *Summa (1494) de* Luca Pacioli, simboliza uma nova etapa das publicações algébricas, visto que fornece as regras práticas de resolução de equações cúbicas por meio de radicais, de um modo semelhante ao que já era conhecido para as equações quadráticas.

Nesse ponto, vale a pena ressaltar que a publicação do resultado das cúbicas por parte de Cardano, mesmo atribuindo a devida menção de autoria a Tartaglia, gerou um grande conflito entre os dois, já que juntamente à referência ao autor, ele também menciona o fato de, independentemente, cerca de trinta anos antes, Scipione Del Ferro chegara aos mesmos resultados.

Todavia, mesmo que de uma forma injusta, a fórmula para resolução de equações de terceiro grau seja atribuída a Cardano, não podemos negar que um dos aspectos mais notáveis da obra, foi evidenciar a existência das chamadas quantidades "sofisticadas", termo utilizado para referenciar as raízes quadradas de números negativos.

Em Domingues (In IEZZI, 2013 p.50), vemos que Cardano é reconhecidamente o primeiro matemático a operar com raízes de números negativos, pois apresentou um comportamento distinto de seus antecessores com relação ao surgimento dessas quantidades “sofisticadas” ao longo dos processos de resolução das equações. Ao invés de ignorá-las, como era comum, ele criou exemplos com a intenção de dar significado à importância de se trabalhar com elas.

Ele já tinha apresentado, através de processos de multiplicação, 5+$\sqrt{-15}$ e 5-$\sqrt{-15}$ como raízes da equação x^2 + 40 = 10x, equação essa obtida do problema de dividir o número 10 em duas partes cujo produto é 40 quando, ao utilizar a chamada “Fórmula de Cardano” para Resoluções de Equações da forma x^3 + mx = n, fórmula essa, que em notação moderna, podemos representar por

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{m^3}{27} + \frac{n^2}{4}} + \frac{n}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{m^3}{27} + \frac{n^2}{4}} - \frac{n}{2}}$$

não conseguiu transformar a expressão $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ no número 4, que já se sabia ser uma solução da equação $x^3 = 15x + 4$.

Podemos dizer que a partir desse fato, tornou-se necessário uma investigação mais profunda a respeito dessas “quantidades sofisticadas”. Sendo 4 uma raiz legítima e a fórmula de Cardano profícua, algum elemento desconhecido deveria existir nesse desenvolvimento. Esse pensamento gerou uma motivação extra e intensificou as pesquisas a respeito do significado de tais números, diferentemente do que acontecia quando esses elementos apareciam como raízes de equações, que eram simplesmente ditas sem solução.

Em Pinto Junior (2009, p14) temos que a atenção dada por Cardano a essas quantidades, aliada ao método de solução de equações cúbicas através de radicais, dá origem a um processo longo e de extrema importância na história da matemática. A partir deste momento, uma nova questão vai alimentar o pensamento matemático: como justificar a possibilidade de efetuarmos cálculos e admitirmos soluções envolvendo raízes quadradas de números negativos?

Domingues (apud IEZZI, 2013, p 55) afirma que quem muito contribuiu para tirar a matemática desse impasse foi o matemático Bolonhês Rafael Bombelli (1530-1579). Utilizando as relações $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}$, ele conseguiu concluir a tarefa de Cardano e, para essa famosa equação, obteve *a* = 2, *b* = 1 e daí, *x* = 4.

Contudo, Bombelli não se limitou a tal resolução. Em sua obra *L'algebra* (1572), temos a primeira tentativa de apresentação para uma teoria dos números complexa bem estruturada. Diferentemente da maioria dos seus contemporâneos, Bombelli não estrutura sua obra em problemas de cunho prático e, a grande influência de Diofanto nos problemas propostos, bem como a tentativa de dar um caráter mais abstrato às interpretações, indica um interesse em generalizar os casos que estudava, elevando, assim, a matemática a um nível superior.

Também podemos destacar, como contribuição de Bombelli, a linguagem simbólica que ele utiliza. Sua notação algébrica foi, gradativamente, substituindo as abordagens retóricas de seus antecessores. Ele utilizou *R.q.* para denotar raiz quadrada e *R.c. para raízes cúbicas*. Para expressões mais longas, utilizou o símbolo $\lfloor \quad \rfloor$, utilizando, assim, por exemplo, *R.c.* $\lfloor 2pR.q.21 \rfloor$, para representar o que hoje chamamos $\sqrt[3]{2+\sqrt{21}}$.

Na figura 1, apresentamos um quadro demonstrativo que relaciona alguns exemplos da linguagem simbólica utilizada por Bombelli, com a linguagem adotada atualmente.

Figura 1 – Comparações de Notações

Notação moderna	Publicada por Bombelli	Escrita por Bombelli
5x	$\overset{\underset{\smile}{1}}{5}$	$\overset{\underset{\smile}{1}}{5}$
$5x^2$	$\overset{\underset{\smile}{2}}{5}$	$\overset{\underset{\smile}{2}}{5}$
$\sqrt{4+\sqrt{6}}$	Rq⌊4pRq6⌋	R⌊4pR6⌋
$\sqrt[3]{2+\sqrt{0-121}}$	Rc⌊2pRq⌊0m121⌋⌋	R^3⌊2pR⌊0m121⌋⌋

Fonte: www.somatematica.com.br/biograf/bombelli.php

Do ponto de vista das raízes quadradas de números negativos, ele não só reconhece a existência, indicando-as como expressões mais “sofisticadas” que reais, como também apresenta algumas definições elementares e regras para operar com elas.

Segundo Pinto Junior (2009), consta na página 133 de L’Algebra, o seguinte trecho:

> Encontrei um outro tipo de raiz cúbica composta muito diferente das outras, que nasce no capítulo do “cubo igual a tanto e número”, quando o cubo da terça parte do tanto é maior que o quadrado da metade do número, como nesse capítulo se demonstrará, (…) porque quando o cubo do terço do tanto é maior que o quadrado da metade do número, o excesso não se pode chamar nem mais nem menos, pelo que lhe chamarei de pìu di meno, quando se adicionar e meno di meno quando se subtrair. (…) E esta operação é necessária (…) pois são muitos os casos de adicionar onde s urge esta raiz, (…) que poderá parecer a muitos mais sofisticada que real, tendo eu também essa opinião, até ter encontrado a sua demonstração em linha (…) mas primeiro tratarei de os multiplicar, escrevendo a regra de mais e de menos.

Em seguida, Bombelli enuncia as regras de multiplicação, que citamos abaixo.

> Più via più di meno, fà più di meno
> Meno via più di meno, fà meno di meno
> Più via meno di meno, fà meno di meno
> Meno via meno di meno, fà più di meno
> Più di meno via più di meno, fà meno
> Più di meno via meno di meno, fà più
> Meno di meno via più di meno, fà più
> Meno di meno via meno di meno, fà meno.
> (BOMBELLI, apud PINTO JÚNIOR, 2009, p.25)

Hoje em dia, muitos historiadores da matemática afirmam que *più*, *meno*, *meno di meno* e *più di meno* são respectivamente 1, -1, -i e i. Mesmo que tal afirmação seja um tanto quanto perigosa, as regras apresentadas por Bombelli, que também são válidas para os números reais, representaram um grande avanço no sentido de legitimar as raízes quadradas de números negativos na matemática, possibilitando, assim, que matemáticos posteriores tivessem um contato bem estruturado com essas quantidades, que já se encontravam munido de operações e propriedades específicas.

Mesmo com todas as contribuições, principalmente da matemática italiana, no sentido tentar eliminar parte das características místicas que envolviam as raízes quadradas de números negativos, no fim do século XV, trabalhar com essas quantidades, ainda causava certo incômodo. Seguindo adiante na tentativa de dar uma identidade matemática a esses elementos, mostraremos nos próximos capítulos como os matemáticos dos séculos posteriores contribuíram nessa caminhada, até que a missão fosse concluída, principalmente graças aos trabalhos de matemáticos como Argand, Gauss e Hamilton.

3 DO DESCONFORTO À LEGITIMIDADE DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Durante a pesquisa para a realização desse trabalho, duas fontes serviram de base teórica para a elaboração desse capítulo. São elas: Pinto Junior (2009) e Silva (2011). Grande parte da história do desenvolvimento dos números complexos apresentada neste trabalho foi resgatada através desses dois autores, conforme veremos a seguir. A caminhada pela busca de um significado para as chamadas quantidades “sofisticadas” chega em um período de intensa produção matemática.

Entre o fim do século XVI e início do século XVII, os avanços no campo da álgebra eram bem significativos, muito em parte à assimilação do trabalho realizado pelos árabes. Graças aos trabalhos de Scipione Del Ferro, Cardano e Tartaglia, mesmo com todas as polêmicas já citadas, a resolução de equações do terceiro grau já era dominada pelos matemáticos. Até mesmo a resolução das equações algébricas de quarto grau já era conhecida e, dessa vez, quando da publicação no próprio Ars Magna de Cardano, foi devidamente reconhecida como um trabalho de Ludovico Ferrari (1522-1560), discípulo de Cardano, que não só resolveu a equação $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$, proposta por seu mestre, como obteve uma fórmula geral para resolução de equações desse tipo.

Com a disponibilidade desses consideráveis resultados, mais uma geração de matemáticos contribuiu de maneira significativa, nesse período que marca a transição entre o Renascimento e a Modernidade. Dentre eles, podemos citar os trabalhos de Harriot, Girard e Descartes, que mesmo não admitindo ou, em alguns casos, apresentando certa relutância quanto à existência de raízes negativas ou “imaginárias”, muito contribuíram para os avanços do desenvolvimento dos, agora, também chamados, números impossíveis.

Posteriormente, citaremos as contribuições de Jonhn Wallis, Gottfried Wilhelm Von Leibniz, que, por exemplo, utilizou as raízes quadradas de números negativos em processos de fatoração, e Abraham de Moivre, no sentido da tentativa de dar uma interpretação geométrica aos números complexos.

Hoje em dia, não encontramos dificuldades em relacionar as quantidades imaginárias com relações trigonométricas, já que a representação geométrica destas quantidades já nos é familiar. Entretanto, historicamente, a relação das quantidades imaginárias com as relações trigonométricas não passou pela representação geométrica dos números imaginários, veremos que boa parte dessas relações é devida aos trabalhos de Euller e D'Alembert e que a caracterização geométrica, propriamente dita só foi desenvolvida no século XIX, nos trabalhos posteriores de Argand e de Gauss.

