UFRRJ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

Abordagem Financeira no Ensino Básico e Sua Importância nas Avaliações do Ensino e na Percepção de Erros em Publicações

Célio Marques de Freitas

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ABORDAGEM FINANCEIRA NO ENSINO BÁSICO E SUA IMPORTÂNCIA NAS AVALIAÇÕES DO ENSINO E NA PERCEPÇÃO DE ERROS EM PUBLICAÇÕES

CÉLIO MARQUES DE FREITAS

Sob a Orientação do Professor
Wanderson José Lambert

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre**, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional– PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ
Agosto de 2015

510.7
F866a
T

Freitas, Célio Marques de, 1972-
Abordagem financeira no ensino básico e sua importância nas avaliações do ensino e na percepção de erros em publicações / Célio Marques de Freitas. – 2015.
172 f.: il.

Orientador: Wanderson José Lambert.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015.
Bibliografia: f. 153-154.

1. Matemática – Estudo e ensino (Ensino médio) – Teses. 2. Matemática financeira – Estudo e ensino (Ensino médio) - Teses. 3. Educação financeira – Teses. 4. Erros – Teses. I. Lambert, Wanderson José, 1977- II. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

CÉLIO MARQUES DE FREITAS

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 28/08/2015

Wanderson José Lambert

Wanderson José Lambert. Dr. UFRRJ
(Orientador)

André Luiz M. Pereira

André Luiz Martins Pereira. Dr. UFRRJ

Agnaldo da C. Esquincalha

Agnaldo da Conceição Esquincalha. Dr. UERJ

Dedico este trabalho a Deus, socorro presente na hora da angústia.
A meu pai Miguel Manoel de Freitas (em memória),
à minha mãe Regina Augusta de Freitas e a todos os meus irmãos.

AGRADECIMENTOS

Ao professor e orientador Wanderson José Lambert, pelas excelentes aulas, pelas sugestões e incentivos e pela dedicação e respeito no trato com os alunos da turma Profmat 2013.

Ao grande amigo professor Wilson Tatagiba (um grande entusiasta das minhas ideias aqui apresentadas) por ter muito contribuído para a realização desse trabalho, à sua esposa Bruna, ao amigo Emerson e família pelo incentivo e acolhimento nos momentos que eu mais precisei.

À grande amiga Joice Vilela, que além de sempre presente em minha vida, muito contribuiu para a base metodológica para realização da monografia da especialização e dessa dissertação.

Aos professores Tarciso Pessoa, Ricardo, Tânia (em memória), Ernani, Rezende e Tininha pelas oportunidades e confianças no meu trabalho.

A todos os amigos da turma Profmat 2013, que compartilharam suas ideias e experiências no decorrer desses dois anos de curso.

A todos os professores do programa PROFMAT da UFRRJ, que compartilharam seus conhecimentos e experiências no decorrer desses dois anos de curso.

A todos os 54 participantes da pesquisa realizada, que dedicaram parte dos seus preciosos tempos para contribuir para a realização desse trabalho.

Aos amigos e colegas de trabalho, os professores Wellerson Quintaneiro, Marcelo Reis e Marcelo Pereira, que muito me incentivaram para cursar esse mestrado. Ao amigo e colega de trabalho, o professor Marco Marinho, pela disposição em ajudar a corrigir a escrita de alguns trechos desse trabalho. Aos amigos e colegas de trabalho, os professores Bruno Fraga e Bauer, pelas atenções dadas a minha ideia utilizada nesse trabalho. Ao amigo, ex-aluno e professor de matemática Wellington Tatagiba pela gratidão. Aos professores Ivail, Nilva, Didi, Paulinho e Kléber pelo apoio.

À minha irmã Ana, que mesmo de longe sempre continua incentivando-me a continuar nos estudos, ao meu cunhado Osmar e aos meus sobrinhos Caio, Lucas e Thiago pelo apoio nesse trabalho. Ao meu irmão Paulo e à Lurdes pelo apoio e incentivo e, aos demais sobrinhos, irmãos e familiares.

À Gracinha, Fernanda, Lurdinha, Reginaldo, Amanda e João Guilherme, pelo apoio, incentivo e aconchego sempre dispensados.

Aos amigos de longa data: Valtencir, Leonardo, Paulo, Lucas Ferraz, Bruno Bonfim, Thiago Bonfim e família, Cristine, Sidileia, Kelly, Renato, Guilherme, Carla, Graziely, Anderson, Ana Paula, Daniele, Michele, Rosimere Celina, Raquel, Giuliene, Lidiane e família, Alessandra, Isabelle Souza, Thaís Oliveira, Luana, Nil, Celso, Lana, Ângela, Sanderlei, Rosângela, Renato, Roberto, Waguinho, Amélia, Beth, Cláudio, Edileuza, Rose e família, Mariângela, João Carlos, Zélio, Maria, Zé Geraldo, Rodrigo e família, que além de sempre presentes, são a prova da existência da verdadeira amizade. A todos os demais amigos que fizeram parte dessa caminhada e também muito me incentivaram.

À Pastora Sueli e às missionárias: Benedita, Aliomar e Lucimar, pessoas de fé e que muito me ajudaram nesses últimos anos.

À CAPES por proporcionar uma bolsa que foi indispensável para a realização desse mestrado e também à Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

"O caminho de cada um é feito pelos próprios passos,

mas a beleza da caminhada depende dos que vão conosco."

BIOGRAFIA

Célio Marques de Freitas, filho de Miguel Manoel de Freitas e Regina Augusta de Freitas, nasceu em 28 de abril de 1972, no município de Paracambi, no Estado do Rio de Janeiro, sendo o 12° filho de um total de 14, tendo seus pais e 5 irmãos nascidos no município de Muriaé, no Estado de Minas gerais.

Iniciou seus estudos no ano de 1980, com um ano de atraso, na Escola Estadual Boa Esperança, cursando nesta (de 1980 a 1983) as quatro primeiras séries do 1° grau. Em seguida, ingressou na Escola Estadual Presidente Rodrigues Alves, cursando nesta (de 1984 a 1986) as 5ª, 6ª e 7ª séries e cursou a 8ª série, no ano de 1987, na Escola Estadual Professora Odete Teixeira da Silva, concluindo assim o 1° grau (atual ensino fundamental). Retornou à Escola Estadual Presidente Rodrigues Alves para cursar as duas primeiras séries do 2° grau (em1988 e 1989) e cursou a 3ª série do ensino médio, no ano de 1990, no Colégio Estadual Professora Luíza Drumond dos Reis, concluindo assim o 2° grau (atual ensino médio). Todas as escolas citadas localizam-se no município de Paracambi, sendo duas delas municipalizadas posteriormente.

Trabalhou como desenhista de propaganda dos 14 anos até ingressar na faculdade.

No ano de 1993 ingressou na Escola Técnica Pandiá Calógeras, mantida pela Companhia Siderúrgica Nacional e localizada no município de Volta Redonda - RJ, concluindo no ano de 1994 o Curso Técnico Especial em Administração de Empresas, atuando no ano de 1994 como monitor voluntário de Estatística Básica.

No ano de 1995 estudou e atuou como professor de geometria no Programa Alternativo de Educação (PAE) no município de Japeri – RJ, prestando um único vestibular e obtendo aprovação, sendo o 9° colocado para o curso de matemática da UFRRJ.

No início do ano de 1996 ingressou no curso de matemática da UFRRJ, concluindo em maio de 2001 os cursos de licenciatura e bacharelado, defendendo a monografia de título *“A Contagem como Princípio Fundamental”* sob a orientação da professora Eliza Helena de Souza Faria e coorientação do professor Carlos Eduardo Mathias Motta, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.Também em 1996 atuou como professor de álgebra no Curso Elmo Pré-Vestibular, no município de Paracambi.

No ano de 1997 foi aprovado para monitor de Estatística Básica da UFRRJ, tendo sido aprovado mais duas vezes para monitor dessa disciplina e atuado por três anos e meio. Neste ano também começou a atuar como professor de álgebra, aritmética e geometria no Curso Alcance Pré-Vestibular e Pré-Militar, no município de Paracambi, permanecendo neste por mais de 10 anos.

No ano de 1998 fez estágio pelo Centro Integrado Empresa-Escola (CIEE) no Centro Educacional Logos (Colégio e Curso Tamandaré), no município de Nova Iguaçu – RJ.

Nos anos de 1999 a 2003 também atuou como professor dos Colégios-Cursos Centro de Aulas Particulares (CAP) e União Educacional Sul Fluminense (UESF), nos municípios de Nova Iguaçu e Itaguaí – RJ, respectivamente. Em 2001 foi aprovado em 1° lugar para professor de matemática da rede estadual de ensino, na região que englobava os municípios de Paracambi, Seropédica e Itaguaí e nos anos de 2002, 2003 e início de 2004 lecionou na Escola Estadual Presidente Rodrigues Alves e no Colégio Estadual Professora Luíza Drumond dos Reis, as mesmas que já tinha atuado como aluno. Também atuou, da metade do ano de 2001 à metade do ano 2003, como professor substituto de Estatística Básica e Introdução à Bioestatística na UFRRJ.

No ano de 2004 foi aprovado em 3° lugar na prova escrita (4° lugar após provas de títulos e didática) para professor de matemática da Unidade de Ensino de Nova Iguaçu do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ), permanecendo neste até os dias atuais.

Entre os anos de 2004 e 2010 atuou como tutor de diversas disciplinas, tais como: Matemática Básica, Matemática Discreta, Elementos de Matemática e Estatística, Pré-Cálculo, Geometria Analítica I e II e Álgebra Linear no curso de matemática à distância do CEDERJ.

Nos anos de 2011, 2012 e início de 2013 fez o Curso de Especialização em Análise Financeira na Faculdade da Academia Brasileira de Educação e Cultura (FABEC), concluindo-o com a monografia de título *“A Base Matemática aplicada para entender o Sistema Francês de amortização na prática”* sob a orientação da professora Ana Cristina Benavente.

No início de 2013 ingressou no mestrado profissional em matemática em rede nacional – PROFMAT.

RESUMO

FREITAS, Célio Marques de. **Abordagem Financeira no Ensino Básico e Sua Importância nas Avaliações do Ensino e na Percepção de Erros em Publicações.** 2015. 172p. Dissertação (Mestrado em Matemática). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2015.

Esta pesquisa trata da abordagem financeira no ensino básico e sua importância nas avaliações do ensino e na percepção de erros em publicações. A pesquisa teve por objetivo mostrar que até mesmo situações simples envolvendo assuntos elementares ao estudo da matemática financeira e as noções básicas sobre financiamentos são capazes de causar embaraços a pessoas e profissionais experientes, bem como a alunos do ensino médio com um bom conhecimento de matemática em geral. Para isso, foram mostrados diversos erros envolvendo esses assuntos elementares, erros estes que foram cometidos por profissionais responsáveis pela redação de matérias veiculadas em revistas, professores, especialistas encarregados da elaboração de material de educação financeira nas escolas e, inclusive, autores de livros de matemática. Foram mostrados os resultados do Brasil nas cinco aplicações do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes na faixa de 15 anos de idade – PISA na sigla em inglês, visto que foram incluídos como novidade no PISA 2012 e no PISA 2015, respectivamente, os tópicos "estudo sobre letramento financeiro" e "competência financeira dos estudantes" e que apesar de se notar uma melhora das notas de matemática dos estudantes brasileiros, a cada nova aplicação do PISA, na avaliação comparativa os resultados têm sido muito ruins. Também são apresentados e analisados os resultados de uma pesquisa envolvendo questões sobre as noções básicas de financiamentos e sobre a percepção de erros em publicações de revistas, aplicada a 25 participantes que estavam cursando ou já haviam concluído no máximo o ensino médio. A pesquisa também envolveu 29 participantes que já haviam concluído pelo menos o ensino superior. Este trabalho também abre uma discussão a respeito da pouca presença da Matemática Financeira nas Licenciaturas em Matemática e sobre as propostas da Sociedade Brasileira de Matemática para a inclusão da disciplina Matemática Financeira nas Licenciaturas em Matemática e no Ensino Médio. Também mostra-se um estudo do sistema de juros compostos e sua consequente aplicação nos sistemas de financiamentos. Este trabalho evidencia que os participantes da pesquisa não apresentaram conhecimentos matemáticos suficientes para elucidar todas as situações-problema apresentadas na pesquisa, apesar de terem sido alunos de bom rendimento na disciplina. Demonstrou-se a incipiência da disciplina de matemática no que diz respeito aos princípios elementares da matemática financeira.

Palavras-chave: percepção de erros em publicações, noções básicas de financiamentos, letramento financeiro.

ABSTRACT

FREITAS, Célio Marques de. **Financial Approach at the Basic Education Level and its Importance in the Educational Evaluations and Influence on the Perception of Errors in Several Publications**. 2015. 172p. Dissertation (Master in Mathematics). Exact Sciences Institute, Mathematics Department, Federal Rural University of Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2015.

This research deals about financial approach on basic education and its importance in the evaluations of teaching and misperceptions publications. The research had the objective show that even simple situations involving elementary subjects to the study of financial mathematics and the basics of finance are capable of causing embarrassment to people and experienced professionals, as well as high school students with a good knowledge of mathematics in general. For this, errors involving these elementary matters have been shown, that these mistakes were committed by individuals responsible for writing articles published in journals, teachers, experts hired to prepare financial education material in schools and even authors of mathematical books. Brazil the results were shown in five applications Programme for International Student Assessment in the 15-year-old - PISA its acronym in English, since they were included as new in PISA 2012 and PISA 2015, respectively, the topics "study on financial literacy" and "financial competence of students" and that although it noted an improvement in math scores of Brazilian students, with each new application of PISA, on benchmarking the results have been very bad. They are also presented and analyzed the results of research involving questions about the basics of financing and on the perception of mistakes in magazines publications, applied to 25 participants who were attending or had already completed at most a high school education. The research also involved 29 participants who had completed at least higher education. This work also opens a discussion about the little presence in the Financial Mathematics Degrees in Mathematics and on the proposals of the Brazilian Mathematical Society for the inclusion of the discipline in Financial Mathematics Degrees in Mathematics and in high school. It also shows a study of compound interest system and its consistent application in financing systems. This work shows that the research participants did not have sufficient mathematical knowledge to elucidate all problem situations presented in the research, although they were good income students in the discipline. It has been shown that the incipient of math discipline with respect to the basic principles of financial mathematics.