A partir de agora, com o intuito de referenciarmos parte das contribuições dos matemáticos acima citados, apresentaremos suscintamente algumas características de suas obras, tendo como base teórica o trabalho de Pinto Junior (2009). Para tanto, iniciaremos com Thomas Harriot.

Thomas Harriot foi considerado um dos pais da Análise Matemática. Ele é responsável por evidenciar a importância da natureza e da formação das equações, transformando o modo tradicional de lidar com as equações e apresentando um processo que conduz a uma forma canônica.

Mesmo não tendo admitido raízes negativas como soluções das equações, o mesmo valendo para os números "sofisticados", suas equações canônicas serviram como modelos para determinar o número de raízes de equações de terceiro e quarto graus (nos casos particulares em que todas são estritamente positivas). Este fato já seria suficiente para ressaltar a importância da sua contribuição dele para a matemática.

Albert Girard foi um pouco além de Harriot no que diz respeito à legitimação das raízes de números impossíveis, visto que em seu livro *"Invention nouvelle em l'algèbre"*, publicado em 1629, ele admite, em diversos resultados, a existência de raízes negativas para equações.

Podemos dizer que Girard foi fortemente influenciado por outros matemáticos como Chuquet e Bombelli. Sua representação por apontar uma raiz permanece até os dias atuais. No sentido da pesquisa sobre as quantidades de raízes de uma equação algébrica, podemos dizer que apresentou um enunciado para o teorema fundamental da álgebra, sendo, portanto, muito mais considerável suas contribuições em relação à compreensão das quantidades negativas e “inexplicáveis”.

René Descartes (1596-1650), filósofo, matemático e físico deve ser considerado um gênio da Matemática, pois relacionou a Álgebra com a Geometria, o resultado desse estudo foi a criação do Plano Cartesiano. Essa fusão resultou na Geometria Analítica. Descartes obteve grande destaque nos ramos da Filosofia e da Física, sendo considerada peça fundamental na Revolução Científica, por várias vezes foi chamado de pai da Matemática moderna. Ele defendia que a Matemática dispunha de conhecimentos técnicos para a evolução de qualquer área de conhecimento.

Sob forte influência da geometria euclidiana, verificamos que, em sua obra, uma característica marcante é a utilização de figuras como auxílio para a resolução de equações e, ao determinar o lugar geométrico que representa os valores das raízes, ele não garante a existência das raízes “imaginárias”. Por exemplo, em um problema prático de análise de curvas quando o círculo não corta e nem toca uma reta, o problema algébrico é traduzido por uma impossibilidade geométrica.

Ao estudar a natureza das equações, Descartes analisa a questão da existência e do número de raízes de uma equação qualquer, fornecendo o seguinte comentário:

> Qualquer equação pode ter tantas raízes distintas (valores das quantidades desconhecidas) quanto o número de dimensões da quantidade desconhecida na equação. Suponhamos, por exemplo, $x = 2$ ou $x - 2 = 0$, e novamente, $x = 3$ ou $x - 3 = 0$. Multiplicando as equações $x - 2 = 0$ e $x - 3 = 0$, temos $x^2 - 5x + 6 = 0$ ou $x^2 = 5x - 6$. Esta é uma equação em que x tem valor 2 e ao mesmo tempo tem valor 3. Se nós após, fizermos $x - 4 = 0$ e multiplicarmos por $x^2 - 5x + 6 = 0$, teremos $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, uma outra equação, em que x , tendo três dimensões, terá também três valores que são 2, 3 e 4. (DESCARTES, 1954, p.15, apud PINTO JUNIOR, 2009, p. 38).

Essa associação entre o número de raízes e a dimensão do termo desconhecido, analisada por Descartes, pode ser encarada como uma espécie de antecipação do que hoje conhecemos como Teorema fundamental da Álgebra.

É característica do trabalho de Descartes uma distinção entre os tipos de raízes encontradas nas soluções de uma equação algébrica. Ao longo de sua obra, ele afirma que, muitas vezes, algumas raízes são falsas ou menos que nada. Deste modo, quando considera que x representa a quantidade 5 subtraída de nada (o que hoje representamos por -5), conclui que $x + 5 = 0$, resultado que, multiplicado por $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, resulta em $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$. Ele conclui então que esta equação possui quatro raízes, das quais 2, 3 e 4 são as verdadeiras e 5 é a falsa.

Descartes afirma ainda que é possível diminuir o número de dimensões de uma equação se conhecemos uma de suas raízes, bastando dividi-la pelo binômio $x - a$, em que x representa a quantidade desconhecida e a, a raiz conhecida. Trata-se de uma generalização de um fato já conhecido no Renascimento e frequentemente aplicado à resolução da cúbica, como objetivo de reduzi-la a uma equação quadrática.

Nesse trabalho, ele ainda faz referência ao importante fato de podermos determinar a quantidade de raízes verdadeiras e falsas de qualquer equação, bastando, para isso, analisar as alternâncias dos sinais dos coeficientes que aparecem nas equações.

No que tange as raízes quadradas de números negativos, Descartes faz a seguinte referência às, por ele, chamadas raízes imaginárias:

> Nem todas as raízes verdadeiras e nem as falsas são sempre reais; às vezes elas são imaginárias; ou seja, enquanto nós podemos sempre conceber a quantidade de raízes de uma equação como eu tinha atribuído, ainda assim nem sempre existe uma quantidade definida que corresponda a cada raiz obtida. Logo, mesmo concebendo que a equação $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ tenha três raízes, ainda que só exista uma raiz real, 2, as outras duas, embora nós possamos somá-las, diminuí-las ou multiplicá-las de acordo com as regras estabelecidas, permanecerão sempre imaginárias. (DESCARTES, 1954, p.15 apud PINTO JUNIOR, 2009, p. 41).

Em outro momento, devido a uma impossibilidade de representação geométrica para as equações, ele faz uma menção às equações cúbicas e ao método de Cardano:

> Além disso, deveria ser comentado que este método de expressar as raízes através de relações com os lados de certos cubos cujos

> conteúdos sejam conhecidos não é mais claro ou mais simples que o método de expressá-las por meio de relações envolvendo arcos ou porções de círculo, quando seu triplo é conhecido. E as raízes das equações cúbicas que não podem ser resolvidas pelo método de Cardano podem ser expressas tão claramente quanto qualquer outra. (DESCARTES, 1954, p.15 apud PINTO JUNIOR, 2009. P. 41);

Mesmo com as consideráveis contribuições acima citadas, podemos dizer que, efetivamente, a chama acesa por Bombelli, quanto à natureza das raízes quadradas de números negativos foi reacesa por um trabalho caracterizado pela tentativa de dar uma legitimação para os números complexos através de uma interpretação geométrica.

Ao publicar um tratado intitulado *Álgebra,* John Wallis (1616–1703), professor da Universidade de Oxford, além de admitir uma construção geométrica para as raízes imaginárias, discutiu a impossibilidade da existência de quantidades imaginárias e comparou essa questão com a da existência de quantidades negativas:

> Essas quantidades imaginárias (como são frequentemente chamadas) surgem das supostas raízes de um quadrado negativo (quando aparecem) e se considera que implicam que o caso proposto é impossível.
> E assim é, de fato, no sentido escrito do que foi proposto. Pois não é possível que qualquer número (negativo ou afirmativo), multiplicado por si mesmo, possa produzir (por exemplo) – 4. Pois sinais iguais (tanto + quanto –) produzirão +; e, portanto não – 4 (MILIES, 1993, p.10 apud SILVA, 2011, p. 86).

Com o objetivo de conseguir uma explicação concreta para as raízes quadradas de números negativos, ele publicou uma interessante interpretação envolvendo áreas:

> Suponhamos que num local ganhamos do mar 30 acres, mas perdemos em outro local 20 acres: se agora formos perguntados quantos acres ganhamos ao todo, a resposta é 10 acres, ou +10 (pois 30 – 20 = 10). [...] Mas se num terceiro local perdemos mais 20 acres, a resposta deve ser –10 (pois 30 – 20 – 20 = –10). [..] .Mas agora, supondo que esta planície negativa de – 1600 square perches [20 acres correspondem a 1600 square perches, uma outra medida inglesa da época] tem a forma de um quadrado, não devemos supor que este quadrado tem um lado? E, assim, qual será esse lado? Não podemos dizer que é 40, nem – 40.... Mas sim que é $\sqrt{-1600}$(a suposta raiz de um quadrado negativo)ou $10\sqrt{-16}$ ou $20\sqrt{-4}$ ou $40\sqrt{-1}$. (MILIES, 1993, p.10 apud SILVA, 2011 p. 86).

Enquanto produzia pesquisas sobre o campo que hoje chamamos de cálculo diferencial e integral, quase que ao mesmo tempo em que Wallis, Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), também contribuía no campo dos números complexos.

> Como exemplo, podemos citar a fatoração realizada por ele, da expressão $x^4 + a^4$ em $\left(x + a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)$ e a demonstração de uma decomposição imaginária de um número real positivo que surpreendeu a todos: $\sqrt{6} = \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}}$. No entanto, Leibniz não escreveu as raízes quadradas de números complexos na forma complexa padrão, nem conseguiu provar sua conjectura que $f\left(x + \sqrt{-1}y\right) + f\left(x - \sqrt{-1}y\right)$ é real se $f(z)$ é um polinômio real. .(MILIES, 1993, p.10 apud SILVA, 2011, p. 87.)

Quando se faz qualquer referência ao estudo dos números complexos, um dos nomes mais difundidos é o de Abraham de Moivre. Devemos a ele fórmula que leva seu nome e resolve brilhantemente, uma importante questão do estudo das funções trigonométricas, a saber, o problema da multiplicação dos arcos circulares.