Keywords: Perception of errors in publications, funding basic notions, financial literacy

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

ANBIMA	Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiros e de Capitais
BCB	Banco Central do Brasil
BM&FBOVESPA	Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros
CEFET/RJ	Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro
CET	Custo Efetivo Total
CNSeg	Confederação Nacional das Empresas de Seguros Gerais, Previdência Privada e Vida, Saúde Suplementar e Capitalização
CONEF	Comitê Nacional de Educação Financeira
CONSED	Conselho Nacional de Secretários de Educação
COREMEC	Comitê de Regulação e Fiscalização dos Mercados Financeiros, de Capitais, de Seguros, de Previdência e Capitalização
CSN	Companhia Siderúrgica Nacional
CVM	Comissão de Valores Mobiliários
ENEF	Estratégia Nacional de Educação Financeira
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
ETPC	Escola Técnica Pandiá Calógeras
FEBRABAN	Federação Brasileira de Bancos
GAP	Grupo de Apoio Pedagógico
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
ICHS	Instituto de Ciência Humanas e Sociais
IES	Instituições de Ensino Superior
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
IOF	Imposto sobre Operações Financeiras
IPCA	Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo
I.R.	Imposto de Renda
MEC	Ministério da Educação
MPS	Ministério da Previdência Social
PISA	Programme for International Student Assessment
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PREVIC	Superintendência Nacional de Previdência Complementar
SAC	Sistema de Amortização Constante
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SEB	Secretaria de Educação Básica
SECAD	Secretaria de Educação Continuada, alfabetização e Diversidade

SELIC	Sistema Especial de Liquidação e Custódia – Taxa Selic
SFA	Sistema Francês de Amortização
SINAES	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior
SPC	Secretaria de Previdência Complementar
Spread	Diferença entre o que os bancos pagam na captação de recursos e o que eles cobram ao conceder um empréstimo para uma pessoa física ou jurídica
STF	Supremo Tribunal Federal
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRRJ	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
UNDIME	União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FÓRMULAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Para melhor compreender as propostas deste trabalho faz-se necessário incluir nessa fase inicial um pouco da história do autor, bem como algumas motivações que o levaram a dissertar sobre o assunto matemática financeira.

O autor iniciou seus estudos no ano de 1980 e concluiu no ano de 1990 o grau de estudo que se denomina hoje de ensino médio. No ano de 1991, quando começou a se interessar por concursos públicos, o autor deparou-se com problemas de matemática – sua disciplina de maior interesse e conhecimento – que pareciam estar escritos em outro idioma, dada a lacuna que existia entre os conhecimentos adquiridos na escola e os cobrados nas provas dos concursos de interesse. Graças a sua curiosidade foi despertada a vontade de aprender e de diminuir esta lacuna. Nesse momento descobriu a facilidade de aprender sozinho guiado pelos livros e pelas apostilas emprestadas por amigos que faziam cursos preparatórios.

No final do ano de 1992 prestou o concurso para o Curso Técnico Especial de Administração de Empresas para a Escola Técnica Pandiá Calógeras (ETPC), mantida pela Companhia Siderúrgica Nacional (CSN) e localizada no município de Volta Redonda – RJ, obteve aprovação e no início do ano de 1993 teve contato pela primeira vez com a disciplina matemática financeira. A paixão foi imediata, não só pela disciplina, mas também pela calculadora científica, o que possibilitou conhecer um mecanismo para calcular, por exemplo, o valor de $1{,}02^{35}$, visto que até então o autor nunca tinha estudado logaritmos e também por ser a primeira vez que teve contato com esse tipo de calculadora. O estudo da disciplina foi guiado pelo livro "Matemática Comercial e Financeira *fácil*" do autor Antônio Arnot Crespo. Livro usado também no presente trabalho.

No ano de 1994 prestou concurso para o cargo de Leiturista da então companhia pública de eletricidade LIGHT. A grande surpresa foi ter errado uma única questão na prova de matemática e, por ironia do destino, a questão versava sobre as noções de financiamentos, tendo o autor concluído a disciplina matemática financeira com nota máxima nos 4 bimestres no ano anterior ao concurso. Isso fez o autor questionar a forma inadequada de abordar os conteúdos na escola, pois os capítulos sobre capitalização e amortização compostas e empréstimos foram os únicos do livro citado anteriormente que não foram estudados, mesmo sendo de grande importância no nosso cotidiano.

A prova citada anteriormente não foi divulgada, mas a referida questão, com redação do próprio autor, era a seguinte:

Uma geladeira custa à vista R$720,00, mas pode ser paga em duas prestações iguais, uma no ato da compra e outra após 30 dias, sabendo-se que a taxa de financiamento é de 25% ao mês sobre o saldo devedor. Determinando o valor dessas prestações, encontramos:
a) R$400,00 b) R$405,00 c) R$425,00 d) R$450,00 e) R$500,00

Na viagem de volta da prova desse concurso, o autor já estava convencido do erro. Maiores detalhes sobre essa questão, e também sobre outras três questões que envolvem o mesmo princípio desta, serão vistos na pesquisa aplicada a 54 participantes e que será analisada no capítulo 4 do presente trabalho. Essas quatro questões foram incluídas com a intenção de mostrar que as pessoas de um modo geral apresentam dificuldades em perceber que os juros cobrados num empréstimo ou financiamento incidem apenas sobre os saldos devedores que restam imediatamente ao pagarmos cada prestação. A pesquisa também é composta de mais duas questões envolvendo dois dos erros da revista veja que serão vistos no capítulo 1. Essas duas questões foram incluídas com a intenção de mostrar que as pessoas apresentam dificuldades em perceber erros em publicações, ainda que esses erros envolvam assuntos elementares para o estudo da matemática financeira.

No ano de 1995, após ter sido monitor voluntário de estatística básica em 1994 na ETPC, surgiu o convite de um amigo para estudar e lecionar geometria no Programa Alternativo de Educação (PAE), no município de Japeri – RJ. Após essas duas oportunidades de ensinar, surgiu o desejo de fazer o curso de Licenciatura em Matemática. Nesse mesmo ano prestou o vestibular para um curso superior, para a UFRRJ, obtendo aprovação. Isso foi um motivo de muita alegria e de grande motivação para seguir a carreira de professor.

Ao iniciar o curso de matemática, mais uma surpresa, a matemática financeira não fazia parte da grade curricular como disciplina obrigatória, o que o obrigou a cursá-la como disciplina optativa no Instituto de Ciência Humanas e Sociais (ICHS). Por esse motivo, não poderia se esperar uma disciplina preocupada com o ensino e sim uma disciplina mais técnica voltada para administradores e economistas. Porém, a disciplina foi dada com bastante rigor e baseada numa apostila bem elaborada pela própria professora. Esse rigor refletiu-se na forma de cobrança nas provas, admitindo-se apenas certo ou errado nas resoluções de todas as questões, mesmo que o erro fosse apenas de cálculos. Não entrando no mérito sobre a forma de avaliar da professora, mesmo tendo obtido conceito B por erros que poderiam ser relevados, a questão é que, a partir desse momento, começa uma intolerância ao erro próprio e também ao de outros. Cabe, nesse momento, dizer que o autor, no papel de professor, não transferiu essa forma de avaliar para as futuras cobranças em avaliações. Essa intolerância o fez ser um leitor mais crítico e, com isso, observar erros elementares graves em relação a assuntos fundamentais ao estudo da matemática financeira. Serão mostrados no decorrer desse trabalho alguns desses erros, por exemplo, no capítulo 1 será mostrado que na capa de uma revista veja aparece a frase: “O brasileiro diz que é feliz na cama, mas debaixo dos lençóis...47% não sentem vontade de fazer sexo...” , quando na verdade era que 35% das mulheres e 12% dos homens entrevistados não sentiam tal desejo.

Ainda que esses erros sejam corrigidos em edições posteriores, como também será mostrado, muitos desses leitores não terão ciência dessas correções. Os erros são inevitáveis, mas todos, principalmente professores, autores de livros e pessoas que trabalham na redação de matérias veiculadas na mídia impressa e televisiva, devem procurar minimizá-los, para que as pessoas menos atentas não os reproduzam. É natural na convivência com as pessoas perceber seus erros, da mesma forma, sendo o autor leitor regular da revista veja percebeu alguns desses erros e, ao mostrá-los nesse trabalho, não teve a intenção de denegrir a imagem da revista e sim, de sugerir que seja reservado um maior espaço para a correção dos mesmos.

No capítulo 1 serão apresentados e discutidos os erros citados acima e também erros elementares graves, de outras publicações, em relação a assuntos fundamentais ao estudo da matemática financeira, sendo estes assuntos muito cobrados em avaliações.

Várias dissertações de mestrado abordam o tema matemática financeira, como se pode citar a dissertação de José Mateus Queiroz Sousa, intitulada *“MATEMÁTICA FINANCEIRA: Uma nova proposta para o Ensino Médio”*, na qual o autor, dentre outros assuntos tratados, procede a uma análise de livros didáticos a respeito da matemática financeira e também faz uma pesquisa com alunos sobre questões elementares ao estudo desta. Outra dissertação nesta mesma linha, de Rafael Guilherme Gallas, intitulada *“A Importância da Matemática Financeira no Ensino Médio e sua contribuição para a construção da Educação Financeira no cidadão”*, além de analisar livros didáticos faz uma revisão dos principais conceitos de Matemática Financeira usados no ensino médio e após isso desenvolve uma proposta de atividade abordando a Matemática Financeira de uma maneira simplificada, fundamentada principalmente em exemplos e materiais que chegam até os alunos, como panfletos de supermercado, envolvendo o contexto social em que este está inserido, como forma de incentivar o seu estudo e a consequente melhoria das aulas, com uma possível redução no desinteresse das aulas. Ainda se pode citar a dissertação de Evandro Conceição Ribeiro, intitulada “*Um Novo Olhar Sobre a Matemática Financeira no Ensino Médio*”, na qual o autor apresentada uma proposta de trabalho para o desenvolvimento da aprendizagem da

Matemática Financeira no Ensino Médio e nas Licenciaturas em Matemática, tendo como principal objetivo proporcionar um novo olhar sobre a disciplina sobre os diversos ângulos em que podem ser mostrados os assuntos de modo a desenvolver nos alunos uma vontade de aprender e avançar no estudo das várias ferramentas oferecidas pela Matemática Financeira que podem e devem ser usadas no dia-a-dia das pessoas.

A principal diferença da presente dissertação em relação a outras que tratam do mesmo tema é apresentar diversos erros em revistas e livros.

No capítulo 2 serão mostrados os resultados do Brasil em matemática no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, o *Programme for International Student Assessment* (PISA), visto que assuntos fundamentais ao estudo da matemática financeira são muito cobrados nessa avaliação, sendo inclusive incluídos como novidade no PISA 2012 o tópico *Estudo sobre letramento financeiro dos alunos* e no PISA 2015 o tópico *Competência Financeira*. Também nesse capítulo será feita uma análise do que há de matemática financeira no livro que faz parte de um importante programa educacional brasileiro: o Programa Educação Financeira nas Escolas, uma iniciativa da Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF), que tem o objetivo de oferecer ao jovem estudante a formação necessária para que possa tomar decisões financeiras conscientes e sustentáveis tanto para a vida pessoal quanto para o país. Ainda nesse capítulo serão apresentados alguns argumentos do professor Ilydio Pereira de Sá, apresentados em sua tese de doutorado intitulada *"A Educação Matemática Crítica e a Matemática Financeira na Formação de Professores"*, sobre a inclusão da disciplina Matemática Financeira, com características específicas, nas matrizes curriculares dos cursos de Licenciaturas em Matemática, dando ao professor de matemática condições para lecionar de forma adequada a disciplina no ensino básico, caso esta seja incorporada, como disciplina obrigatória, no currículo deste nível de ensino. Nesse sentido de inclusão da disciplina matemática financeira, ainda será mostrado nesse capítulo, uma proposta curricular da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) com vista à inclusão dessa disciplina no *Ensino Médio* e nas *Licenciaturas em Matemática*. Nessa oportunidade também serão acrescentadas algumas informações sobre um estudo da professora Ruth Margareth Hofmann, apresentadas em sua tese de doutorado intitulada *"Educação Financeira no Currículo Escolar: Uma Análise Comparativa das Iniciativas da Inglaterra e da França"*.

No capítulo 3 será feita uma abordagem do sistema de juros compostos com ênfase no entendimento de que este sistema está associado a todos os exemplos de sistemas de amortizações que serão apresentados e que, em qualquer destes, os juros incidem apenas sobre os saldos devedores que restam imediatamente ao pagarmos cada prestação. Nessa oportunidade serão apresentados exemplos que já foram cobrados em avaliações que possuem o nível semelhante ao dos exames do PISA e outros exemplos importantes para este estudo.

No capítulo 4 será apresentada a pesquisa já mencionada acima, acompanhada dos resultados e análises, tanto para os 25 participantes do nível médio como para os 29 do nível superior.

Finalmente serão feitas as conclusões finais sobre o presente trabalho.

Sugere-se aos leitores deste trabalho que, antes de prosseguirem em suas leituras, respondam, de acordo com o seu nível de formação, a um dos questionários (apêndice A ou B). O primeiro é para as pessoas que concluíram no máximo o ensino médio e o segundo, para aquelas que terminaram pelo menos o nível superior. Os dois se diferem apenas pelas duas primeiras perguntas, sendo as seis questões propostas, iguais. Procedendo assim, os leitores poderão ter um melhor entendimento dos objetivos desse trabalho.

I ERROS PUBLICADOS EM REVISTAS, SITES E LIVROS EM ASSUNTOS FUNDAMENTAIS AO ESTUDO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Neste capítulo serão apresentados e discutidos erros elementares graves publicados em revistas, sites e livros em relação a assuntos fundamentais ao estudo da matemática financeira, tais como: proporção, porcentagem, taxa de inflação e poder de compra. Serão apresentadas as correções desses erros e também que esses erros serviram de inspiração para a elaboração de questões de concursos para ingresso em universidades.

A grande quantidade de informações publicadas diariamente nos meios de comunicação expõe a população a uma enorme quantidade de dados, dificultando que estes sejam analisados com atenção. Tal análise torna-se relevante quando se supõe a hipótese de que dados veiculados pela mídia podem, eventualmente, ser transmitidos de forma incorreta ou mal analisada, inclusive por especialistas com grande experiência, como pode ser comprovado nos quatro casos apresentados a seguir.

1.1 Caso 1

Figura 1 Capa da edição nº 1692 da revista[1] veja de 21 de março de 2001

[1] Disponível em: <http://veja.abril.com.br/acervo/home.aspx>. Acesso em 19 de julho de 2015.

Uma pessoa não precisa estar muito informada a respeito da vida sexual dos brasileiros para perceber que há um erro na capa da revista, quando é escrito que **"47% dos brasileiros não sentem vontade de fazer sexo"**.

No corpo da reportagem, que começa na página 116, são explicados os detalhes da pesquisa, sendo relevante para esse estudo, o fato de esta ter sido aplicada a cerca de 3000 homens e mulheres, sendo que 12% dos homens se queixaram da falta de desejo e 35% das mulheres declararam não sentir nenhuma vontade de ter relações.

Na página 118 aparece a figura a seguir, que mostra os percentuais de entrevistados homens e mulheres que não se interessam por sexo.

Figura 2 Percentuais[2] de entrevistados homens e mulheres que não se interessam por sexo de acordo com a pesquisa publicada na edição n° 1692 da revista veja de 21 de março de 2001

Quando se faz um estudo estatístico pretende-se concluir algo a respeito da população baseando-se na amostra. Para isso, deve-se ter um cuidado muito grande na escolha desta. No exemplo em questão, os números de homens e de mulheres na amostra deveriam ter sido escolhidos levando-se em consideração as proporções de pessoas de cada sexo na população. Em nenhum momento da reportagem escrevem-se explicitamente quantos homens e quantas mulheres participaram da pesquisa. Porém, para se concluir o que está na figura 2, ou seja, "para cada homem que não tem vontade de fazer sexo há três mulheres na mesma situação",

[2] Disponível em: <http://veja.abril.com.br/acervo/home.aspx>. Acesso em 19 de julho de 2015.

baseando-se apenas no fato de que 35% são, aproximadamente, o triplo de 12%, levou-se em consideração a hipótese de que “o número de homens que participou da pesquisa é aproximadamente igual ao número de mulheres”, o que é equivalente a dizer que “o número de homens na população é aproximadamente igual ao número de mulheres”.

Com os dados do corpo da reportagem, o responsável pela redação da matéria concluiu o que aparece na capa da revista: **“47% dos brasileiros não sentem vontade de fazer sexo”.** Ao efetuar a adição de 12% com 35% para se chegar a essa conclusão, o redator cometeu um erro gravíssimo de matemática elementar, que foi se enganar na escolha das bases de cálculos sobre as quais esses percentuais deveriam ser aplicados. Nesse caso, a base de cálculo (100%) é de 50% tanto para os homens quanto para as mulheres, considerando-se a hipótese mencionada anteriormente.

Portanto, o correto seria calcular 12% de 50% mais 35% de 50%, concluindo que, de acordo com a pesquisa e com a hipótese considerada, **23,5%** dos brasileiros não sentem vontade de fazer sexo.

O erro mostrado na figura 1 e explicado anteriormente foi corrigido, na semana seguinte, na página 31 da edição nº 1693 da revista veja de 28 de março de 2001, como escrito a seguir:

> **CORREÇÃO**[3]**:** *Uma das chamadas de capa da última edição de* **VEJA** *informa que 47% dos brasileiros não têm vontade de fazer sexo, quando o correto é a informação que aparece no corpo da reportagem (“O melhor e o pior da vida a dois”, 21 de março): 35% das mulheres e 12% dos homens brasileiros estão enquadrados nessa situação.*

Figura 3 Publicação da correção do erro cometido pela revista na capa da edição n° 1692 de 21 de março de 2001

O autor dessa dissertação, ao ler a matéria acima na semana de sua publicação, comentou-a nas diversas turmas que lecionava e fez a observação de que a conclusão correta seria, de acordo com a pesquisa, que **23,5%** dos brasileiros não sentem vontade de fazer sexo, considerando que um mesmo número de homens e de mulheres tenha participado da pesquisa. Seus alunos, das turmas do ensino médio e das turmas preparatórias para os vestibulares de

[3] Disponível em: <http://veja.abril.com.br/acervo/home.aspx>. Acesso em 19 de julho de 2015.

ingresso nas universidades, tiveram uma grande surpresa quando, ao prestarem o Exame Nacional do Ensino Médio nesse mesmo ano de 2001, encontraram a questão a seguir.

(Questão[4] nº 38 da Prova 1 – Amarela do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM – Concurso de acesso 2002)

A capa de uma revista de grande circulação trazia a seguinte informação, relativa a uma reportagem daquela edição:

"O brasileiro diz que é feliz na cama, mas debaixo dos lençóis 47% não sentem vontade de fazer sexo".

O texto abaixo, no entanto, adaptado da mesma reportagem, mostra que o dado acima está errado:

"Outro problema predominantemente feminino é a falta de desejo − 35% das mulheres não sentem nenhuma vontade de ter relações. Já entre os homens, apenas 12% se queixam de falta de desejo".

Considerando que o número de homens na população seja igual ao de mulheres, a porcentagem aproximada de brasileiros que não sentem vontade de fazer sexo, de acordo com a reportagem, é
(A) 12% (B) 24% (C) 29% (D) 35% (E) 50%.

Portanto, a resposta correta é **24%** (letra **B**), de acordo com o que já foi explicado.

1.2 Caso 2


DESCE

FABRICANTES DE PAPEL HIGIÊNICO

▼ Os rolos de algumas marcas foram reduzidos de 40 para 30 metros, sem diminuição de preço. Ou seja, o consumidor está pagando 25% a mais pelo produto.

Figura 4 Revista[5] veja edição nº1713 de 15 de agosto de 2001–página 31

O responsável pela redação desse texto da revista veja provavelmente raciocinou que o consumidor está perdendo 10m, o que corresponde a 25% de 40m, concluindo que **"o consumidor está pagando 25% a mais pelo produto".** Na verdade, o consumidor está levando para casa 25% a menos do produto. Houve um engano na escolha da base de cálculo

[4] Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2002/2002_amarela.pdf>. Acesso em 19 de julho de 2015.

[5] Disponível em: <http://veja.abril.com.br/acervo/home.aspx>. Acesso em 19 de julho de 2015.

(100%), pois para saber o percentual que o consumidor está pagando a mais pelo produto ele deveria escolher 30m sendo a base de cálculo, ou seja, ele deveria calcular o percentual que 10m corresponde de 30m, que nos fornece 33,333...%, ou seja, aproximadamente **33,33%**. Por exemplo, se um rolo de 40m custa 40 centavos, então cada metro custa **1** centavo. Como os rolos foram diminuídos para 30m e continuaram custando 40 centavos, tem-se que cada metro passou a custar 1,333...centavo, ou seja, aproximadamente **33,33%** a mais.

Portanto, a conclusão correta é que o consumidor está pagando aproximadamente **33,33%** a mais pelo produto.

O erro mostrado acima foi corrigido, na semana seguinte, na página 31 da edição 1714 da revista veja de 22 de agosto de 2001, como escrito a seguir:

CORREÇÃO[6]**:** *O consumidor está pagando **33,33%** a mais pelo rolo do papel higiênico, e não **25%**, como foi publicado na seção Sobe e Desce (15 de agosto).*

Figura 5 Publicação da correção do erro cometido pela revista na edição n° 1713 de 15 de agosto de 2001

O autor dessa dissertação, ao ler a matéria acima na semana de sua publicação, comentou-a nas diversas turmas que lecionava e fez a observação de que a conclusão correta seria a de que o consumidor está pagando aproximadamente **33,33%** a mais pelo rolo do papel higiênico. No ano seguinte, essa situação descrita na revista foi utilizada para a elaboração de uma questão do vestibular da UFMG, que será apresentada a seguir. Não necessariamente, o elaborador da questão se inspirou no erro da revista, visto que na época desses acontecimentos, os fabricantes de alguns produtos, impedidos de aumentarem os preços destes, utilizavam-se da técnica de diminuir a quantidade, o que é uma maneira disfarçada de praticar tais aumentos. Foi muito comentada nos meios de comunicação, a informação de que os fabricantes de papel higiênico estavam diminuindo os rolos de 40m para 30m.

[6] Disponível em: <http://veja.abril.com.br/acervo/home.aspx>. Acesso em 19 de julho de 2015.

(Questão[7] nº 37 da Prova de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG - Concurso de acesso 2003) Um fabricante de papel higiênico reduziu o comprimento dos rolos de 40m para 30m. No entanto o preço dos rolos de papel higiênico, para o consumidor, manteve-se constante. Nesse caso, é CORRETO afirmar que, para o consumidor, o preço do metro de papel higiênico teve um aumento: a) inferior a 25% b) superior ou igual a 30% c) igual a 25% d) superior a 25% e inferior a 30%.

Portanto, a resposta correta é "**superior ou igual a 30%**" (letra **B**), de acordo com o que já foi explicado.

Esse erro da revista foi utilizado para a elaboração de uma das questões da pesquisa que foi aplicada a 54 participantes e que os resultados serão apresentados e analisados no capítulo 4. Na oportunidade, será visto que alguns participantes questionaram que o consumidor não está pagando nem a mais e nem a menos pelo produto, pois não houve aumento e nem diminuição de preços. Porém, subentende-se que o percentual a que o texto da revista se refere é o **percentual relativo** à nova situação, que é equivalente ao valor pago depois da diminuição em relação ao valor pago antes da diminuição, por metro do produto, o que ficou bem claro na escrita da questão da UFMG.

Num fórum[8] de discussão de resolução de problemas na internet aparece uma situação inusitada sobre a resolução apresentada por um professor que discordou da resposta da questão da UFMG comentada anteriormente.

Eis a resolução do professor:

40 - 10 = 30 observe 10 x100 : 40 = 1000 : 40 = 25 Então aumento de 25% Logo a resposta proposta é INCORRETA, pois o aumento NÃO é igual ou superior a 30%.

A, outro participante do fórum, apresentou uma resolução correta e fez o seguinte comentário: **"***para o prof. R, da resposta anterior: 25% é o quanto diminuiu o "comprimento"* do rolo, tem certeza de que é professor!?**"**.

[7] Disponível em: <http://www.exatas.net/ufmgmat2003.pdf>. Acesso em 19 de julho de 2015.

[8] Disponível em: <https://br.answers.yahoo.com/question/index?qid=20101017094404AAIWUGF>. Acesso em 19 de julho de 2015.

Desconsiderando-se o tratamento desrespeitoso de A com o Sr. R, esse erro do professor, que também foi cometido pela revista, serve para mostrar o quanto situações tão simples do dia a dia podem confundir até mesmo pessoas que possuem formação superior, grande experiência profissional e de vida.

1.3 Caso 3

"Quem esquece o passado está condenado a repeti-lo." Raras vezes o aforismo do filósofo hispano-americano George Santayana (1863-1952) foi tão útil quanto no Brasil deste fim de 2011. O passado de caos, sofrimento e descontrole provocado pela inflação está sendo lentamente esquecido. Por isso, o país pode estar se condenando a repetir aquela insana experiência coletiva que, no auge de sua força destrutiva, em 1989, chegou a produzir uma inflação anual de 1973%. O recorde mensal seria batido em março do ano seguinte, quando a taxa alcançou 82%. Os 97 milhões de brasileiros com menos de 30 anos só sabem de ouvir falar e não sentiram o que foi a guerra diária de seus pais em uma economia irracional em que o dinheiro perdia poder de compra a cada hora. Uma nota de 100 valia menos de 20 no fim do mês.

Figura 6 Revista veja[9] edição nº2237 de 5 de outubro de 2011–página 85

Apesar de não estar explícito no texto acima, subentende-se que ele se refere ao valor da nota no final do mês em relação ao início do mês, ou seja, o seu valor relativo, que tem a ver com o seu poder de compra.

O responsável pela redação desse texto da revista veja provavelmente raciocinou que - se a inflação no mês de março de 1990 foi de 82%, então uma nota de 100 passou a valer

9 Disponível em: <http://veja.abril.com.br/acervo/home.aspx>. Acesso em 19 de julho de 2015.

100 – 82% de 100, ou seja, 100 – 82 = **18**, concluindo que "**uma nota de 100 valia menos de 20 no fim do mês"**. Mais uma vez houve um engano na escolha da **base de cálculo (100%)**, pois para saber quanto uma nota de 100 valia no final do mês de março em relação ao início desse mês, ele deveria calcular quanto vale 100 em relação a 100 + 82% de 100, ou seja, qual é o percentual que representa 100 em relação a 182, o que é **aproximadamente 54,95%**.

Portanto, **uma nota de 100 valia 54,95 unidades monetárias no final do mês de março em relação ao início desse mês**, perdendo **45,05%** do seu poder de compra nesse mês.

O erro mostrado acima foi corrigido, na semana seguinte, na página 59 da edição 2238 da revista veja de 12 de outubro de 2011, como escrito a seguir:

> **CORREÇÃO**[10]**:** *em1989, no auge da hiperinflação, uma nota de 100 valia pouco mais de 50 no fim do mês, e não menos de 20 ("O monstro está na engorda", 5 de outubro).*

Figura 7 Publicação da correção do erro cometido pela revista na edição n° 2237 de 5 de outubro de 2011

Esse erro da revista foi utilizado para a elaboração de uma das questões da pesquisa que foi aplicada a 54 participantes e que os resultados serão apresentados e analisados no capítulo 4. Na oportunidade, será visto que alguns participantes fizeram alguns questionamentos a respeito do texto e da pergunta feita.