> Foi a partir de 1706 que de Moivre conseguiu estabelecer uma ligação entre as expressões gerais, que faziam parte de sua proposta, e a divisão de um arco de círculo. Ele demonstra que estas expressões estão relacionadas à divisão de um arco de círculo em *n* partes iguais.(PINTO JUNIOR, 2009 p.47)

Destacamos que as famosas fórmulas de De Moivre serão apresentadas no próximo capítulo. Seguimos então que na transição do século XVII para o XVIII, entram em cena dois grandes matemáticos que muito contribuíram tanto para a matemática de um modo geral, quanto para a consolidação dos números complexos. Leonhard Euler (1707–1783) e Jean Le Rond D'Alembert (1717–1783) possuem histórias marcadas por coincidências que vão muito além do ano de suas mortes e da paixão pela matemática.

Euler foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos, contribuindo com cerca de 900 tratados, livros e estudos, conforme apresenta a citação a seguir :

> Para que se tenha ideia do volume e da velocidade de sua produção, conta-se que, após a sua morte, o jornal da Academia de Ciências de São Petersburgo, onde ele trabalhou por mais de três décadas, ainda demorou 48 anos para publicar o que havia se acumulado de seus apontamentos. Entre muitos outros trabalhos, Euler foi o primeiro matemático a criar fundamentação sólida para a teoria dos números complexos. (PINTO JUNIOR, 2011, p. 87).

Segundo Silva (2011, p.87) Euler, conhecido como o maior criador de simbologia matemática de todos os tempos, utilizou o símbolo *i* para $\sqrt{-1}$, embora essa notação fosse utilizada por ele somente no final de sua vida, em 1777.

Podemos dizer que a existência de raízes no campo complexo ficou definitivamente estabelecida em 1748, quando Euler demonstrou que $(cos\emptyset + isen\emptyset)^n = \left(cos(n\emptyset) + isen(n\emptyset)\right)$, conhecida como fórmula de *De Moivre*, embora o próprio Abraham De Moivre (1667 –1754) tenha se limitado a casos particulares e nunca chegou a enunciar ou demonstrar a fórmula no caso geral.

Silva (2011, p.88) ainda relata que Euler fez mais que demonstrar a conjectura de De Moivre para *n* inteiro, ele provou que a igualdade é válida para todo *n* real! Daremos uma especial importância, à formula de Euler, que fornece uma representação exponencial dos números complexos, e consequentemente apresenta uma série de vantagens quanto a simplificação nas demonstrações de propriedades que são apresentadas aos alunos do ensino médio, no capítulo 4 deste trabalho.

D'Alembert foi o primeiro grande matemático francês da era que sucedeu eminentes gênios que contribuíram para o cálculo, como Newton e Leibniz. Filho ilegítimo da marquesa de Tencim com o general Destouches, ele foi abandonado recém-nascido na porta da igreja de *Saint Jean le Rond*, em Paris. Seu pai deixou-lhe uma quantia suficiente para custear seus estudos, após sua morte em 1726. Esse investimento não poderia ser mais bem empregado, pois aos 12 anos, D'Alembert entrou no Collège Mazarin, onde teve como mestre o famoso professor Pierre Varignon (1654–1722), conhecido por divulgar o novo cálculo que nascia e por tentar várias vezes, embora em vão, uma conciliação entre Newton e Leibniz, após as acirradas discussões sobre a paternidade desses novos e históricos resultados matemáticos.

D'Alembert e Euler trocaram correspondências sobre vários assuntos, dentre os quais podemos citar os enunciados que envolviam logaritmos de números negativos, que vinham intrigando os maiores matemáticos do início do século XVIII.

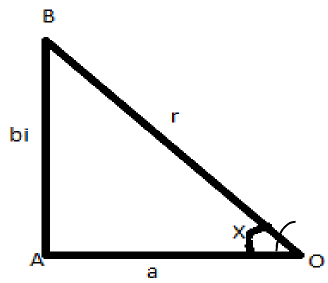
> Em 1747 Euler escreve a D'Alembert explicando que os logaritmos dos números negativos não são reais, como D'Alembert acreditava, mas imaginários puros. A expressão "imaginário puro" já fazia sentido naquela época, pois os termos real e imaginário foram empregados pela primeira vez por René Descartes, em 1637, e o próprio D'Alembert, em 1747, publicou *Refléxions sur la cause générale des vents*, em que afirmou que toda expressão construída algebricamente a partir de um número complexo é da forma $a + b\sqrt{-1}$. (SILVA, 2011. p. 87).

Não há dúvidas quanto à contribuição de todos esses matemáticos citados na busca pela legitimidade dos números complexos na matemática. No seu livro Fundamentos de Matemática elementar, Domingues (In IEZZI (2013, p.51-52) mostra que mesmo assim, os números complexos continuaram sendo vistos sob uma ótica de muito mistério, até a virada do século XVIII para o século XIX). Foi através, principalmente dos trabalhos de Jean-Robert Argand e K. F. Gauss, ao descobrirem, independentemente, que esses números possuem uma representação geométrica, que os números complexos adquiriram certa legitimidade. Enquanto Gauss imaginava essa representação por meio de pontos de um plano, Argand usava segmentos de reta orientados, ou vetores coplanares.

Ambos perceberam que, mais do que representar pontos ou vetores, os números complexos podiam ser utilizados para operar algebricamente com eles, ou seja, os números complexos constituíam a álgebra dos vetores do plano. Hoje em dia, o plano utilizado para representar os números complexos é chamado de plano de Argand – Gauss, mesmo que a representação utilizada se aproxime bem mais do trabalho de Argand, que ao trabalhar com a correspondência entre segmentos perpendiculares contidos em um círculo, introduziu a noção de rotação aos números complexos.

Segundo ele, um número complexo que hoje em dia representamos por a + bi, nada mais era do que uma combinação geométrica dos segmentos perpendiculares OA, representando a e AB, representando bi. Veja a figura 2.

Figura 2 – Representação Trigonométrica



Fonte: Iezzi, 2013, p. 51

Essa representação permitia, por exemplo, uma representação auxiliar para esses números, a chamada forma trigonométrica dos números complexos.

$$a + bi = r.[\cos(x) + i.sen(x)]$$

Algebricamente, porém, um importante ponto ainda precisava ser esclarecido. Como compreender uma soma do tipo $a + bi$, sendo que as parcelas a e bi se apresentavam como entes de espécies diferentes?

Segundo Domingues (apud IEZZI, 2013. p. 52), quem se encarregou dessa missão foi o matemático irlandês William Rowan Hamilton, que em um artigo de 1833 apresentou à Academia Irlandesa a estrutura da álgebra formal dos números complexos. Segundo sua ideia básica, esses números passavam a ser encarados como pares ordenados, onde as componentes eram números reais, e que eram operados da seguinte forma:

I. Igualdade

$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = b \; e \; c = d$

II. Adição

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

III. Multiplicação

$(a, b) \,.\, (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

De acordo com as ideias de Hamilton, um par ordenado da forma $(a,\ 0)$ equivale ao número real a. Em particular, o par ordenado $(-1{,}0)$ é identificado com o número real -1.

Assim sendo, fazendo $i = (0{,}1)$, ou equivalentemente, $i^2 = (0{,}1) \,.\, (0{,}1) = (-1,\ 0) = -1$, conseguiu-se, enfim, uma explicação lógica para a $\sqrt{-1}$.

4 CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo apresentaremos o conjunto dos números complexos bem como suas definições, operações e propriedades. Para tanto, utilizaremos a fundamentação dos pares ordenados de Hamilton, pois entendemos que ela, ao fornecer mecanismos que possibilitam justificativas aos elementos apresentados, utilizando, para isso, ferramentas familiares aos alunos, representa a melhor maneira para essa exposição inicial.

É verdade que a ideia de multiplicação de pares ordenados pode gerar, em um primeiro momento, certo desconforto aos estudantes. Contudo, tomaremos o cuidado de mostrar que, tão logo apresentemos a forma algébrica de representação dos números complexos, eles serão capazes de realizar tais multiplicações, de uma forma bem mais simples, utilizando, para isso, a tão conhecida propriedade distributiva.

Nas justificativas das propriedades apresentadas, principalmente no que tange à forma trigonométrica ou polar de representação dos números complexos, utilizaremos fortemente os conceitos da trigonometria, os quais se espera que sejam familiares ao leitor. Além de mostrar certa aplicação para o assunto já estudado, optamos por fazê-lo com a intenção de mostrar como alguns assuntos em matemática, que podem se apresentar distintos em um primeiro momento, na verdade estão fortemente relacionados. Mostraremos também as vantagens da forma exponencial de representação dos números complexos, no sentido de uma maior praticidade para realizar tais justificativas.

Sendo assim, chamamos conjunto dos números complexos, ao conjunto definido por:

$\mathrm{C} = \{(x, y)/\ x \in \mathrm{R}\ e\ y \in \mathrm{R}\}$, com as seguintes definições:

1) Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = b\ e\ \ c = d$
2) Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$
3) Multiplicação: $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

$$z \in C \Leftrightarrow z = (a, b), onde\ a \in \mathrm{R\ e\ b} \in \mathrm{R}$$

Ex: Dados $z_1 = (2,1)\ e\ z_2 = (3,0)$, temos:

$z_1 + z_2 = (2,1) + (3,0) = (2 + 3; 1 + 0) = (5,1)$

$z_1 \cdot z_2 = (2,1) \cdot (3,0) = (2 \cdot 3 - 1 \cdot 0; 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3) = (6,3)$

Com isso, podemos dizer que um número complexo é identificado como um par ordenado de números reais.

Dentre todos os pares ordenados de números reais que podemos considerar, chamam atenção especial os pares ordenados que possuem segunda componente nula, ou seja, os pares da forma $(x, 0),\ x \in R$.