O autor dessa dissertação, ao ler a matéria acima na semana de sua publicação, comentou-a nas diversas turmas que lecionava e fez a observação de que a conclusão correta seria a de que uma nota de 100 valia 54,95 unidades monetárias no final do mês de março em relação ao início desse mês.

Fazendo uma busca na internet não se encontra nada sobre o fato de esse erro ter inspirado a formulação de alguma questão para algum concurso, mas encontram-se dois

[10] Disponível em: <http://veja.abril.com.br/acervo/home.aspx>. Acesso em 19 de julho de 2015.

sites[11] que reproduziram a reportagem sem perceber a existência do erro grave cometido pela revista, como já foi mostrado anteriormente.

Um esclarecimento: ambos os *sites* reproduziram em 3 de outubro de 2011 essa reportagem da revista em suas páginas, sendo que esta foi publicada com data de 5 de outubro desse ano, o que pode parecer uma contradição, mas a revista já é disponibilizada para comercialização no final de semana que antecede a data de publicação impressa.

Esse erro do profissional de veja, que é um especialista com grande experiência na área econômica, e também os erros dos responsáveis pelos *sites* ao reproduzirem a reportagem sem notar tais erros, servem para mostrar o quanto situações tão simples podem enganar até mesmo pessoas que possuem formação superior e grande experiência profissional e de vida.

Encontra-se um texto na internet[12] que serve para mostrar a gravidade do erro cometido nessa reportagem que está sendo discutida.

Eis um resumo do que está escrito:

"Ao longo de quase 20 anos do Plano Real, a inflação acumulada desde 1/07/1994 até 1/2/2014, medida pelo IPCA, foi de 347,51%. Assim, um produto que custava R$1,00 em 1994 custa hoje R$4,47".

O matemático financeiro José Dutra Vieira Sobrinho afirma que, em decorrência desse fato, a cédula de R$100,00 perdeu 77,65% do seu poder de compra desde o dia em que passou a circular. Com isso, o poder aquisitivo da nota de R$100,00 é hoje de apenas R$22,35.

A perda desse poder aquisitivo é calculada por uma fórmula matemática na qual se divide o valor nominal da moeda pela taxa de inflação somada a 1."

Na verdade, não é **a perda desse poder aquisitivo** que é calculada pela fórmula dada acima, e sim, **o valor do poder aquisitivo após a perda** causada pela inflação. Dessa forma, há um erro no texto redigido acima.

---

[11] Disponíveis em: <http://www.cdlcampina.org.br/portal/index.php/principal/80-noticias-gerais/583-o-monstro-esta-na-engorda> e <http://avaranda.blogspot.com.br/2011_10_03_archive.html>. Acessos em 19 de julho de 2015.

[12] Disponível em: <http://economia.uol.com.br/financas-pessoais/noticias/redacao/2014/02/18/apos-20-anos-real-perde-poder-de-compra-e-nota-de-r-100-vale-so-r-2235.htm>. Acesso em 19 de julho de 2015.

Aplicando, já com a observação feita, a fórmula dada, obtém-se $\frac{R\$100{,}00}{347{,}51\%+1}=\frac{R\$100{,}00}{3{,}4751+1}=\frac{R\$100{,}00}{4{,}4751}$, que é aproximadamente igual ao valor de R$22,35, dado no texto.

É fácil entender que uma pessoa que possui uma nota de **R$100,00**, para não perder o poder de compra diante de uma inflação acumulada de 347,51%, deveria passar a possuir o equivalente a R$100,00 mais 347,51% de R$100,00, ou seja, **R$447,51**. E como R$100,00 em relação a R$447,51 é aproximadamente igual a 22,35%, tem-se que o valor do poder aquisitivo da nota de R$100,00, nas condições apresentadas, é de 22,35% de R$100,00, ou seja, **R$22,35** (está de acordo com a afirmação do matemático financeiro José Dutra Vieira Sobrinho).

No capítulo 3 será explicado como calcular a inflação de 347,51% em quase 20 anos do Plano Real, de acordo com o que foi enunciado anteriormente.

Com essa explicação dada anteriormente, pode-se perceber a gravidade do erro cometido na revista. Para que uma nota de **100** passe a valer **menos de 20** no fim do mês, em relação ao início deste, a inflação do referido mês deveria ser **mais de 400%** e não apenas 82% como no texto da revista.

Os erros elementares de matemática da revista veja que foram mostrados nesse capítulo, ainda que corrigidos na edição seguinte da revista, bem como os demais erros mostrados, contribuem de forma negativa para educação no nosso país, ainda mais quando se observa os resultados ruins obtidos em matemática pelo Brasil nas avaliações do PISA.

Diante de tal cenário, que mostra a falta de noções básicas de matemática dos estudantes brasileiros e também de outras pessoas da nossa população, é razoável prever-se as dificuldades desses alunos e pessoas em analisarem corretamente as notícias que são publicadas nos meios de comunicação e, também, as dificuldades dos nossos alunos de entenderem e solucionarem *problemas matemáticos da vida real,* como são esperados deles nas avaliações a que são submetidos.

1.4 Caso 4

Entender como se calcula o Imposto de Renda (I.R.) que será descontado mensalmente da renda de uma pessoa, na fonte, é uma tarefa relativamente simples, mas costuma causar embaraços na mente de muitas pessoas, até mesmo de pessoas que possuem um bom conhecimento de matemática. Será analisado se há algum erro nos trechos em negrito dos dois textos a seguir. Textos extraídos dos blocos 2 e 3 do livro[13] *"Educação Financeira nas Escolas"* 1ª Edição Revisada – Brasília – D.F. CONEF, 2013.

IMPOSTO DE RENDA
É um imposto federal que incide sobre valores recebidos por todos os contribuintes que tenham obtido um ganho acima de um determinado valor. Anualmente, esse contribuinte é obrigado a prestar informações pela Declaração de Ajuste Anual – DIRPF, para apurar possíveis débitos ou créditos (complementação ou restituição de imposto). (...) **O valor do imposto de renda é calculado com base na renda da pessoa, quanto maior a renda, mais ela paga de imposto.** Existem deduções que podem ser feitas do imposto devido, é o caso de dependentes, contribuições previdenciárias, despesas médicas e com educação etc. Esse imposto é descontado na fonte, ou seja, o empregado recebe seu salário com o imposto de renda já descontado. (...) - Bloco 2 – página 38.

IR = Imposto de Renda. Este imposto (...). **A cobrança do imposto é proporcional à renda da pessoa.** Em 2013, as pessoas que ganhavam até R$1.710,78 por mês estavam "isentas" do pagamento de imposto de renda, isto é, não pagavam nada, desde que essa fosse a sua única fonte de renda. (...). Bloco 3 – página 57.

Como informado no texto do bloco 3, em 2013, as pessoas que ganhavam até R$1.710,78 por mês estavam "isentas" do pagamento de I.R., isto é, não pagavam nada, desde que essa fosse a sua única fonte de renda. A partir de 01/04/15, para ficarem isentos do pagamento desse imposto, as pessoas podem ganhar até R$1.903,98, como pode ser conferido no quadro 1 a seguir.

[13] Disponível para download em: <http://www.edufinanceiranaescola.gov.br/materiais/>. Acesso em 06 de agosto de 2015.

Quadro 1 Tabela[14] do Imposto de Renda - vigência a partir de 01.04.2015

(Medida Provisória 670/2015)

Base de Cálculo (R$)	Alíquota (%)	Parcela a Deduzir do IR (R$)
Até 1.903,98	-	-
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5%	142,80
De 2.826,66 até 3.751,05	15%	354,80
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5%	636,13
Acima de 4.664,68	27,5%	869,36

Dedução por dependente: R$ 189,59 (cento e oitenta e nove reais e cinquenta e nove centavos), a partir do mês de abril do ano-calendário de 2015.

Quadro 2 Rendimentos e outras informações dos servidores federais A e B (mês de abril de 2015)

Informações	**A**	**B**
Rendimento Bruto (em R$) (incluindo auxílio-alimentação e auxílio-transporte)	6.768,95	6.141,12
Auxílio-alimentação (em R$)	373,00	373,00
Auxílio-transporte (em R$)	-	219,81
Contribuição para o Plano de Seguridade Social (em R$) (**11%** da diferença entre o rendimento bruto e a soma do auxílio-alimentação com o auxílio-transporte)	703,55	610,31
Base de Cálculo do Imposto de Renda (em R$)	5.692,40	4.938,00
Número de dependentes	1	0
Imposto de Renda Retido na Fonte (em R$)	**643,91**	**488,59**

Fonte: Valores reais extraídos dos comprovantes de rendimentos de dois servidores federais.

Baseado nos quadros 1 e 2, é possível fazer os cálculos para comprovar que os impostos de renda pagos pelos servidores A e B estão corretos.

[14] Disponível em: <http://www.portaltributario.com.br/guia/tabelairf.html>. Acesso em 19 de julho de 2015.

1.4.1 Explicando o cálculo do imposto de renda retido na fonte - servidor A

Na página 38 do bloco 2 do livro *"Educação Financeira nas Escolas"*, citado anteriormente, está escrito que o imposto de renda é um imposto federal que incide sobre valores recebidos por todos os contribuintes que tenham obtido um ganho acima de um determinado valor e que existem deduções que podem ser feitas do imposto devido, tais como: dependentes, contribuições previdenciárias, etc. O texto não ficou bem claro para um leitor pouco familiarizado com essa linguagem, pois pode dar a impressão que se deve primeiro calcular o imposto devido sobre o rendimento bruto e depois fazer as tais deduções, mas, nesse caso, à soma das deduções também deveria ser descontada a alíquota correspondente à mesma base de cálculo do imposto devido. Isso poderia gerar um erro caso o rendimento bruto caísse numa base de cálculo e a diferença entre o rendimento bruto e as deduções caísse em outra. Ficaria melhor se o texto informasse que "o imposto de renda incide sobre a base de cálculo, sendo esta, a diferença entre o rendimento bruto e as deduções mencionadas e outras deduções de mesma natureza" e que, após a aplicação da alíquota correspondente a essa base, ainda deveria subtrair a parcela a deduzir correspondente para se chegar ao valor do imposto de renda retido na fonte. Note que a base de cálculo do servidor A na verdade é R$ 5.692,40 – R$ 189,59 (dedução por dependente informada no quadro 1) e não apenas os R$ 5.692,40 informado no comprovante de rendimento desse servidor. Assim, a verdadeira base de cálculo é R$ 5.502,81. Como esse valor está acima de R$ 4.664,68, deve-se aplicar a alíquota de 27,5% sobre esse valor e subtrair a parcela a deduzir de R$ 869,36. Portanto, o **imposto de renda retido na fonte** é de 27,5% de R$ 5.502,81 - R$ 869,36, que é igual a **R$ 643,91** (valor informado no quadro 2).

Observe que o auxílio-alimentação e o auxílio-transporte são deduções de mesma natureza da contribuição para o plano de seguridade social (contribuições previdenciárias) e dos dependentes. Obviamente, sobre todos esses valores não se pode pagar imposto de renda.

1.4.2 Explicando o cálculo do imposto de renda retido na fonte - servidor B

A base de cálculo informada no comprovante de rendimento do servidor B já é a correta, pois esse servidor não possui dependente. Como o valor dessa base é R$ 4.938,00 e está acima de R$ 4.664,68, deve-se aplicar a alíquota de 27,5% sobre esse valor e subtrair a parcela a deduzir de R$ 869,36. Portanto, o **imposto de renda retido na fonte** é de 27,5% de R$ 4.938,00 - R$ 869,36, que é igual a **R$ 488,59** (valor informado no quadro 2).

1.4.3 Cálculo da parcela a deduzir do imposto de renda

Antes de responder se há algum erro nos trechos em negrito dos dois textos dados no início da seção **1.4**, faz-se necessário uma explicação sobre a importância da parcela a deduzir do I.R..

Essa parcela a deduzir tem por objetivo facilitar os cálculos do imposto de renda, pois se esta não fosse informada, deveria se proceder da seguinte forma para se calcular, por exemplo, o imposto do servidor B:

(1°) 7,5% de (2.826,65 – 1.903,98) $\cong$ 69,20
(2°) 15% de (3.751,05 – 2.826,65) $\cong$ 138,66
(3°) 22,5% de (4.664,68 – 3.751,05) $\cong$ 205,57
(4°) 27,5% de (4.938,00 – 4.664,68) $\cong$ 75,16

A soma desses valores encontrados é o imposto de renda, retido na fonte, do servidor B, isto é, R$ 69,20 + R$ 138,66 + R$ 205,57 + R$ 75,16 = **R$ 488,59**.

Sendo que com a parcela a deduzir basta fazer 27,5% de R$ 4.938,00 - R$ 869,36 = **R$ 488,59.**

Se no cálculo do imposto de renda aplicasse a alíquota apenas sobre a base de cálculo e não subtraísse a parcela a deduzir poderia ocorrer de uma pessoa com menor base de cálculo ter um rendimento líquido, após deduzir apenas o I.R., maior do que o de uma pessoa com maior base de cálculo. Por exemplo, uma pessoa que tem base de cálculo R$ 4.600,00 teria rendimento líquido de R$ 4.600,00 – 22,5% de R$ 4.600,00 $\cong$ **R$ 3.565,00** e outra pessoa que tem base de cálculo R$ 4.700,00 teria rendimento líquido de R$ 4.700,00 – 27,5% de R$ 4.700,00 $\cong$ **R$ 3.407,50**. Observe que a primeira pessoa possui menor base de cálculo (R$ 4.600,00 < R$ 4.700,00), mas possuiria maior rendimento líquido (R$ 3.565,00 > R$ 3.407,50), o que seria algo totalmente contrário à lógica Ao subtrair a parcela a deduzir isso não ocorreria, pois sempre uma pessoa com maior base de cálculo teria um rendimento líquido, após deduzir apenas o I.R., maior do que o de uma pessoa com menor base de cálculo.