Relativamente às definições acima, podemos tirar algumas conclusões importantes sobre esses pares ordenados. São elas:

1) Igualdade: $(x, 0) = (y, 0) \Leftrightarrow x = y$

2) Adição : $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0 + 0) = (x + y, 0)$

3) Multiplicação: $(x, 0).(y, 0) = (xy - 0.0; x.0 + 0.y) = (xy, 0)$

Sendo assim, observamos que esses números complexos, quanto à relação de igualdade e quanto às operações de adição e de multiplicação definidas, se comportam como números reais, ou seja, é natural que se faça a seguinte identidade:

$$(x, 0) = x, \forall\ x \in R$$

De acordo com essa identidade, podemos concluir que todo número real é um número complexo de segunda componente nula, ou seja, o conjunto de números reais representa uma parte ou subconjunto do conjunto dos números complexos:

$$R \subset C$$

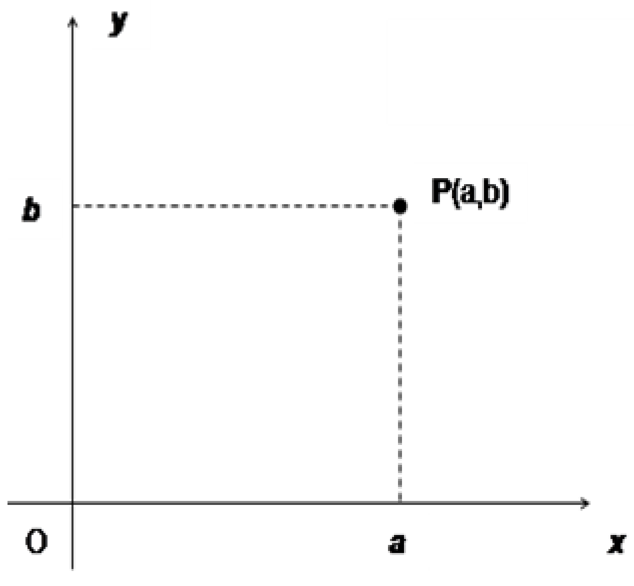
Essa relação de inclusão nos garante que todas as propriedades operatórias envolvendo números reais também são verificadas em C. Sendo assim, utilizaremos as conhecidas propriedades operatórias dos números reais para trabalharmos números complexos.

A caracterização de um número complexo por um par ordenado de números reais se mostra bastante útil no sentido da criação de uma representação geométrica para tal conjunto.

Devido a uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta, sabemos que o conjunto R é representado geometricamente por uma reta orientada, chamada eixo real. De forma bem natural, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de C e os pontos de um plano. Essa correspondência, que permite associar a cada ponto do plano, um único número complexo, e reciprocamente, permite a útil representação geométrica do conjunto dos números complexos.

Nesse sentido cada ponto pertencente ao denominado "plano complexo" ou plano de Argand-Gauss, que é formado por dois eixos perpendiculares, é chamado de *afixo* ou *imagem geométrica* do número complexo.

Figura 3 – Representação de um Par Ordenado no Plano



Fonte: http://www.eumed.net/libros-gratis/2013a/1317/representacion.html

Como sabemos, o conjunto dos números reais apresenta uma insuficiência quanto às operações de radiciação. Com efeito, não existe, em R, um número que represente o resultado de um processo de radiciação onde o radicando é negativo e o índice da raiz é par. Uma vez que o conjunto dos números complexos, como já mostramos, contém o conjunto dos números reais, é natural esperar que essa insuficiência seja sanada em $\mathbb{C}$.

Para tanto, considere os números complexos que possuem a primeira componente nula, ou seja, os números da forma $(0, y), y \in R$, e, vejamos como eles se comportam mediante a operação de multiplicação, definida acima:

$$(0, y).(0, y) = (0.0 - y.y;\ 0.y + y.0) = (-y^2, 0) = -y^2 \in R$$

Sendo $y \in R - \{0\}$, temos que - $y^2 <$ 0, ou seja, o conjunto dos números complexos apresenta um "tipo de elemento" que possui a caracteristica do seu quadrado resultar em um número real negativo,$(0, y).(0, y) = -y^2 \in R$, sanando assim, a insuficiência apresentada pelo conjunto dos números reais, mediante ao referido fato.

Em particular, desempenharão papel importante os seguintes números complexos:

(1,0), que será chamado, a partir de agora de unidade real;
(0,1), chamado, então de unidade imaginária.

A unidade imaginária, que representaremos, a partir de agora, por *i*, com todo exposto acima, é possuidora da seguinte característica:

$$(0,1).(0,1) = (0.0 - 1.1\ ;\ 0.1+1.0)$$

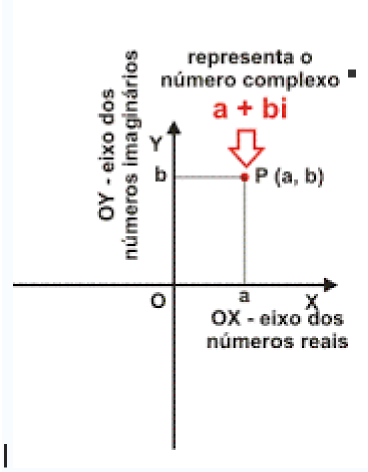
$$i \cdot i = (-1,0)$$

$$i^2 = -1$$

Como um exemplo de aplicação dessa propriedade atribuída à unidade imaginária, podemos citar o fato de que equações do segundo grau, quando consideradas no universo dos números complexos, sempre possuirão conjunto solução não vazio.

Com as denominações acima, que fazem distinção entre os termos real e imaginário, por exemplo, os eixos perpendiculares que formam o plano complexo, passam, agora, a serem denominados eixo real e eixo imaginário, sendo, a primeira componente de cada par ordenado, a parte real do número complexo e a segunda componente, a parte imaginária. Veja a figura 4.

Figura 4 – Representação de Um Número Complexo no Plano



Fonte: http://cha-mate.blogspot.com.br/2011/07/numeros-complexos.htm

Essa representação, que traz diversas vantagens no ponto de vista operacional, será bastante utilizada nas próximas seções, quando apresentaremos outras maneiras de representar um número complexo, principalmente na forma polar. Entretanto, antes de chegarmos a essa forma de representação, apresentaremos outra que também representará um certo avanço operacional pra os números complexos: a forma algébrica.

4.1 Forma Algébrica dos Números Complexos

Mesmo apresentando grandes benefícios, principalmente na representação geométrica, a caracterização dos números complexos como pares ordenados de números reais se mostra não muito prática quanto às operações definidas, principalmente a multiplicação.

Com isso, apresentaremos uma nova forma de representação para os números complexos. Forma essa que decorre imediatamente da definição e nos mostra que a multiplicação dos números complexos pode ser realizada simplesmente com artifícios algébricos já conhecidos. Para tanto,

Seja $z = (x, y), x \; e \; y \; \in R$. De acordo com as operações entre pares ordenados definidas, temos:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

$$z = (x, 0) + (y, 0).(0,1)$$

$$z = x + y.i \tag{1}$$

A expressão (1) é chamada *forma algébrica do número complexo* $z = (x, y)$, sendo x designado por parte real de z e y por sua parte imaginária.

De posse da forma algébrica, podemos dar uma nova interpretação às operações com números complexos. Para isso, considere os seguintes elementos de $\mathbb{C}$:

$z = (a, b) = a + bi$ e $w = (c, d) = c + di$. Logo, temos:

1) Igualdade: $z = w \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \ e \ b = d$

2) Adição: $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

3) Multiplicação: Utilizando a propriedade distributiva, temos:

$$\begin{aligned} z.w &= (a + bi).(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \\ &= (ac - bd; ad + bc) \end{aligned}$$

Ex$_1$: Dados $z = 1 + 2i, w = -3 + i \ e \ v = 1 + i$, o número complexo $u = z \cdot w + v$, é dado por:

$$\begin{aligned} u &= (1 + 2i)(-3 + i) + (1 + i) \\ &= (-3 + i - 6i + 2i^2) + (1 + i) \\ &= (-5 - 5i) + (1 + i) \\ &= -4 - 4i \end{aligned}$$

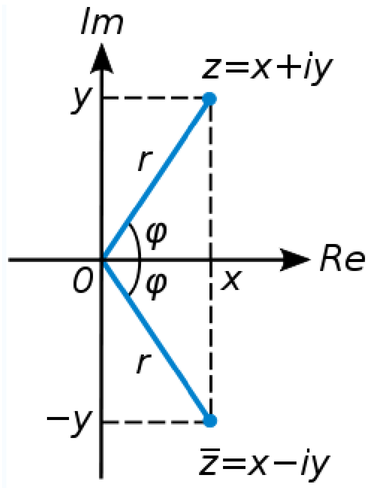
Observe que os resultados obtidos na realização dessas operações, com a nova representação, são idênticos aos apresentados na definição e, o que é melhor, com os complexos na forma algébrica, eles são obtidos apenas por procedimentos algébricos conhecidos.

4.2 Aplicações da Representação Geométrica

4.2.1 Números complexos conjugados

São números complexos que possuem os afixos simétricos em relação ao eixo real. Sendo $z = x + yi$, chamamos de conjugado de z, o número complexo $\bar{z} = x - yi$. Veja a Figura 5.

Figura 5 – Representação de Números Complexos Conjugados



Fonte: http://brasilescola.uol.com.br/matematica/plano-argand-gauss.htm

4.2.1.1 Propriedades do Conjugado

Sejam $z = x + yi$, um número complexo, $\{x, y\} \subset R$ e $\bar{z} = x - yi$, seu conjugado. Denotando a parte real de z por Re(z) e a parte imaginária de z por Im(z), temos as seguintes propriedades:

I. $\bar{\bar{z}} = z$;

II. $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in R$;

III. $z + \bar{z} = 2. Re(z)$;

IV. $z - \bar{z} = 2. Im(z). i$;

V. $\overline{z_{1+}z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$;

VI. $\overline{z_{1-}z_2} = \bar{z_1} - \bar{z_2}$;

VII. $\overline{z_1.z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$;

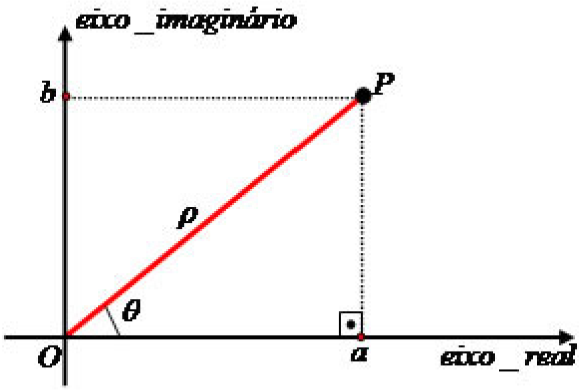
VIII. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}, z_2 \neq 0$;

IX. $(\bar{z})^n = \overline{z^n}, n \in N$

4.2.2 Módulo ou norma de um número complexo

É a distância do afixo do número complexo à origem do plano complexo. Veja Figura 6.

Figura 6 - Módulo e Argumento



Fonte: http://brasilescola.uol.com.br/matematica/plano-argand-gauss.htm

De forma geral, temos: $|z = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ (2)

OBS: O ângulo $\theta, \theta \in [0,2\pi[$, medido no sentido trigonométrico positivo, é chamado de argumento de z, e representa-se por :

(θ = arg (z))

4.2.2.1 Propriedades do módulo

Sendo z, z_1 e z_2 números complexos quaisquer, e n um inteiro, tem-se que :

I. $|z| \geq 0$;

II. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;

III. $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$;

IV. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$

V. $|z|^n = |z^n|$, para todo n se z ≠ 0 ou para n > 0, se z = 0

4.3 Quociente de Dois Números Complexos

Dados dois números complexos $u = a + bi$ e $v = c + di$, $v \neq 0$, dizemos que o quociente entre *u* e *v*, será o número complexo $z = x + yi$ se, e somente se, $u = z\,.\,v$. Logo, temos:

$$a + bi = (x + yi).(c + di)$$

$$a + bi = xc + xdi + yci - yd$$

$$a + bi = (xc - yd) + (xd + yc)i$$

Da igualdade de números complexos, podemos concluir que:

$$\begin{cases} a = xc - yd \\ b = xd + yc \end{cases}, \text{ ou seja, } x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \text{ e } y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \qquad (3)$$

O número complexo z, assim obtido é chamado de quociente de *u* por *v*.

Observando o resultado da divisão de u por v, verificamos a possibilidade de obtenção desse resultado através de um método mais prático.

Notemos que:

$$z = \frac{u}{v} = \frac{u.\bar{v}}{v.\bar{v}} = \frac{(a+bi).(c-di)}{(c+di).(c-di)} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}.i$$

Assim, concluímos que, para obtermos o quociente entre dois números complexos, basta multiplicarmos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.

Ex.: Sejam $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 1 - i$. Efetuar $z_1 : z_2$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)}{(1-i)} \cdot \frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{1+i+2i+2i^2}{1^2-i^2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

4.4 Potências de i

Os números complexos da forma (0, *y*) são chamadas de *imaginários puros.* Em particular, já mencionamos que o número complexo (0,1) $= i$ é chamado *unidade imaginária*. Esse número complexo possui uma propriedade cíclica muito útil na resolução de exercícios. Vamos inspecionar algumas potências de *i*.

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 . i = -1 . i = -i$

$i^4 = i^2 . i^2 = (-1).(-1) = 1$

$i^5 = i^3 . i^2 = (-i).(-1) = i$

$i^6 = i^3 . i^3 = (-i)(-i) = i^2 = -1$

$i^7 = i^4 . i^3 = 1.(-i) = -i$

De modo geral, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos:

$i^{4k} = i^{4k+0} = 1$

$i^{4K+1} = i^{4k} . i^1 = i$

$i^{4k+2} = i^{4k} . i^2 = -1$

$i^{4k+3} = i^{4k} . i^3 = -i$

Sendo 0,1,2 e 3 os possíveis restos da divisão de um inteiro n por 4, temos:

$i^n = i^{4k+R} = i^R$ onde R é o resto da divisão de n por 4. (4),

Isso significa que, para obter o valor de i^n, basta calcular i^R, sendo R o resto da divisão de *n* por 4. Uma observação importante sobre as potências de *i* refere-se às potências onde o expoente é inteiro e negativo.

Nesse caso, podemos proceder de forma análoga a anterior, uma vez que $i^{-n} = \frac{1}{i^n}$, para todo *n* inteiro. Essa simplicidade encontrada no cálculo de potências do número complexo $z = 0 + i$ não pode ser estendida aos demais números complexos. Em geral, resultados do tipo z^n, onde $z = x + yi$, necessitam de técnicas algébricas mais sofisticadas para serem alcançadas.

Dessa forma, da mesma maneira que pensamos na forma algébrica como simplificador da forma par ordenado no quesito multiplicação de complexos, a forma polar vai apresentar uma nova maneira de representar os números complexos, forma essa que irá simplificar o processo de potenciação no conjunto $\mathbb{C}$.

Ex$_2$: (Unicamp-SP- 2014) O módulo do número complexo
$z = i^{2014} - i^{1987}$ é igual a:

a) $\sqrt{2}$

b) 0

c) $\sqrt{3}$

d) 1

Solução:

$z = i^{2014} - i^{1987} = i^2 - i^3 = -1 - (-i) = -1 + i$. Logo, temos:

$$|z| = \rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

4.5 Forma Trigonométrica ou Polar dos Números Complexos

Sendo $z = a + bi$, a e b $\in \mathbb{R}$, um número complexo não nulo, sabemos que φ = arg(z) satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{cases} cos\varphi = \frac{a}{|Z|} \Rightarrow a = |Z|.cos\varphi \ (I) \\ Sen\varphi = \frac{b}{|Z|} \Rightarrow b = |Z|.sen\varphi \ (II) \end{cases}$$ (Conforme Figura 6)

Substituindo (I) e (II) em z = a + bi, temos: z = $|z|$. (cosφ + i.Senφ) ou simplesmente Z = $|Z|$.cisφ (5)

Esse é chamada forma trigonométrica ou polar de z.

Ex$_3$: Represente na forma polar o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$.

$$\rho = |z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$cos\varphi = \frac{1}{2}\ e\ sen\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $\varphi = 60^{\circ}$

$z = 1 + \sqrt{3}i = 2(cos60^{\circ} + isen60^{\circ})$

4.6 Operações na Forma Trigonométrica

4.6.1 Multiplicação

Se $z = \rho(cos\varphi + isen\varphi)$ e $w = \beta(cos\alpha + isen\alpha)$ são as formas trigonométricas dos números complexos z e w, temos:

$$zw = \rho\beta\big(cos(\varphi + \alpha) + isen(\varphi + \alpha)\big). \qquad (6)$$

Demonstração:

$zw = \rho(cos\varphi + isen\varphi) \cdot \beta(cos\alpha + isen\alpha) = \rho\beta(cos\varphi + isen\varphi)(cos\alpha + isen\alpha)$

$= \rho\beta(cos\varphi cos\alpha + isen\alpha cos\varphi + isen\varphi cos\alpha + i^2 sen\varphi sen\alpha) =$

$= \rho\beta[cos\varphi cos\alpha - sen\varphi sen\alpha + (sen\varphi cos\alpha + sen\alpha cos\varphi)i] =$

$= \rho\beta[cos(\varphi + \alpha) + isen(\varphi + \alpha)]$.

Ex$_4$.: Dados $z = 2(cos30^{\circ} + isen30^{\circ})$ e $w = 3(cos60^{\circ} + isen60^{\circ})$, temos:

$$z.w = 6(cos90^{\circ} + isen90^{\circ})$$

Esse resultado pode ser generalizado:

Dados *n* números complexos z_1, z_2, ..., z_n, então:

$z_1.z_2.\cdots.z_n = \rho_1.\rho_2\cdots\rho_n[cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + isen(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)]$

4.6.2 Divisão

Se $z = \rho(cos\varphi + isen\varphi)$ e $w = \beta(cos\alpha + isen\alpha)$ são as formas trigonométricas dos números complexos z e w, com $w \neq 0$, então:

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\beta}[cos(\varphi - \alpha) + isen(\varphi - \alpha)]. \qquad (7)$$

Demonstração:

$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{\rho(cos\varphi + i + sen\varphi) \cdot \beta(cos\alpha - isen\alpha)}{\beta^2} =$

$\frac{\rho(cos\varphi + isen\varphi) \cdot \beta[cos(-\alpha) + isen(-\alpha)]}{\beta^2} =$

$\frac{\rho\beta}{\beta^2}[cos(\varphi - \alpha) + isen(\varphi - \alpha)] =$

$\frac{\rho}{\beta}[cos(\varphi - \alpha) + isen(\varphi - \alpha)]$.

Ex$_5$.: Dados $z = 6(cos120^{\circ} + isen120^{\circ})$ e $w = 2(cos60^{\circ} + isen60^{\circ})$, temos:

$\frac{z}{w} = \frac{6}{2}(\cos(120^{\circ} - 60^{\circ}) + isen(120^{\circ} - 60^{\circ}))$

$$\frac{z}{w} = 3(cos60^{\circ} + isen60^{\circ})$$

4.6.3 Potenciação

Em alguns casos, calcular potências inteiras de números complexos dados na forma algébrica torna-se muito trabalhoso, por exemplo, para obter a forma algébrica de

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{20} = \underbrace{\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right). \dots . \left(1 - i\sqrt{3}\right)}_{20\ fatores}$$

teríamos que calcular o produto dos 20 fatores.

É bem verdade que as relações $(1 + i)^2 = 2i$ e $(1 - i)^2 = -2i$, são extremamente úteis quando temos que calcular potências de números complexos dessa forma.

Ex$_6$: $(1 + i)^{100} = [(1 + i)^2]^{50} = (2i)^{50} = 2^{50} \cdot i^{50} = 2^{50} \cdot i^2 = -2^{50}$

Contudo, a fim de generalizar o método e facilitar o cálculo de potências de números complexos, é muito útil poder escrevê-las na forma trigonométrica e usar a expressão que será obtida a seguir.

Sabemos que, dados *n* números complexos $z_1, z_2, \cdots, z_n$, temos:

$$z_1 . z_2 . \ \dots \ . z_n = \rho_{1.}\ \rho_2 . \dots . \rho_n\ [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + \ i\ sen\ (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)] \qquad (8)$$

Dado o complexo $z = \rho(cos\varphi + i\ sen\ \varphi)$, então, fazendo em (8),

$z_1 = z_2 = \ ... \ = z_n = z$, temos : $\begin{cases} \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_n = \rho \\ \varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n = \varphi \end{cases}$

Assim, em (8), temos:

$$\underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n\ vezes} = \underbrace{\rho \cdot \rho \cdot \rho \cdots \rho}_{n\ vezes} \cdot \left[cos\ \underbrace{(\varphi + \varphi + \cdots + \varphi)}_{n\ vezes} + isen\ \underbrace{(\varphi + \varphi + \cdots + \varphi)}_{n\ vezes}\right]$$

Logo:

$z^n = \rho^n.\ [\cos(n\varphi) + i\ sen(n\varphi)]$ (9)

Ex7: Sendo $z = 2(cos30^\circ + isen30^\circ)$, temos que $z^3 = 2^3\left(cos(3.30^\circ) + isen(3.30^\circ)\right) = 8\left(cos(90)^\circ + isen(90^\circ)\right)$

4.6.4 Radiciação

Dado o número complexo z_0, dizemos que o número complexo z é uma raiz *n*-ésima de z_0 se, e somente se, $z^n = z_0$ e indicamos:

$z = \sqrt[n]{z_0} \Leftrightarrow z^n = z_0.$ (10)

Assim, dado, $z_0 = \rho_0(cos\varphi_0 + isen\varphi_0)$, vamos determinar um número complexo $z = \rho(\cos\varphi + i\ sen\varphi)$ que satisfaz a igualdade $z^n = z_0$.