Calculando a parcela a deduzir para uma Base de Cálculo de valor **X** reais e maior do que R$ 4.664,68:

A alíquota de 27,5% só poderia incidir sobre a diferença **X** - 4.664,68. Assim, ao aplicar essa alíquota sobre **X** reais está sendo cobrado a mais de I.R. o seguinte valor em reais: 27,5% de 1.903,98 + (27,5% - 7,5%) de (2.826,65 - 1.903,98) + (27,5% - 15%) de (3.751,05 – 2.826,65) + (27,5% - 22,5%) de (4.664,68 – 3.751,05) = 523,60 + 184,53 + 115,55 + 45,68 = **869,36**. Como esse valor está sendo cobrado a mais, ele deve ser deduzido, por isso tem-se uma **Parcela a Deduzir** de **R$ 869,36** (valor informado no quadro 1).

Para um valor de R$ 3.751,06 até R$ 4.664,68 basta calcular 22,5% de R$ 1.903,98 + (22,5% - 7,5%) de (R$ 2.826,65 – R$ 1.903,98) + (22,5% - 15%) de (R$ 3.751,05 – R$ 2.826,65) = R$ 428,40 + R$ 138,40 + R$ 69,33 ≅ **R$ 636,13** (valor informado no quadro 1).

Para um valor de R$ 2.826,66 até R$ 3.751,05 basta calcular 15% de R$ 1.903,98 + (15% - 7,5%) de (R$ 2.826,65 – R$ 1.903,98) = R$ 285,60 + R$ 69,20 ≅ **R$ 354,80** (valor informado no quadro 1).

Para um valor de R$ 1.903,99 até R$ 2.826,65 basta calcular 7,5% de R$ 1.903,98 ≅ **R$ 142,80** (valor informado no quadro 1).

1.4.4 Respostas se há algum erro nos trechos em negrito dos dois textos dados no início da seção 1.4

Para dar as respostas se há algum erro nos trechos em negrito dos dois textos dados no início da seção 1.4**,** faz-se necessário conhecer algumas definições dadas pelo próprio livro.

> A **renda bruta** é a receita integral que as pessoas recebem por seu trabalho, sejam empregados, autônomos ou empresários, antes de serem feitos os descontos devidos, como o recolhimento da contribuição para a previdência social, o imposto de renda etc.
> A **renda líquida** é o resultado, após os devidos abatimentos à renda bruta. - Bloco 2 – página 35.

> **Contribuições previdenciárias:** geradas por empregadores e empregados que destinam parte de sua renda ao governo (por meio da Receita Federal do Brasil) para que, quando não possam mais trabalhar (por velhice, doença, invalidez ou por outro motivo), continuem recebendo algum pagamento mensal. - Bloco 3 – página 176.

Com as definições anteriores e com as explicações dadas anteriormente sobre o imposto de renda, já se pode responder a primeira parte do que foi proposto no início da seção 1.4, ou seja, *"O valor do imposto de renda é calculado com base na renda da pessoa, quanto maior a renda, mais ela paga de imposto"* Bloco 2 – página 38.

Resposta da 1ª parte: De acordo com as definições dadas anteriormente, as contribuições previdenciárias são geradas por empregadores e empregados que destinam **parte de sua renda** ao governo. Com isso, deduz-se que, para o livro, as contribuições previdenciárias fazem parte da renda da pessoa. Dessa forma, subtende-se que ao utilizar a expressão **renda da pessoa**, o livro está considerando que essa renda é a renda bruta, porém, descontadas as receitas não tributáveis. Portanto, **há um erro** em *"O valor do imposto de renda é calculado com base na renda da pessoa, quanto maior a renda, mais ela paga de imposto",* pois pode acontecer de uma pessoa ter maior renda e pagar menos imposto de renda, bastando para isso que as deduções façam a base de cálculo do I.R. dessa maior renda ser menor do que a da renda menor, pois como já visto, o I.R. é calculado sobre essa base. Assim, nota-se que o livro fez uma confusão entre renda da pessoa e base de cálculo do I.R.. O enunciado ficaria correto assim: *"O valor do imposto de renda é calculado sobre a base de cálculo do I.R. da pessoa* (já descontadas as deduções dos dependentes)*, quanto maior essa base de cálculo, mais ela paga de imposto"*.

Com as definições anteriores e com as explicações dadas anteriormente sobre o imposto de renda, já se pode responder a segunda parte do que foi proposto no início da seção 1.4, ou seja, *"A cobrança do imposto é proporcional à renda da pessoa"*- Bloco 3 – página 57.

Resposta da 2ª parte: Para mostrar que **há um erro** na 2ª parte do enunciado, basta analisar a seguinte *proposição condicional* a seguir, que possui valor lógico verdadeiro:
"Se a cobrança do imposto é proporcional à renda da pessoa, então quanto maior a renda, mais ela paga de imposto".

1° caso: ocorrendo a proposição 'a cobrança do imposto é proporcional à renda da pessoa', necessariamente (é verdade que), 'quanto maior a renda, mais ela paga de imposto'. Ou seja, caso ocorra a proposição 'a cobrança do imposto é proporcional à renda da pessoa' e não ocorrer a proposição 'quanto maior a renda da pessoa, mais ela paga de imposto', contrariaria a proposição condicional dada, o que não pode ocorrer, pois ela possui valor lógico verdadeiro;

2° caso: não ocorrendo a proposição 'a cobrança do imposto é proporcional à renda da pessoa', pode ocorrer ou não ocorrer a proposição 'quanto maior a renda, mais ela paga de imposto' que não contraria a veracidade da proposição condicional dada, ou seja, não se pode afirmar que a proposição condicional dada seja falsa neste caso, independentemente de ocorrer ou não ocorrer a proposição 'quanto maior a renda, mais ela paga de imposto'. Como uma proposição qualquer só pode assumir dois valores lógicos (verdadeiro ou falso) e não se pode afirmar que ela seja falsa, tem-se, neste caso, que a proposição condicional é também verdadeira;

3° caso: ocorrendo a proposição 'quanto maior a renda da pessoa, mais ela paga de imposto', pode ter ocorrido ou não a proposição 'a cobrança do imposto é proporcional à renda da pessoa', pois esta ocorrendo, necessariamente, 'quanto maior a renda da pessoa, mais ela paga de imposto' e, não ocorrendo, pode ocorrer o fato de 'quanto maior a renda da pessoa, mais ela paga de imposto';

4° caso: não ocorrendo a proposição 'quanto maior a renda da pessoa, mais ela paga de imposto', necessariamente (é verdade que), 'a cobrança do imposto não é proporcional à renda da pessoa'.

Conclusão: Como já foi mostrado na 1ª parte que não é verdade que *"quanto maior a renda, mais a pessoa paga de imposto*", tem-se que **não é verdade** que **"***a cobrança do imposto é proporcional à renda da pessoa***"**. (*contrapositiva* da proposição condicional inicial).

Nessa segunda parte, ainda que a renda da pessoa fosse entendida como a base de cálculo do I.R., a afirmação *"A cobrança do imposto é proporcional à base de cálculo do I.R. da pessoa"* ainda estaria errada, bastando para isso utilizar como exemplo os cálculos dos impostos, retidos na fonte, dos servidores A e B, vistos em 1.4.1 e 1.4.2, pois:

$$\frac{643{,}91}{5.502{,}81} \neq \frac{488{,}59}{4.938{,}00}$$

Ao acreditar-se na veracidade da proposição a seguir (o que não é verdade, como já mostrado anteriormente):

"O valor do imposto de renda é calculado com base na renda da pessoa, quanto maior a renda, mais ela paga de imposto",

E mesmo com a alteração a seguir (que a torna verdadeira):

"O valor do imposto de renda é calculado sobre a base de cálculo do I.R. da pessoa (já descontadas as deduções dos dependentes)*, quanto maior essa base de cálculo, mais ela paga de imposto".*

A proposição a seguir continuaria tendo valor lógico falso, pois já foi mostrado anteriormente que a proposição "*a cobrança do imposto é proporcional à renda da pessoa"* é falsa:

"Se quanto maior a *base de cálculo do I.R.* *da pessoa* (já descontadas as deduções dos dependentes)*, mais ela paga de imposto, então a cobrança do imposto é proporcional à renda da pessoa"*.

Portanto, como já se viu anteriormente, a proposição "*quanto maior a* *base de cálculo do I.R.* *da pessoa* (já descontadas as deduções dos dependentes)*, mais ela paga de imposto"* sendo verdadeira, e como "*a cobrança do imposto é proporcional à renda da pessoa"* é necessariamente falsa, como já mostrado anteriormente, tem-se que a veracidade da proposição "*quanto maior a* *base de cálculo do I.R.* *da pessoa* (já descontadas as deduções dos dependentes)*, mais ela paga de imposto"* **não é suficiente para garantir** a veracidade da proposição "*a cobrança do imposto é proporcional à renda da pessoa"*.

O erro cometido pelo livro citado pode dever-se à crença na veracidade da proposição *"Se quanto maior a* *base de cálculo do I.R.* *da pessoa* (já descontadas as deduções dos dependentes)*, mais ela paga de imposto, então a cobrança do imposto é proporcional à renda da pessoa"*, o que **não é verdade** como visto anteriormente.

No capítulo 2 será feita uma análise do que há de matemática financeira no livro visto anteriormente, livro este que faz parte de um importante programa educacional brasileiro: o Programa Educação Financeira nas Escolas, uma iniciativa da Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF), que tem o objetivo de oferecer ao jovem estudante a formação necessária para que possa tomar decisões financeiras conscientes e sustentáveis tanto para a vida pessoal quanto para o país.

Observação: o livro disponível no *site* e a versão impressa que constam das referências bibliográficas estão em sua 1ª EDIÇÃO REVISADA. No *site* não há nenhuma informação sobre esses erros mostrados anteriormente.

Para os interessados, encontra-se disponível no endereço eletrônico[15] da receita federal do Brasil um simulador atualizado para o cálculo de imposto de renda.

O leitor familiarizado com o uso de planilhas eletrônicas pode montar um simulador para o cálculo do imposto de renda de acordo com suas próprias necessidades.

[15] Disponível em: <http://www.receita.fazenda.gov.br/Aplicacoes/ATRJO/Simulador/simulador.asp?tipoSimulador=M>. Acesso em 20 de julho de 2015.

II AVALIAÇÃO INTERNACIONAL DO ENSINO, EDUCAÇÃO FINANCEIRA E MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO BÁSICO E NAS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA

Nesse capítulo serão mostrados os resultados do Brasil em matemática no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, o *Programme for International Student Assessment* (PISA), visto que assuntos fundamentais ao estudo da matemática financeira são muito cobrados nessa avaliação, sendo inclusive incluído como novidade no PISA 2012 o tópico *Estudo sobre letramento financeiro dos alunos* e no PISA 2015 o tópico *Competência Financeira*. Também nesse capítulo será feita uma análise do que há de matemática financeira no livro que faz parte de um importante programa educacional brasileiro: o Programa Educação Financeira nas Escolas, uma iniciativa da Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF), que tem o objetivo de oferecer ao jovem estudante a formação necessária para que possa tomar decisões financeiras conscientes e sustentáveis tanto para a vida pessoal quanto para o país. Nessa oportunidade também serão acrescentadas algumas informações sobre um estudo da professora Ruth Margareth Hofmann, apresentadas em sua tese de doutorado intitulada *"Educação Financeira no Currículo Escolar: Uma Análise Comparativa das Iniciativas da Inglaterra e da França"*. Ainda nesse capítulo serão apresentados alguns argumentos do professor Ilydio Pereira de Sá, apresentados em sua tese de doutorado intitulada *"A Educação Matemática Crítica e a Matemática Financeira na Formação de Professores"*, sobre a inclusão da disciplina Matemática Financeira, com características específicas, nas matrizes curriculares dos cursos de Licenciaturas em Matemática, dando ao professor de matemática condições para lecionar de forma adequada a disciplina no ensino básico, caso esta seja incorporada, como disciplina obrigatória, no currículo deste nível de ensino. Nesse sentido de inclusão da disciplina matemática financeira, ainda será mostrado nesse capítulo, propostas curriculares da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) com vista à inclusão dessa disciplina aos diferentes segmentos do ensino: *Ensino Fundamental, Ensino Médio e Licenciatura em Matemática*. Já estão concluídas as propostas de inclusões da referida disciplina nestes dois últimos segmentos e está em fase de elaboração uma proposta para a sua inclusão no primeiro segmento.

2.1 O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA)

Na internet[1] encontra-se uma explicação sobre o que é o Pisa.

Eis um resumo do que está escrito:

> *O* Programme for International Student Assessment *(Pisa) - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - é uma iniciativa de avaliação comparada, aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países.*
>
> *O programa é desenvolvido e coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Em cada país participante há uma coordenação nacional. No Brasil, o Pisa é coordenado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep).*
>
> *Em 2015, a aplicação do Pisa será 100% por meio do computador, com foco em Ciências.* ***Novas áreas do conhecimento*** *entram nas avaliações:* ***Competência Financeira*** *e Resolução Colaborativa de Problemas.*

Já havia sido incluído como novidade no PISA 2012 o tópico ***Estudo sobre letramento financeiro*** *dos alunos*, como pode ser conferido na internet[2].

O objetivo[3] do Pisa é produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação nos países participantes, de modo a subsidiar políticas de melhoria do ensino básico. A avaliação procura verificar até que ponto as escolas de cada país participante estão preparando seus jovens para exercer o papel de cidadãos na sociedade contemporânea.

A OCDE é formada por 34 países membros. A cada 3 anos, desde o ano 2000, esta vem desenvolvendo e coordenando o PISA, um Programa Internacional de Avaliação de Estudantes na faixa de 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. Participam dessa avaliação todos os países membros e os

---

[1] Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/pisa-programa-internacional-de-avaliacao-de-alunos>. Acesso em 06 de julho de 2015.