De acordo com a potenciação de números complexos, temos:

$$\underbrace{\rho^n\big(cos(n\varphi) + isen(n\varphi)\big)}_{z^n} = \underbrace{\rho_0\big(cos(\varphi_0) + isen(\varphi_0)\big)}_{z_0}$$

Então, pela definição de igualdade de complexos na forma polar, aplicada em (10), vem:

$\rho^n = \rho_0$ (os módulos são iguais) (11)

$n\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, k \in Z$ (os argumentos são congruentes) (12)

De (11), temos: $\rho = \sqrt[n]{\rho_0}$

De (12), temos: $\varphi = \frac{\varphi_0}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$, com k = 0, 1,2, ..., $n - 1$.

Observe que, se $k = n$, então $\varphi = \frac{\varphi_0}{n} + 2\pi$, ou seja, φ e $\frac{\varphi_0}{n}$ são congruentes.

Isso significa que, fazendo k = 0, 1, 2, ..., $(n-1)$ em $\varphi = \frac{\varphi_0}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$, obtemos os n argumentos principais das raízes n-ésimas de z_0:

$k = 0 \rightarrow \varphi_1 = \frac{\varphi_0}{n}$

$k = 1 \rightarrow \varphi_2 = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}$

$k = 2 \rightarrow \varphi_3 = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{4\pi}{n}$

... ...

$k = n - 1 \rightarrow \varphi_n = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$

Portanto, as n raízes de z_0 têm mesmo módulo $\rho = \sqrt[n]{\rho_0}$ e podem ser obtidas por meio da expressão:

$z_m = \rho(cos\varphi_m + isen\varphi_m)$, em que m = 1, 2, 3, ..., n

Como consequências do processo de radiciação dos números complexos, citamos:

I. Note que k assume os n valores inteiros 0,1,2,...,n – 1. Logo, existem n raízes n-ésimas distintas de z.

II. Todas as raízes n-ésimas de z têm o mesmo módulo: $\sqrt[n]{\rho}$

III. Os argumentos das raízes ($\frac{\varphi_0}{n}, \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}, \frac{\varphi_0}{n} + \frac{4\pi}{n}$, ... , $\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$), formam um progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$.

IV. As imagens das raízes pertencem a uma mesma circunferência de centro (0,0) e raio $\sqrt[n]{\rho}$. Elas dividem a circunferência em n parte iguais.

4.6.5 Exercício

Exemplificando a aplicação acima, temos o seguinte exercício.

AFA (2017) Resolva a equação $z^3 - 1 = 0$ no conjunto dos números complexos. Considerando as raízes encontradas, analise as proposições sendo V (verdadeiro) e F (Falsa)

( ) A equação possui três raízes de multiplicidade 1.

( ) Os afixos das raízes formam um triângulo equilátero cuja área é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ de unidade.

( ) Duas das raízes são conjugadas.

( ) Todas as raízes têm o mesmo módulo.

A sequência correta é:

a) V – F – V – V
b) V – V – F – V
c) F – F – V – F
d) V – F – V - F

Solução

Resposta [A]

[I] Verdadeira. Calculando as raízes:

$$z^3 = 1 \rightarrow z^3 = cis(2k\pi) \rightarrow z = cis(\frac{2k\pi}{3})$$

$$Para\ k = 0 \rightarrow Z = 1$$
$$Para\ k = 1 \rightarrow Z = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$Para\ k = 2 \rightarrow Z = (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

[II] Falsa. Calculando:

$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

Sendo L a medida do lado do triângulo, temos:

$L^2 = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow L^2 = 3$

$S = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

[III] $\text{Verdadeira. Sim, quando K} = 1 \text{ ou k} = 2 \text{ obtém} - \text{se raízes conjugadas.}$

[IV] Verdadeira. Calculando:

$|Z| = 1$ ou $|Z| = \sqrt{\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}\right)} = \mathbf{1}\ \boldsymbol{ou}\ |Z| = \sqrt{\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^{2} + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^{2}\right)} = 1$

5 FORMA EXPONENCIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS E APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE SOMATÓRIOS

Do ponto de vista da praticidade na obtenção de resultados, a melhor forma para se representar os números complexos é a forma exponencial.

Curiosamente, essa representação, também conhecida como forma de Euler, não é apresentada aos alunos do curso regular do ensino médio. Porém, tamanhas são as vantagens de sua representação, que apresentaremos de uma forma sucinta os elementos necessários ao seu desenvolvimento, para assim conseguirmos alguns resultados já conhecidos de uma forma mais prática.

Teorema:
Sendo $z \in \mathbb{C}$, temos: $z = |z|.(cos\emptyset + i\ sen\ \emptyset) = |z|.e^{i\phi}$.

Demonstração:

Para mostrarmos que todo número complexo pode ser escrito na forma exponencial descrita acima, devemos mostrar que, para todo $\phi \in \mathbb{R}$, temos $cos\ \phi + i\ sen\ \phi = e^{i.\phi}$ e, para tanto, vamos utilizar um conhecido resultado do cálculo diferencial.

O teorema de Taylor diz que funções deriváveis em qualquer ordem num ponto a de seu domínio podem ser escritas sob a forma de um polinômio com grau infinito em torno desse ponto a, ou seja, sob a forma de uma série infinita de potência x-a. Como consequência desse teorema, temos:

$$cos\ \phi = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \cdots \qquad (12)$$

$$sen\ \phi = \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + \cdots \qquad (13)$$

$$e^{\phi} = 1 + \phi + \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + \cdots \qquad (14)$$

A partir desses resultados, podemos escrever:

$$cos\ \phi + isen\phi = 1 + i\phi - \frac{\phi^2}{2!} - i\frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + i\frac{\phi^5}{5!} - + \cdots \quad (15)$$

$$e^{i\phi} = 1 + i\phi - \frac{\phi^2}{2!} - i\frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + i\frac{\phi^5}{5!} - + \cdots \quad (16)$$

Da igualdade entre (15) e (16), podemos concluir que $cos\phi + isen\phi = e^{i.\phi}$, ou seja, $|z|.(cos\emptyset + i\ sen\ \emptyset) = |z|.e^{i\phi}$ ou $|z|cis\emptyset = |z|.e^{i\phi}$ (17).

Duas importantes propriedades seguem imediatamente da forma de Euler. A saber, temos para todo x real:

$$\begin{cases} \boldsymbol{cis(x) + cis(-x) = 2cos(x)} \\ \boldsymbol{cis(x) - cis(-x) = 2isen(x)} \end{cases}$$

Sendo $\boldsymbol{cis(x) = e^{ix}}$**,** podemos escrever:

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = cosx \quad \text{e} \quad (18)$$

$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = senx, \text{ para todo } x \in R \quad (19)$$

Ex$_8$: (IME – 2003) Seja z um número complexo de módulo unitário e n um número natural. Mostre que é real o complexo dado por:

$w = \frac{z^n}{1+z^{2n}}$.

Solução:

Sendo z um número complexo de módulo unitário, temos que, na forma exponencial, $z = e^{i\theta}$, ou seja,

$$w = \frac{e^{i\theta n}}{1+e^{2i\theta n}} = \frac{1}{\frac{1+e^{2i\theta n}}{e^{i\theta n}}} = \frac{1}{e^{-i\theta n}+e^{i\theta n}} = \frac{1}{2cos(n\theta)} \in \text{R}.$$

5.1 Aplicações da Forma Exponencial

5.1.1. Produto de números complexos na forma exponencial

Sejam $z = |z|.cis\emptyset$ e $w = |w|.cis\alpha$, logo, temos:

$$z.w = |z|.|w|.cis(\emptyset + \alpha) \tag{6}$$

Prova:

Da forma exponencial, temos:

$$z.w = (|z|e^{i\emptyset}).(|w|e^{i\alpha}) = |z|.|w|.e^{i(\phi+\alpha)} = |z|.|w|cis(\phi+\alpha)$$

Como uma imediata aplicação do exposto acima, destacamos o significado geométrico da multiplicação de um número complexo qualquer pelo número complexo *i*. Essa aplicação possui extrema relevância, pois nos permite mostrar claramente para os alunos que o significado das operações com números complexos, nesse caso a multiplicação, não tem o mesmo significado quantitativo das operações com números naturais.

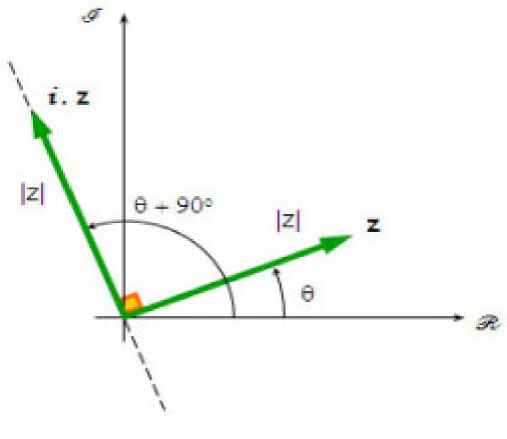
Aqui, elas são interpretadas como transformações no plano. Para tanto, temos:

Seja $|z|.cis\emptyset$.

Como $i = cis90°$, temos que: $z.i = |z|.cis(\emptyset + 90^{\circ})$. (20)

Sendo $\emptyset$ = arg (z), verificamos que a multiplicação por *i* gerou em z uma rotação de 90º no sentido anti-horário.