[2] Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2009/resultados_preliminares_pisa2009.pdf> Acesso em 06 de julho de 2015.

[3] Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/pisa/sobre-o-pisa>. Acesso em 06 de julho de 2015.

países convidados. O Brasil participa como convidado desde a primeira aplicação da avaliação e o número aproximado de estudantes brasileiros participantes da última avaliação, realizada em maio de 2015, foi de 33.000, escolhidos em 965 escolas das cerca de 60.000 existentes no país. Os alunos são avaliados em três áreas do conhecimento: Leitura, Matemática e Ciências. A cada avaliação o foco recai sobre uma dessas três áreas.

Questões sobre os tópicos: *letramento financeiro*, *competência financeira e resolução colaborativa de problemas,* são aplicadas para alguns alunos sorteados. Nessas duas últimas avaliações, em matemática, foram exigidos dos alunos: testes de raciocínio rápido, problemas ligados ao dia a dia e problemas matemáticos da vida real.

2.1.1 Desempenho dos estudantes brasileiros de 15 anos no PISA

Quadro[4] **3** Comparativo dos resultados do Brasil no PISA desde 2000

	Pisa 2000	**Pisa 2003**	**Pisa 2006**	**Pisa 2009**	**Pisa 2012**
Número de alunos participantes	4.893	4.452	9.295	20.127	18.589
Leitura	396	403	393	412	410
Matemática	**334**	**356**	**370**	**386**	**391**
Ciências	375	390	390	405	405

Apesar de se notar uma melhora das notas de matemática do Brasil a cada nova aplicação do PISA, mais adiante será visto que a classificação do nosso país em relação ao total de países participantes continua muito ruim.

Como a avaliação do PISA 2015 foi aplicada em maio de 2015, ainda não se tem os resultados.

Na internet[5] encontra-se um texto que mostra um resumo do desempenho do Brasil no PISA 2012.

[4] Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/internacional-novo-pisa-resultados>. Acesso em 06 de julho de 2015.

[5] Disponível em: <http://exame.abril.com.br/brasil/noticias/brasil-fica-em-38o-de-44o-paises-em-teste-de-raciocinio>. Acesso em 06 de julho de 2015.

*Os alunos brasileiros estão penando em **testes de raciocínio rápido** e de **problemas ligados ao dia a dia**. Entre os 44 países avaliados em uma nova etapa do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa) 2012, da **OCDE**, o Brasil ficou em 38º lugar.*
*Na prova, aplicada a estudantes de 15 anos sobre **problemas matemáticos da vida real**, o país conquistou uma média de 428 pontos. Singapura e Coreia, os campeões, conquistaram 562 e 561 pontos, respectivamente.*
*Nos resultados oficiais do Pisa 2012, divulgados em dezembro de 2013, entre os **65 países** comparados, **o Brasil ficou em 58º lugar em matemática**, 55º em leitura e 59º em ciências.*

Nas outras quatro etapas do PISA realizadas anteriormente, as classificações do Brasil em matemática foram as seguintes:

Quadro[6] 4 Classificação do Brasil em matemática nos anos 2000, 2003, 2006 e 2009

ANO	número de países	classificação do Brasil
2000	43	42º
2003	41	41º
2006	57	54º
2009	65	57º

Uma observação que se pode fazer aqui, para evitar algum equívoco, é que a classificação do Brasil no PISA de 2006 é 54º, conforme o segundo site da nota de rodapé dessa página, e não 53º como divulgado no primeiro dos dois sites desta nota rodapé e em outros sites. As notas arredondadas do Brasil e da Colômbia são 370, porém, as notas com arredondamento na 2ª casa decimal são, respectivamente, 369,52 e 369,98.

Outro comentário importante para evitar equívocos - vários meios de comunicação divulgaram os resultados[7] do PISA 2000 mostrando que, entre os 32 países participantes, o Brasil ficou em último lugar na média das três áreas, porém, o quadro 2 mostra que foram 43

[6] Classificações disponíveis em: <http://ultimosegundo.ig.com.br/educacao/estudantes+brasileiros+ficam+em+54+em+ranking+de+65+paises/n1237852694731.html> e <http://www.sbec.org.br/destino_educacao_livro_metodologia.pdf>. Acessos em 06 de julho de 2015.

[7] Disponível em: <http://www2.uol.com.br/aprendiz/n_colunas/g_piolla/id121201.htm>. Acesso em 06 de julho de 2015.

países participantes. Isso se deve ao fato de terem sido incluídos na avaliação, posteriormente à divulgação do resultado inicial, mais 11 países, o que pode ser conferido na internet[8].

Ao incluir o Peru, este ficou com o último lugar em matemática e o Brasil, conforme quadro 2, em penúltimo, o que nos mostra, que entre os 32 países iniciais, o Brasil tinha ficado em último lugar em matemática.

Foi muito divulgada, nessa época, a fala do então Ministro da Educação do Brasil. Ao ser entrevistado, disse *"que ficou satisfeito com os resultados do Pisa 2000 e que ficou surpreendido porque esperava resultados piores".* Como o Brasil ficou em último lugar, essa fala se referia às notas dos alunos brasileiros na avaliação e não à classificação do país. Esse fato também pode ser conferido no endereço na internet[9].

Se o leitor deparar-se com algum equívoco aparente, basta consultar o site oficial da organizadora do exame, que se encontra na internet[10].

Na internet[11] tem uma tabela completa mostrando o desempenho, nas três áreas do conhecimento avaliadas, de todos os países que participaram das cinco etapas do PISA realizadas até o momento e que já saíram os resultados, com arredondamento na casa das unidades.

Como visto nesse capítulo, as inclusões dos tópicos *Estudo sobre letramento financeiro* a partir do PISA 2012 e *Competência Financeira* no PISA 2015, que foi realizado em maio de 2015, demandam das escolas um estudo mais aprimorado de assuntos elementares ligados a esses tópicos, tais como: razão, proporção e porcentagem. Com o estudo desses assuntos são criadas as condições necessárias para que os alunos entendam o *sistema de juros compostos* e possam aplicá-lo para resolver problemas que envolvam as *noções básicas sobre financiamentos,* que é conseqüência desse sistema de juros, como será mostrado no capítulo III.

---

[8] Disponível em: <http://www.oecd-ilibrary.org/content/book/9789264102873-en>. Acesso em 06 de julho de 2015.

[9] Disponível em: <http://www2.uol.com.br/aprendiz/n_colunas/g_piolla/id121201.htm>. Acesso em 06 de julho de 2015.

[10] Disponível em: <http://www.oecd.org/pisa/>. Acesso em 06 de julho de 2015.

[11] Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/resultados_pisa_2000_2012.pdf>. Acesso em 06 de julho de 2015.

2.2 O Programa de Educação Financeira nas Escolas

O Programa de Educação Financeira nas Escolas é o resultado da atuação coordenada de diversas instituições do Estado e da sociedade civil com o objetivo de promover a educação financeira da população brasileira. Sua origem remonta à iniciativa do Comitê de Regulação e Fiscalização dos Mercados Financeiros, de Capitais, de Seguros, de Previdência e Capitalização (COREMEC), instituído pelo Decreto n°5.685, de 25 de janeiro de 2006, de constituir Grupo de Trabalho, sob coordenação da Comissão de Valores Mobiliários (CVM), para propor uma estratégia nacional de educação financeira.

O COREMEC é integrado pelo Banco Central do Brasil (BCB), pela CVM, pela Secretaria de Previdência Complementar (SPC), atual Superintendência Nacional de Previdência Complementar (PREVIC), e pela Superintendência de Seguros Privados (SUSEP) e tem o propósito principal de promover a coordenação e o aprimoramento da atuação das entidades da administração pública federal que regulam e fiscalizam as atividades relacionadas à captação pública da poupança popular.

Tal propósito tem os objetivos de promover e fomentar a cultura de educação financeira no país, ampliar a compreensão do cidadão, para que seja capaz de fazer escolhas conscientes quanto à administração de seus recursos e contribuir para a eficiência e a solidez dos mercados financeiro, de capitais, de seguros, de previdência e de capitalização.

Entre as iniciativas consideradas, o COREMEC julgou estratégica a elaboração de um programa para a educação financeira de crianças e jovens, considerando a experiência internacional que aponta para a necessidade de inserir o tema ainda na escola, a fim de ajudar na formação de uma cultura de prevenção e de planejamento, investimento, poupança e consumo conscientes.

Conforme (HOFMANN, 2013, p.2-3),

> As recentes crises financeiras internacionais, com suas inexoráveis consequências sociais, vêm potencializando a consolidação dos mais variados tipos de estratégias políticas de reconfiguração e aperfeiçoamento – senão reforma – dos sistemas financeiros nacionais de países de todo o mundo, estratégias pautadas, inclusive, pela inserção de conteúdos de finanças no currículo escolar. Nesse sentido, organismos internacionais têm ressaltado a importância da educação financeira como estratégia de fortalecimento do sistema financeiro internacional, em parte com vistas a proteger consumidores, investidores e aposentados. A Organização para a Cooperação e

> Desenvolvimento Econômico (OCDE) e o Banco Mundial são duas das organizações internacionais que vêm consolidando programas de incentivo à disseminação da educação financeira em todo o mundo. A OCDE se destaca pelo conjunto de medidas adotadas na promoção da educação financeira, que vão desde a construção de definições basilares para a implementação de políticas, até a elaboração de manuais de boas práticas de programas governamentais, passando pela recente inclusão, na avaliação do PISA, do chamado “letramento financeiro”, sendo este: conhecimento e entendimento de conceitos financeiros e habilidades, motivação e confiança para aplicar tal conhecimento e entendimento em ordem para tomar decisões efetivas através de uma gama de contextos financeiros, para melhorar a vida financeira de indivíduos e sociedade e para habilitar a participação na vida econômica. (HOFMANN, 2013, p.2-3)

Ainda conforme (HOFMANN, 2013, p.290),

> (...) A globalização como tema refletiria a proximidade das agências da economia e da educação, estreitamento potencializado pela atuação, mediante apoio técnico e financeiro, de organismos internacionais como o Banco Mundial e o FMI, além de agências nacionais de atuação internacional, seja de base norte americana, canadense ou japonesa. Essas instituições, destaca a Amove, elaboram prescrições para ampliar a igualdade, a eficiência e a qualidade dos sistemas educacionais, como condição para liberação de recursos financeiros. (HOFMANN, 2013, p.290)

Diferentemente de algumas estratégias nacionais de educação financeira desenvolvidas por outros países, o programa envolveu, desde a sua concepção, educadores, instituições públicas de ensino e entidades representativas dos setores educacionais (Conselho Nacional de Secretários de Educação – CONSED – e União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação – UNDIME) e financeiro, além dos órgãos integrantes do COREMEC, tendo trabalhado em estreita colaboração com o Ministério da Educação (MEC), por meio, principalmente da Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização e Diversidade (SECAD) e da Secretaria de Educação Básica (SEB), para planejar e construir a forma mais adequada de levar o tema às escolas.

Foi constituído o Grupo de Apoio Pedagógico (GAP), que elaborou, sob a coordenação de educadores do Instituto Unibanco, o documento *Orientações para Educação Financeira nas Escolas,* que foi apresentado em seminário sediado pelo BCB, em Brasília, em setembro de 2008, com a participação de representantes do MEC e das Secretarias de Educação de estados e municípios.

O Ensino Médio foi escolhido como o primeiro nível de ensino a receber os materiais didáticos elaborados por educadores do Instituto Unibanco, com a colaboração de representantes do COREMEC e dos diferentes sistemas de ensino, e aprovados no âmbito do GAP. Houve o trabalho voluntário de diversas pessoas e instituições ao longo de dois anos.

O livro[12] elaborado faz parte de um importante programa educacional brasileiro: o Programa Educação Financeira nas Escolas, uma iniciativa da Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) com o objetivo de oferecer ao jovem estudante a formação necessária para que possa tomar decisões financeiras conscientes e sustentáveis tanto para a vida pessoal quanto para o país. O Programa foi desenvolvido para as escolas porque a instituição escolar é um espaço fundamental para construção das competências necessárias para o jovem enfrentar os desafios sociais e econômicos da sociedade, e também para a construção e o exercício da cidadania.

A ENEF, instituída pelo Decreto n°7.397, de 22 de dezembro de 2010, é resultado de um intenso trabalho de instituições do Estado e da sociedade civil. A iniciativa foi desencadeada pelo COREMEC. Juntamente com a ENEF, foi criado o Comitê Nacional de Educação Financeira (CONEF), que recebeu a responsabilidade de definir planos, programas, ações e coordenar a execução da ENEF.

O CONEF é composto pelas seguintes instituições: BCB, CVM, Previc, Susep, Ministério da Fazenda (MF), MEC, Ministério da Previdência Social (MPS) e Ministério da Justiça (MJ), além de quatro representantes da sociedade civil. Para o período 2011-2014, foram escolhidas para representar a sociedade civil no Conef as seguintes instituições: Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiros e de Capitais (ANBIMA), Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros (BM&FBOVESPA), Confederação Nacional das Empresas de Seguros Gerais, Previdência Privada e Vida, Saúde Suplementar e Capitalização (CNSeg) e Federação Brasileira de Bancos (FEBRABAN).

São muitos os fatores envolvidos na implementação de um programa de educação financeira nas escolas e, até mesmo países desenvolvidos como Inglaterra e França, têm encontrado muitas dificuldades até mesmo nos estudos iniciais com vistas a essa

---

12 Disponível para download em: <http://www.edufinanceiranaescola.gov.br/materiais/>. Acesso em 06 de agosto de 2015.

implementação, como pode ser conferido na tese de doutorado intitulada *"Educação Financeira no Currículo Escolar: Uma Análise Comparativa das Iniciativas da Inglaterra e da França"*, da professora Ruth Margareth Hofmann.

2.2.1 A matemática financeira no programa de educação financeira nas escolas

O livro já citado anteriormente: "Educação Financeira nas Escolas - Ensino Médio" é composto de três blocos e cada bloco possui um caderno de atividades.

- **BLOCO 1:**

Aparece na página 26, uma referência às taxas de juros e, em seguida, são dadas explicações como essas taxas são formadas. Na página 27 aparece a pergunta: "Mas como saber qual instituição financeira está oferecendo o empréstimo ou financiamento com melhores condições?". É explicado que, no caso dos empréstimos e financiamentos, existe uma série de números (valor emprestado, juros, taxas, valor das prestações, prazo para pagamento, etc.) que variam muito dependendo da instituição financeira, deixando tudo muito confuso. Continua na página 28: Mas não é necessário se desesperar. Para sanar essa confusão existe o chamado **Custo Efetivo Total**, ou simplesmente **CET**. Em seguida, explica que o CET é expresso na forma de taxa percentual anual, que diz quanto efetivamente custa um empréstimo ou financiamento, incluindo não só os juros, mas também tarifas, impostos e outros encargos cobrados do cliente. A vantagem do CET é que ele permite comparar o que duas ou mais instituições financeiras estão oferecendo e saber qual cobra menos pelo empréstimo. Dependendo dos encargos cobrados por uma instituição em um empréstimo, o CET pode acabar sendo maior que o de outro banco, mesmo tendo uma taxa de juros menor. **Agora ficou fácil, não?** Mas atenção: para que você utilize o CET de modo correto, é fundamental que as condições dos empréstimos pesquisados sejam iguais. Por exemplo, se em uma instituição financeira você simular um empréstimo de R$1.000,00 para pagar em 24 meses e em outra você simular um empréstimo de R$1.000,00 para pagar em 36 meses, o CET não poderá ser utilizado para compará-los, pois as condições dos empréstimos são diferentes. (...) **Ah, quer mais uma dica?** As instituições financeiras são obrigadas por lei a fornecer o CET a você. Não precisa ficar constrangido em pedir.

Em seguida, o livro sugere uma atividade aos alunos para "ajudar uma família a resolver o seu problema", fazendo um orçamento, levantando a taxa de juros e o CET cobrados pelas instituições financeiras. Nenhum cálculo é feito para mostrar o que significa na prática o CET. Nesse momento poderia ter sido dado um exemplo em relação ao que o livro diz anteriormente: *"Dependendo dos encargos cobrados por uma instituição em um empréstimo, o CET pode acabar sendo maior que o de outro banco, mesmo tendo uma taxa de juros menor"*.

Na subseção 3.3.1.3 do capítulo 3 desta dissertação serão dados dois exemplos de como calcular o CET de empréstimos.

Na página 73, volta-se ao assunto "empréstimos" e é dada um explicação sobre *taxa nominal* de juros e, nas páginas 74 e 75, são dadas explicações sobre *taxa real* de juros. Nesse momento, o livro apresenta um exemplo de uma aplicação de R$200,00 a 10% de juros ao mês e supõe uma inflação anual de 5%, concluindo (sem mostrar os cálculos) que a *taxa real* de juros é de 9,75% nos dois anos, e que isso quer dizer que a pessoa só poderá aumentar o volume de suas compras em 9,75%, ou seja, ter hoje R$242,00 (esse cálculo o livro mostrou antes) na mão seria o mesmo que ter R$219,50 dois anos atrás.

Nessa oportunidade, poderia ter sido dada uma atividade para os alunos descobrirem como foram feitos os cálculos anteriores, porém, a sugestão de atividade envolvia outros assuntos tratados nas páginas anteriores do livro.

No capítulo 3 desta dissertação serão dados exemplos envolvendo taxas de juros nominal e real.

Na página 79, aparece uma situação em que uma pessoa paga integralmente o valor da fatura do seu cartão de crédito e outra paga apenas parte do valor da sua fatura e são cobrados juros de 12% sobre o saldo devedor (o exemplo não usa o termo *saldo devedor*).

Na página 104 aparece pela 1ª vez o termo *juros compostos* ao se referir sobre o pagamento da parte financiada ao se pagar o valor mínimo do cartão de crédito.

Na página 110 é feita a análise final de uma compra de um tênis de R$200,00, que pode ser comprado à vista com 5% de desconto ou em seis prestações de R$40,00. Nessa análise leva-se em consideração apenas o fato da pessoa poupar R$40,00 por mês para comprar o tênis à vista ou financiá-lo. Não é feita nenhuma referência sobre a taxa de juros cobrada nesse financiamento.

Na página 114 aparecem dois exemplos de cálculos da caderneta de poupança com rentabilidade de **0,5295%** (juros de 0,5% + TR de 0,0295%) no dia 28/01/2010.

Na verdade, a TR no período de 28/12/2009 a 28/01/2010 foi de 0,0294%[13] e a rentabilidade da caderneta de poupança é de **0,5295%**, pois a taxa TR é aplicada sobre o valor inicial já adicionado de 0,5%. Assim, [(1+0,005).(1+0,000294) – 1] . 100% ≅ **0,5295%** (essa taxa é sempre arredondada na 4ª casa decimal pelo Banco Central). O **livro cometeu um erro**, pois deveria informar que a TR de 0,0295% já era a TR de 0,0294% sobre o valor de 0,5%, pois normalmente divulga-se a TR não acumulada sobre 0,5% e isso poderia dar a impressão que basta somar 0,5% com a TR e aplicar esse percentual sobre o valor depositado, um erro muito comum e cometido, por exemplo, numa página da internet[14].

A forma correta de cálculo pode ser consultada no link[15] do Banco Central do Brasil, por exemplo, se uma pessoa aplicar R$100.000,00 de 28/12/2009 a 28/01/2010 (período de um mês em que a poupança pagou 0,5% + TR de 0,0294%), ela vai obter R$100.000,00 x 1,005 x 1,000294 ≅ R$100.000,00 x 1,005295 = R$100.529,50.

O livro informou na página 75 sobre o cálculo da remuneração da caderneta de poupança, a partir da Medida Provisória 567, de 3 de maio de 2012 (convertida na Lei 12.703, de 7 de agosto de 2012), que passou a ser feito por duas regras: 1) para os depósitos anteriores à Medida Provisória, a remuneração é a TR (Taxa Referencial) mais 0,5 **ponto percentual** ao mês; 2) para os depósitos feitos a partir do dia 4 de maio de 2012, a remuneração passa a ser de TR mais 70% da meta da taxa Selic (definida pelo Banco Central) sempre que a meta for igual ou menor que 8,5% ao ano. Caso a meta da taxa Selic seja superior a 8,5%, a remuneração das cadernetas de poupança permanece TR mais 0,5 ponto percentual ao mês, igual à regra anterior.

O livro utilizou o termo **ponto percentual**, que não é utilizado na Medida Provisória 567. Isso sugere que o livro calcula a remuneração da caderneta de poupança somando 0,5% com a TR não acumulada sobre os 0,5%, o que caracteriza um erro, como já foi visto.

Essa Medida Provisória foi criada num momento de queda da taxa Selic, com o objetivo de não tornar a caderneta de poupança mais atrativa do que os títulos públicos, que são remunerados com base nessa taxa.

---

[13] Disponível em: <https://www3.bcb.gov.br/sgspub/consultarvalores/consultarValoresSeries.do?method=consultarValores>. Acesso em 08 de agosto de 2015.

[14] Disponível em: <https://blog.guiabolso.com.br/2015/02/11/como-calcular-o-rendimento-da-poupanca/>. Acesso em 08 de agosto de 2015.

[15] Disponível em: <https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAO/publico/corrigirPelaPoupanca.do?method=corrigirPelaPoupanca>. Acesso em 08 de agosto de 2015.

Na página 122 aparece uma sugestão de atividade para os alunos. A atividade é para comprar uma câmera digital que custa R$1.000,00 à vista. São feitas as perguntas: Como você vai pagar esse valor? O que será melhor: poupar ou financiar? Sugere-se aos alunos que pesquise em jornais e sites ou visite um banco para saber quanto está pagando de juros pelos depósitos na conta poupança e também, quanto o banco está cobrando de juros para emprestar dinheiro. A seguir, os alunos levariam essas informações para a sala de aula para calcular a diferença entre as duas taxas de juros e verificar a diferença de custo entre poupar e financiar.

Em seguida, o livro conclui:

“Se o aluno fizer um financiamento com uma taxa de juros de 5,48% ao mês, parcelando a compra em 12 vezes, cada prestação terá um valor de R$115,90. (...) Se o aluno fizer o mesmo esforço de poupança do financiamento e guardar R$115,90 por mês ao longo de 12 meses, mas colocar esse dinheiro na conta poupança, com **juros reais** de 0,5% + TR ao mês, ao fim de 12 meses ele terá R$1.440,12. Dessa forma, ao gastar os R$1.000,00 para comprar a câmera, ainda sobrariam R$440,12. E veja só: com o mesmo investimento mensal (R$115,90), seriam necessários apenas 9 meses para se obter os R$1.000,00 do preço da câmera. A antecipação do consumo por meio do empréstimo, portanto, exige 3 meses adicionais de poupança no futuro.”

Na página seguinte é dito que foram usados valores da TR publicados pelo Banco Central referente ao primeiro dia de cada mês do ano de 2009 (o livro informou apenas os valores dos 3 primeiros meses e o terceiro valor foi informado errado: 0,09% em vez de 0,1438%) e, são mostrados os cálculos para esses três primeiros meses. A seguir, o livro conclui que: “em nove meses, (saldo no início do décimo) o montante poupado será de R$1.072,00, suficientes para pagar a câmera à vista. O valor do financiamento é de R$1.390,80. A espera permite que se despenda menos.”

Fazendo-se uma busca no link que consta no rodapé desta página encontram-se os valores das TR’s referentes ao primeiro dia de cada mês do ano de 2009 (não acumuladas sobre os 0,5%).

T.R[16]. (%)	0,1840	0,0451	0,1438	0,0454	0,0449	0,0656	0,1051	0,0197	0,0000	0,0000	0,0000	0,0533

[16] Disponível em: <https://www3.bcb.gov.br/sgspub/consultarvalores/consultarValoresSeries.do?method=getPagina>. Acesso em 08 de agosto de 2015.

- **Comentários sobre o financiamento da câmera digital:**

Apesar de ser um livro do professor, num primeiro exemplo de financiamento o livro já utiliza um caso com 12 prestações. Não mostra como se chega ao valor de R$115,90 para as prestações e nem sugere como os alunos podem proceder para entenderem esse cálculo. Quando o livro conclui que, ao gastar os R$1.000,00 para comprar a câmera, sobrariam ainda R$440,12, ele baseou-se no fato que a câmera permaneceu com o mesmo preço depois de 12 meses, o que não é normal, mas está correto, pois ele disse que eram **juros reais** de 0,5% + TR ao mês. Foi considerado que essas prestações são sem entrada, o que está correto, pois supostamente o banco emprestou os R$1.000,00 e, num empréstimo, normalmente, a primeira parcela só é paga daí a um mês. No exemplo 25 da subseção 3.3.1.2 do capítulo 3 será mostrado como se calcula o valor de R$115,90 das 12 prestações. Os demais cálculos não serão mostrados, até porque o livro errou uma taxa TR e pode ter errado outra(s) também.

- **BLOCO 2:**

Na página 38, como já visto e explicado no caso 4 do capítulo 1 desta dissertação, aparece um erro ao afirmar que *"O valor do imposto de renda é calculado com base na renda da pessoa, quanto maior a renda, mais ela paga de imposto."*

Na página 135 o livro volta aos assuntos: CET e financiamentos. No início da página seguinte aparece a pergunta: Como calcular o valor da prestação mensal? E na continuidade o livro escreve:

Há diversos fatores que influem diretamente sobre o valor das prestações de um financiamento, mas os principais são: a taxa de juros, o prazo de pagamento e o sistema de amortização escolhido.

Considerando o mesmo prazo de pagamento, quanto mais alta for a taxa de juros, maior o pagamento mensal.

Considerando a mesma taxa de juros, quanto maior o prazo, menor será o pagamento mensal. Mas quanto maior o prazo, maior será o valor total pago.

Os sistemas de amortização mais utilizados são: Price e SAC.

No sistema Price, as prestações a serem pagas são calculadas de forma a terem um valor constante, ao longo do período de pagamento. No sistema SAC (Sistema de Amortização Constante), os valores a serem pagos são decrescentes.

No exemplo 26 da subseção 3.3.1.3 do capítulo 3 será mostrado a tabela Price para o exemplo da câmera digital visto anteriormente.

Em seguida, o livro define o que é amortização, faz algumas recomendações e dá um exemplo de uma aplicação que paga juros de 0,5% por mês e afirma que: "depositando-se R$300,00 por mês, mais os juros que vão se acumulando, ao fim de 25 meses a família terá reunido os R$8.000,00 necessários para dar a entrada num imóvel." Nesse caso, porém, há o risco do imóvel se valorizar nesse período e, consequentemente, o valor da entrada e a necessidade de financiamento ser maiores.

O livro não mostra como é feito esse cálculo, mas o exemplo 25, feito na seção 3.5 do capítulo 3 desta dissertação, é parecido com este (ao fazer esse cálculo, encontra-se R$8.007,57).

O livro também não responde a pergunta feita no início por ele mesmo: Como calcular o valor da prestação mensal?.

Na página 171 faz outras perguntas: Como se calculam as taxas de juros dos empréstimos? E das aplicações? E também não apresenta as respostas. Ainda pergunta: E o que torna a dívida mais cara, mais rapidamente? Juros simples ou compostos? Aí o livro responde dando exemplos de cada um e compara-os na página 172. Diz também, na página 173, que quem deixa de pagar uma parte do valor do cartão de crédito ou entra no cheque especial, cobrindo temporariamente o buraco na conta, paga juros compostos por isso.