Figura 7 – Multiplicação por i



Fonte:https://jkogler.wordpress.com/2008/06/05/numeros-complexos-e-xponenciais-complexas/

5.1.2. Quociente de números complexos na forma exponencial

Sendo $z = |z|.cis\emptyset$ e $w = |w|.cis\alpha$, temos:

$$\frac{z}{w} = \frac{|Z|}{|w|}.\,cis(\emptyset - \alpha). \qquad (7)$$

Prova:

Da forma exponencial, temos:

$$\frac{z}{w} = \frac{(|Z|.e^{i\emptyset})}{(|w|.e^{i\alpha})} = \left(\frac{|Z|}{|w|}\right).e^{i(\emptyset-\alpha)} = \frac{|Z|}{|w|}.\,cis(\emptyset - \alpha).$$

5.1.3 Potência de números complexos

Sendo z= $|z|$.cis∅ e n $\in \mathbb{R}$, temos:

$$z^n = |z|^n.cis(n\emptyset) \qquad (9)$$

Prova:

$$z^n = \left(|Z|.\,e^{i\emptyset}\right)^n = |Z|^n.\,e^{in\emptyset} = |Z|^n.cis(n\emptyset)$$

5.1.4 Raízes N-ésimas da Unidade

Uma interessante aplicação do processo de radiciação de números complexos, com importantes resultados, são as chamadas raízes n-ésimas da unidade.

Dizemos que um número complexo z é uma raiz n-ésima da unidade, quando ele verifica seguinte relação:

$$z^n = 1$$

De acordo com a radiciação de números complexos, temos:

$$z = cis\left(\frac{2k\pi}{n}\right), k = 0,1,\cdots,n-1 \qquad (21)$$

Uma vez que fórmula (21) nos fornece todas as raízes n-ésimas da unidade, podemos fatorar a expressão $z^n - 1$.

$$z^n - 1 = (z - 1)\left(z - cis\frac{2\pi}{n}\right)\left(z - cis\frac{4\pi}{n}\right)\cdots\left(z - cis\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

Considerando que a soma dos *n* primeiros termos de uma Progressão Geométrica de primeiro termo unitário e razão z, com $|z| < 1$, é dada por $1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z-1}$,temos:

$$z^n - 1 = (z - 1).(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1})$$

Comparando os últimos resultados, temos:

$$\left(z - cis\frac{2\pi}{n}\right)\left(z - cis\frac{4\pi}{n}\right)\cdots\left(z - cis\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = (1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1})$$

Ou, na forma exponencial,

$$\left(z - e^{i.\frac{2\pi}{n}}\right)\left(z - cis\frac{4\pi}{n}\right)\cdots\left(z - e^{i.\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right) = (1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) \qquad (22)$$

Além disso, vale ressaltar que se w é uma raiz n-ésima da unidade, diferente de 1, então:

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$$

Note que $1, w, w^2, \ldots$ são justamente as raízes da unidade! A soma delas é a soma das raízes da equação: $z^n - 1 = 0$

As relações de Girard garantem que a soma das raízes dessa equação é nula.

5.2 Aplicações em Problemas de Somatórios

Ao analisarmos as possibilidades de aplicações dos números complexos na matemática, verificamos uma grande quantidade de referências às aplicações geométricas, muito em parte pela força que tal relação exerce no desenvolvimento do assunto. Porém ao associarmos as relações trigonométricas com resultados obtidos do teorema binomial de Newton, observamos um tipo de aplicação pouco explorado e que permite a resolução, por métodos bem mais práticos, de exercícios que apresentam um elevado grau de dificuldade. As aplicações em problemas que envolvem somatórios.

Uma das principais características dos números complexos consiste no fato de suas potências apresentarem um comportamento cíclico. Por exemplo, em ciclos de quatro potências, o número complexo i se repete.

$$i^0 = i^4 = i^8 = i^{12} = \cdots = 1$$
$$i^1 = i^5 = i^9 = i^{13} = \cdots = i$$
$$i^2 = i^6 = i^{10} = i^{14} = \cdots = -1$$
$$i^3 = i^7 = i^{11} = i^{15} = \cdots = -i$$

Para utilizarmos essa propriedade dos números complexos em problemas que envolvam somatórios, que é o nosso objetivo, analisaremos as conexões existentes entre essas potências cíclicas e o desenvolvimento binomial.

De acordo com o teorema do Binômio de Newton, temos:

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n \text{ , x} \in R \tag{23}$$

Dessa expressão, podemos tirar alguns resultados importantes.

I. Fazendo $x = 1$, temos:

$$(1 + 1)^n = \binom{n}{0} 1^0 + \binom{n}{1} 1^1 + \binom{n}{2} 1^2 + \cdots + \binom{n}{n} 1^n$$
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Esse resultado é conhecido como teorema das linhas do triângulo de Pascal.

II. Fazendo $x = -1$, temos:

$$(1 - 1)^n = \binom{n}{0} (-1)^0 + \binom{n}{1} (-1)^1 + \binom{n}{2} (-1)^2 + \cdots + \binom{n}{n} (-1)^n$$
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

III. Somando os dois resultados anteriores e dividindo os dois membros da soma por dois, temos:

$$\begin{cases} \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n \\ \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0 \end{cases}$$

$$2\binom{n}{0}+2\binom{n}{2}+2\binom{n}{4}+\cdots=2^n$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=2^{n-1}$$

IV. Subtraindo os resultados I e II e dividindo os dois membros da equação por dois, temos:

$$\begin{cases} \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n \\ \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0 \end{cases}$$

$$2\binom{n}{1}+2\binom{n}{3}+2\binom{n}{5}+\cdots=2^n$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}$$

É importante observar que, mesmo com as reticências, essas sequências não possuem infinitos elementos. Utilizamos essa notação, apenas para representar os demais elementos de cada sequência.

As expressões acima, nos mostram como obter resultados de somas binomiais tomadas a números pares e ímpares. Porém, como vimos as potências do número complexo *i*, por exemplo, se repetem em ciclos de quatro. Logo, a fim de relacionarmos tais elementos, devemos representar as expressões binomiais em intervalos de quatro termos.

Fazendo $x = i$, na expressão do binômio, temos:

$$(1+i)^n=\binom{n}{0}i^0+\binom{n}{1}i^1+\binom{n}{2}i^2+\cdots+\binom{n}{n}i^n$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}i+\binom{n}{2}(-1)+\binom{n}{3}(-i)+\cdots$$

$$\left(\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+-\cdots\right)+i\left(\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+-\cdots\right)$$

Com isso, seguem mais dois resultados:

$$\begin{cases} \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + - \cdots = Re(1+i)^n \\ \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + - \cdots = Im(1+i)^n \end{cases}$$

Uma vez que

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}\right)^n = (2)^{\frac{n}{2}}cis\frac{\pi}{4}$$

temos que:

$$Re(1+i)^n = (2)^{\frac{n}{2}}.cos\frac{n\pi}{4}$$

$$Im(1+i)^n = (2)^{\frac{n}{2}}.sen\frac{n\pi}{4}$$

Comparando esses resultados, com os resultados acima, temos:

$$\begin{cases} \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + - \cdots = (2)^{\frac{n}{2}}.cos\frac{n\pi}{4} \\ \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + - \cdots = (2)^{\frac{n}{2}}.sen\frac{n\pi}{4} \end{cases}$$

Relacionando esses resultados com $\begin{cases} \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^n \\ \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1} \end{cases}$,

acima mostrados, chegamos aos seguintes resultados

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \cdots = 2^{n-2} + (2)^{\frac{n-2}{2}}.cos\frac{n\pi}{4}$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \binom{n}{13} + \cdots = 2^{n-2} + (2)^{\frac{n-2}{2}}.sen\frac{n\pi}{4}$$

Observe que, com os resultados obtidos, temos condições de resolver problemas que envolvam somatórios binomiais com repetições em ciclos de dois e quatro. Porém, é bastante comum estarmos em contato com somas binomiais que se repetem em ciclos diferentes de dois e de quatro. A fim de solucionar esses problemas, apresentamos uma nova característica dos números complexos.

5.2.1 Exercícios resolvidos

O objetivo dessa seção não é simplesmente mostrar exercícios onde esse conceito de resolução seja colocado em prática.

Ele também comprova empiricamente a eficácia desse modo de resolução, mostrando como os números complexos podem ser utilizados como ferramenta para resolver problemas que se apresentam como sendo de outras áreas da matemática.

Os exercícios listados e resolvidos abaixo foram retirados de uma lista elaborada pelo professor Antonio Luiz Santos, para o processo de revisão para os vestibulares do Instituto Militar de Engenharia (IME) e do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA).

5.2.1.1 EXERCÍCIO 1

Determine o valor da soma, para *n* natural, tal que *n*>1:

$$S = sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) + sen\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \ sen\left(\frac{6\pi}{n}\right) + \cdots + \ sen\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

Solução:

Os termos do somatório são funções seno com o argumento crescendo em progressão aritmética. A experiência adquirida na seção anterior nos sugere analisar a seguinte soma:

$$A = cis\left(\frac{2\pi}{n}\right) + cis\left(2.\frac{2\pi}{n}\right) + cis\left(3.\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + cis\left((n-1).\frac{2\pi}{n}\right)$$

Pela Lei de De Moivre a soma torna-se:

$$A = \left(cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) + \left(cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^2 \quad + \left(cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^3 + \ldots + \left(cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^{n-1},$$

Sendo $Z = cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

Temos: $A = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1}$

Note que a soma A é exatamente uma soma de termos em progressão geométrica de razão z$|z| < 1$.

$$A = z.\left(\frac{z^{n-1}-1}{z-1}\right) = \left(\frac{z^n - z}{z-1}\right)$$

Da Lei de De Moivre: $z = cis\left(\frac{2\pi}{n}\right) \rightarrow z^n = 1$

Portanto $A = \left(\frac{1-z}{z-1}\right) = 1$ para $n > 1$

Pela construção da resolução, sabemos que a soma pedida S é justamente a parte imaginária de A, que é nula:

$$S = sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) + sen\left(\frac{4\pi}{n}\right) + sen\left(\frac{6\pi}{n}\right) + \ldots + sen\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0$$

5.2.1.2 EXERCÍCIO 2

Nesse exercício, podemos comparar duas formas de solução para o mesmo problema.

Determine o valor da soma, ligeiramente diferente da anterior para *n* natural:

$$S = sen\left(\frac{\pi}{n}\right) + sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) + sen\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \ldots + sen\left(\frac{n\pi}{n}\right)$$

Solução:

$$A = cis\left(\frac{\pi}{n}\right) + cis\left(\frac{2\pi}{n}\right) + cis\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \ldots + cis\left(\frac{n\pi}{n}\right)$$

Procedendo da mesma forma que no exemplo anterior, pela Lei de De Moivre a soma A torna-se:

$$A = \left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) + \left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2 + \left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^3 + \ldots + \left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^n$$

Sendo: $z = cis\left(\frac{\pi}{n}\right), temos\ A = A = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n = z\left(\frac{z^n - 1}{z-1}\right)$

$$A = cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{\left[\left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^n - 1\right]}{\left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^n - 1}$$

$$= \ cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\left[\frac{\left(cis\left(n.\frac{\pi}{n}\right)\right)-1}{\left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)-1}\right]$$

$$= \ cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\left[\frac{-1-1}{\left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)-1}\right]$$

$$= \frac{2.cis\frac{\pi}{n}}{1-\left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}$$

$$= \ \frac{2.cis\frac{\pi}{n}}{-2.i.sen\left(\frac{\pi}{2n}\right)cis\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

$$= i.\frac{cis\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

$$= \ i.\frac{cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)+i.sen\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

$$= i.ctg\left(\frac{\pi}{2n}\right)-1$$

Note que queremos justamente a parte imaginária de A, e, portanto:

$$S = sen\left(\frac{\pi}{n}\right) + \ sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \ sen\left(\frac{3\pi}{n}\right)+\ldots+sen\left(\frac{n\pi}{n}\right) = \ ctg\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

Vamos mostrar agora uma segunda solução para o exemplo que acabamos de ver, utilizando um diferente método de resolução.

Visto que

$sen\emptyset = \frac{e^{i\emptyset}-e^{-i\emptyset}}{2i}$, temos que $sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{e^{\frac{i\pi}{n}}-e^{\frac{i\pi}{n}}}{2i}$

Sendo $w = e^{\frac{i\pi}{n}}$, temos que o somatório do pedido é:

$$S = \sum sen\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{w^k-w^{-k}}{2.i} = \ \sum_{k=0}^{n}\frac{w^k}{2.i} - \ \sum_{k=0}^{n}\frac{w^{-k}}{2i}$$

Usando a expressão da soma da PG nos dois somatórios:

$$S = \frac{1}{2i}\left(\frac{w^{n}-1}{w-1} - \frac{w^{-n}-1}{w^{-n}-1}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{-1-1}{w-1} - \frac{-1-1}{w^{-1}-1}\right)$$

$$= \frac{-2}{2i}\left(\frac{1}{w-1} - \frac{-1}{w^{-1}-1}\right) = \ i.\left(\frac{1}{w-1} - \frac{w}{1-w}\right) = \ i.\left(\frac{1}{w-1} + \frac{w}{w-1}\right)$$

$$= i.\left(\frac{w+1}{w-1}\right) = \ i\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}+1}{e^{\frac{i\pi}{n}}-1}\right)$$

Note que, embora já tenhamos achado uma resposta, a expressão final não ficou muito parecida com o resultado que encontramos na primeira solução: $ctg(\frac{\pi}{2n})$. Vamos tentar torná-la parecida.

Usando uma simplificação básica:

$$S = i.\left(\frac{w+1}{w-1}\right) = \ i\left(\frac{w^{1/2} + w^{-1/2}}{\left(w^{1/2} + w^{-1/2}\right)}\right)$$

Podemos agora escrever S de forma a chegar a um resultado esteticamente igual ao resultado obtido na primeira solução:

$$S = i\left(\frac{w^{1/2} + w^{-1/2}}{\left(w^{1/2} + w^{-1/2}\right)}\right) = \left(\frac{\frac{e^{\frac{i\pi}{2n}}+e^{\frac{-i\pi}{2n}}}{2}}{\frac{e^{\frac{i\pi}{2n}}+e^{\frac{-i\pi}{2n}}}{2i}}\right) = \left(\frac{cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right) = \ ctg\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$S = sen\left(\frac{\pi}{n}\right) + \ sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \ sen\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \ldots + sen\left(\frac{n\pi}{n}\right) = \ ctg\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

5.2.1.3 EXERCÍCIO 3

Prove que: $sen\left(\frac{2\pi}{7}\right) + sen\left(\frac{4\pi}{7}\right) + sen\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Vamos chamar: w=cis$\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

Conhecemos a soma das raízes sétimas da unidade:

$$1+\text{cis}\left(\frac{2\pi}{7}\right) + cis\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\text{cis}\left(\frac{6\pi}{7}\right)+...+\text{cis}\left(\frac{12\pi}{7}\right)=0$$

Podemos ainda reescrever essa soma, lembrando que:

$$1+w+w^2+w^3+\dots w^6=0$$

$$1+\underbrace{(w+w^2+w^4}_{A}+\underbrace{(w^3+w^5+w^6}_{B}=0$$

O problema se resume a determinar A e B. Vamos calcular algumas coisas interessantes:

$$\begin{cases} (i)\ A+B=-1 \\ (ii)\ A.B = w^4+w^6+w^7+w^5+w^7+w^8+w^7+w^9+w^{10} \\ = w^4+w^6+3+w^5+w+w^2+w^3 \\ = 2+(1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6) \\ = 2+0 \\ = 2 \end{cases}$$

Ou ainda, como B é a soma de termos no 3° e 4° quadrantes, temos:

$\begin{cases} A+B=-1 \\ A.B=2 \end{cases}$, ou seja, $A=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\ e\ B=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$

A soma pedida é justamente a parte imaginária de A.

sen $\left(\frac{2\pi}{7}\right)$+sen$\left(\frac{4\pi}{7}\right)$+sen$\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ = $\frac{\sqrt{7}}{2}$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A teoria e a experiência descritas neste trabalho refletem a importância de uma constante pesquisa, por parte dos estudiosos afins envolvidos, quando se trata do ensino da matemática em nível médio e, especificamente da aquisição e descoberta da aplicabilidade dos números complexos no ensino.

Em muitos livros didáticos do Ensino Médio, números complexos são uma das últimas matérias abordadas no 3º ano do Ensino Médio, sendo que muitos alunos acabam por concluir o curso sem terem visto essa matéria, acarretando prejuízos em seu futuro como acadêmico.

Esse trabalho procurou ressaltar a importância de se lecionar e aprimorar o estudo dos números complexos, tendo em mente que ele possibilita uma maior conexão entre assuntos tidos como distintos, além de fazer parte dos conjuntos numéricos, que são o alicerce para a compreensão da matemática.

Buscou-se com a pesquisa evidenciar aplicações dos números complexos, principalmente em problemas que envolvam somatórios, para promover e despertar interesse a respeito do tema, utilizando para isso as imensas vantagens que a forma exponencial fornece.

Consideramos que o objetivo do trabalho foi atingido, levando em consideração eu os alunos assimilam bem o conteúdo ensinado e também considerando o alto número de aprovações nos exames militares.

O presente estudo não esgota esse tema. A partir da continuidade do estudo dos números complexos, novas descobertas e aplicações surgirão, contribuindo assim para o desenvolvimento do ensino da matemática.

Concluído o estudo, espera-se que o mesmo tenha sido interessante, bem como, de fácil leitura e compreensão, levando o leitor a pesquisar mais ainda sobre o assunto para ampliar seus conhecimentos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/BNCC-APRESENTACAO.pdf. Acesso em 01/08/2016.

CERRI, Cristina; MONTEIRO, Martha S. **História dos números complexos**. CAEM – Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática – Instituto de Matemática e Estatística da USP, set. 2001. Disponível em: www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf. Acesso em 30/07/2016.

DOMINGUES, Hygino H. Números Complexos de Cardano a Hamilton. In IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar,**. Vol.6, 8ª ed. São Paulo: Atual, 2013

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática – Ciência e aplicações**. Vol.3, Ensino Médio, 5ª ed. São Paulo: Atual, 2010.

KODY, Augusto; MECENERO, Ana Carolina; HIPÓLITO, João; CARLOS, Jean; ANTONI, Guilherme; PEREIRA, Andrey; KANSO, Youssef; VIEIRA, Felipe; OLIVEIRA, Rebeca de; TULIO, Josiani; ACCORSI, Sofia; PEREIRA, Andrey; FORDIANI, Rodolfo; COSTA, Cléu. **Números complexos**. [Monografia] Universidade Estadual de Campinas, jun. 2014. Disponível em: www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/NC1.pdf. Acesso em 01/08/2016.

LUCHETTA, Valéria Ostete Jannis. **Matemática Interativa na Internet**; 2008. Disponível em: www.matematica.br/historia/requacoes.html. Acesso em 02/08/2016.

MORAIS, Kellen Cristina de. **Números complexos**. [Trabalho de Curso] Universidade Estadual de Goiás, Anápolis, 2011. Disponível em: www.unucet.ueg.br. Acesso em 01/08/2016.

MOTTA, Carlos Eduardo Mathias. **Informática no Ensino da Matemática: repensando práticas**. MEC -UAB, Universidade Aberta do Brasil, p. 92, 2008.

PINTO JUNIOR, Ulicio. **A História dos Números Complexos: das Quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand**. Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós Graduação. Rio de Janeiro. UFRJ.2009. Disponível em: www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0ahUKEwinveeCuurQAhXBIJAKHdgOAagQFggcMAA&url=http%3A%2F%2Fww

w.pg.im.ufrj.br%2Fpemat%2F12%2520Ulicio%2520Pinto.pdf&usg=AFQjCNETNIIjDHQZq9FXlrIFFFutVGqCkg&sig2=KcSdP77YfZ6sDm6K6KLbCw&cad=rja

SILVA, Marcio Antonio da. Da Teoria à Prática: uma análise histórica do desenvolvimento conceitual dos Números Complexos e suas aplicações. **Revista Brasileira da História da Ciência**. V4, N1. Rio de Janeiro, UFMS. 2011.

TOFFOLI, Sonia F.L.; SODRÉ, Ulysses. **Introdução aos números complexos**; 2005. Disponível em: pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/ncomplex/ncomplex.htm. Acesso em 29/07/2016.