Ainda nesta página afirma que "Se uma pessoa poupar e investir R$2.000,00 por ano dos 20 aos 25 anos, colocando esse dinheiro num investimento que pague uma taxa de juros compostos de 6% ao ano, (taxa da poupança, sem o percentual da TR), terá ao final um total de R$13.950,64 (sem considerar os juros sobre a última parcela de R$2.000,00). Se ela parar de depositar os R$2.000,00 e deixar os R$13.950,64 rendendo, terá R$107 mil, quando alcançar os 60 anos de idade. Contudo, é preciso lembrar que, com o passar do tempo, os preços podem subir e, assim, reduzir em parte o poder aquisitivo desse dinheiro."

No parágrafo anterior o livro cometeu ***um erro grave,*** pois 0,5% ao mês (sem a TR) equivalem a aproximadamente 6,17% ao ano e não 6% como ele disse. Se os depósitos forem efetuados do dia que a pessoa completou 20 anos até o dia que completou 25 anos, têm-se 6 depósitos de R$2.000,00. Também, utilizando o exemplo 25 da seção 3.5 do capítulo 3 como base, e considerando-se a taxa de 6% ao ano, pode-se calcular o valor de R$13.950,64, mas não se deve multiplicar por 1,06 ao final, pois foi dito que não era para considerar os juros sobre a última parcela de R$2.000,00. Na segunda parte, basta aplicar R$13.950,64 a juros compostos de 6% ao ano durante 35 anos (60 -25) que se encontra o valor aproximado de R$107 mil.

Na página 174, o livro propõe ao leitor que imagine que este tem duas opções de investimento para receber o principal mais os juros ao final do prazo de aplicação. São elas:

- Opção 1: receber R$2.000,00 aplicados a juros simples de 2% ao mês por cinco anos.
- Opção 2: receber R$1.500,00 aplicados a juros compostos de 2% ao mês por cinco anos.

Qual opção o leitor prefere? Por quê?

O livro não apresenta a resposta, mas é óbvio que a 2ª opção de investimento é melhor do que a 1ª. A 2ª opção fornece um montante de R$4.921,55, enquanto que na 1ª o montante é de apenas R$4.400,00.

Ainda nesta página, o livro apresenta um exemplo em que cada uma de duas pessoas tem uma dívida de R$1.000,00, pagando juros compostos de 10% ao mês. Assim, no mês seguinte, ambos estavam com uma dívida de R$1.100,00. Uma das pessoas conseguiu um empréstimo de R$1.100,00 com taxa de juros compostos de 3% ao mês, quitando sua dívida anterior e começando a pagar o novo empréstimo a razão de R$200,00 por mês. A outra pessoa resolveu tentar quitar sua dívida também pagando R$200,00 por mês, mas sem tentar renegociá-la ou substituí-la por outra com juros menores. Na página seguinte, o livro apresenta uma tabela com a evolução dos saldos devedores de cada pessoa. Comete um erro ao considerar que a 1ª pessoa pagou R$200,00 da nova dívida no mesmo momento que a contraiu e mostra que a 1ª pessoa quita sua dívida mais rápido do que a 2ª (É óbvio!).

Para encerrar, na página 176, considera que uma pessoa tem uma dívida de R$1.000,00 com taxa de juros de 12% ao mês. Mostra que a pessoa paga prestações mensais de R$200,00 (valor escolhido aleatoriamente), apresenta a tabela com a evolução do saldo devedor e mostra que ao pagar oito destas prestações resta uma prestação de R$17,95 para pagar no nono mês. Neste momento o livro comete mais um erro ao informar que esses R$17,95 equivalem ao saldo devedor após o oitavo pagamento, quando na verdade é o saldo devedor um mês após o oitavo pagamento, sendo de R$16,02 o saldo devedor após o oitavo pagamento. Termina mostrando que se esta dívida fosse trocada por uma de 2% ao mês, esta seria quitada em 6 meses.

O livro perde a oportunidade de retornar ao exemplo da câmera fotográfica (apresentado na página 122 do bloco1), construir a tabela com a evolução do saldo devedor e mostrar que a dívida é quitada no exato momento do pagamento da 12ª prestação de R$115,90.

- **BLOCO 3:**

Este bloco não tem quase nada de matemática financeira, sendo que na página 57, como já visto no caso 4 do capítulo 1 desta dissertação, aparece o erro *"A cobrança do imposto de renda é proporcional à renda da pessoa"*.

Na página 70, apresenta o seguinte texto sobre a *hiperinflação* no Brasil:

"Nos anos 1980 e início dos anos 1990, a inflação era um problema sério no Brasil: em alguns meses, passava de 50%. Isso quer dizer que, se ainda fosse assim, no mês passado uma garrafinha de água que custasse R\$1,00 poderia estar custando R\$1,50 este mês. Um ano depois, já custaria R\$130,00. (...)."

Aqui o livro perde a oportunidade de mostrar a espantosa cifra de R\$130,00 que custaria uma garrafinha de água com uma inflação mensal de 50% durante 12 meses (R\$1,00 x $1,5^{12} \cong$ R\$130,00).

Com o que foi exposto aqui nesta subseção 2.2.1, pode-se concluir que é dada muita pouca ênfase à matemática financeira no programa de educação financeira nas escolas. Além disso, a quantidade de erros (nos três blocos do livro) apresentados aqui mostra a tolerância que se tem com esses erros, mesmo o programa tendo sido elaborado por diversas entidades públicas e da sociedade civil, como foi dito no início da seção 2.2.

2.3 A Matemática financeira nas licenciaturas em matemática e sua inserção na formação básica

O professor Ilydio Pereira de Sá, já à época da pesquisa para a sua dissertação de Mestrado em Educação Matemática, mesmo não sendo o seu foco principal de estudo, já acenava para problemas de formação de professores e para questões relacionadas à Matemática Financeira no Ensino Fundamental.

Na oportunidade, conforme (SÁ, 2012, p.18)

> Entrevistei diversos professores da Educação Básica e do Ensino Superior, verificando que nenhum deles havia cursado a disciplina Matemática Financeira em suas licenciaturas. (SÁ, 2012, p.18)

O tema de sua pesquisa de doutorado *"A Educação Matemática Crítica e a Matemática Financeira na Formação de Professores"* teve como objeto de estudo a

Matemática Financeira no contexto dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil. Em relação ao eixo de pesquisa identificado com a Formação de Professores que Ensinam Matemática, levantou questões norteadoras de sua pesquisa:

Conforme (SÁ, 2012, p.19)

> A disciplina Matemática Financeira consta das matrizes curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática?
> Como a disciplina Matemática Financeira é ministrada nos cursos de Licenciatura em Matemática? (SÁ, 2012, p.19)

Por meio de investigação nas matrizes curriculares de cursos de Licenciatura em Matemática de Instituições de Ensino Superior (IES) públicas e privadas, de diversos estados brasileiros, investigou se a Matemática Financeira é uma das disciplinas dessas matrizes e, em caso afirmativo, investigou como professores de Matemática estão sendo formados para ensinar esta disciplina.

Inicialmente, por intermédio dos relatórios de avaliação de cursos do INEP do período de 2004 a 2008, identificou 83 IES, em sua maioria privadas, avaliadas pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES) e que apresentavam Licenciatura em Matemática dentre os cursos oferecidos por elas. Acrescentou mais sete IES federais do eixo Rio – São Paulo que também ofereciam esta licenciatura. Analisadas as matrizes curriculares destes 90 cursos de Licenciatura em Matemática, encontrou 26 IES que apresentavam a disciplina Matemática Financeira, o que representa 28,8%. Destas 26 IES, a pesquisa foi realizada com seis, de diversos estados brasileiros, que concordaram em participar, forneceram os documentos necessários para o estudo e responderam aos questionários elaborados para a coleta de dados.

Baseado na legislação educacional brasileira escolheu fontes para a pesquisa documental (Parecer CNE/CES 1.302/2001, Resolução CNE/CP 1/2002 e Resolução CNE/CES 3/2003) que, além de referências para o foco da pesquisa, acenam com reflexões que embasam a proposta de inserção da disciplina Matemática Financeira na formação inicial e também reforçam a discussão sobre a formação de professores de Matemática.

Conforme (SÁ, 2012, p.24)

> Como o tema "Formação de Professores que Ensinam Matemática" é muito amplo, propõe-se, nesta pesquisa, um recorte de análise que permita pensar a disciplina Matemática financeira nos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil. (SÁ, 2012, p.24)

Ainda conforme (SÁ, 2012, p.27)

> Nesta pesquisa, as sugestões apontam exatamente para essa vertente da Educação Matemática Crítica, que procura trazer para a formação dos professores e, consequentemente, para suas futuras salas de aula, discussões acerca dos problemas transversais à escola – democracia, cidadania, trabalho e consumo, dentre outros, sobre as possibilidades que a Matemática Financeira oferece para ajudar na solução de questões atreladas a essas temáticas e também para a construção de uma cidadania crítica. (SÁ, 2012, p.27)

O professor Ilydio, com mais de 38 anos de experiência em sua prática docente, questiona que muita matemática é "ensinada" apenas para ser devolvida nas provas e testes, e ao deparar-se com uma situação do cotidiano, como em uma compra financiada ou um empréstimo consignado, uma pessoa que passou grande parte de sua vida estudando matemática, provavelmente, não conseguirá aferir, por exemplo, qual a taxa de juros que estará pagando; não saberá discernir se a situação lhe é favorável; não conseguirá usar a matemática para defender seus direitos de cidadania. Nesse sentido, ele acredita que a disciplina Matemática Financeira, na perspectiva da Educação Crítica, pode ser o elo para que futuros professores encontrem o caminho de relacionar o saber curricular, a experiência social vivenciada por eles e por seus alunos como cidadãos e as constantes e velozes transformações do mundo em que vivemos. Ele reconhece que diversas outras disciplinas são importantes para a formação do cidadão, porém, como o objetivo de sua pesquisa é a Matemática Financeira, justifica-se o interesse por essa disciplina por se constatar que ela está presente na vida diária das pessoas e por ela relacionar distintos temas da Matemática Clássica, tradicionalmente presentes nos currículos, tais como: progressões, proporções, funções, médias, equações polinomiais e logaritmos.

É nessa perspectiva que se justifica a inclusão da disciplina Matemática Financeira, com características específicas, nas matrizes curriculares dos cursos de Licenciaturas em

Matemática, dando ao professor de matemática condições para lecionar de forma adequada a disciplina no ensino básico, caso esta seja incorporada (como disciplina obrigatória) no currículo deste nível de ensino.

Ainda, conforme (SÁ, 2012, p.56), na apresentação do parecer CNE/CP 9/2001, em seu histórico e descrição, afirma-se, entre outras, que "A internacionalização da economia confronta o Brasil com a necessidade indispensável de dispor de profissionais qualificados."

Conclui que o cenário tem sido, predominantemente, de grandes dificuldades para a educação, independentemente de esforços isolados ou de legislações bem intencionadas. No parecer CNE/CP 9/2001, constam diversas referências às possíveis causas dessas dificuldades, entre elas: "O preparo inadequado dos professores cuja formação, de modo geral, manteve predominantemente um formato tradicional, que não contempla muitas das características consideradas, na atualidade, como inerentes à atividade docente."

2.4 Propostas da SBM para a Inclusão da Disciplina Matemática Financeira no Ensino Básico e nas Licenciaturas em Matemática

Em sua reunião de 28 de novembro de 2014, o Conselho Diretor da SBM decidiu relançar os estudos com vista à elaboração de uma proposta curricular para os diferentes segmentos do ensino de Matemática. Na sequência, foram formados 4 grupos de trabalho, compostos por professores universitários e professores da educação básica com reconhecida competência, os quais se vêm debruçando sobre a questão das diretrizes curriculares para o Ensino Fundamental 1, o Ensino Fundamental 2, o Ensino Médio e a Licenciatura em Matemática.

A SBM ressalta que a construção de uma proposta curricular nacional deve ser um processo continuado, em constante evolução, alimentado por um amplo diálogo com todos os atores do processo educativo. Assim, os presentes documentos[17] devem ser vistos como um esforço concreto da SBM para enriquecer esse diálogo, a ser aprimorado sucessivamente e sem qualquer pretensão de ser uma resposta "definitiva" à questão.

[17] Disponíveis em:
<http://www.sbm.org.br/images/pdf/Diretrizes_Curriculares_Licenciatura_4.pdf>
e <http://www.sbm.org.br/images/pdf/Proposta_curricular.pdf>. Acessos em 20 de julho de 2015.

2.4.1 Proposta da SBM para a inclusão da disciplina matemática financeira no ensino fundamental

As propostas para o Ensino Fundamental 1 e Ensino Fundamental 2 ainda não foram endossadas pelo Conselho Diretor da SBM e serão publicadas na internet[18] quando isso ocorrer.

2.4.2 Proposta da SBM para a inclusão da disciplina matemática financeira no ensino médio

O estágio atual das conclusões do grupo de trabalho do Ensino Médio já foi endossado pelo Conselho Diretor da SBM e está publicado na internet[19]. Trata-se de um documento de trabalho, que deve ser entendido como uma contribuição da SBM ao debate do tema na comunidade e à construção da Base Nacional Comum que está sendo levada a cabo pelo Governo Federal.

A presente proposta é resultado de uma discussão ao longo de um pouco mais de três meses, com base na experiência em sala de aula, na análise de currículo em vigor no país e no exterior e no nosso ponto de vista sobre os conteúdos apresentados nos principais livros didáticos usados pelas escolas brasileiras. Desta forma, foi construída uma grade com os principais conteúdos de Matemática, visando contemplar habilidades a serem alcançadas pelos alunos concludentes do Ensino Médio.

Pretendemos que este trabalho contribua com a discussão sobre a elaboração de um Currículo Nacional de Matemática para essa última etapa da educação básica.

Esta é a primeira versão da tentativa de colaborar com a SBM para a construção de um documento à luz das necessidades de aprendizagem dos alunos brasileiros para esta etapa de ensino. Por isso, buscamos equilibrar teoria e prática, a partir dos principais referenciais de conteúdos de Matemática para a formação continuada do professor que leciona Matemática do Ensino Médio, mantendo atenção para a prática possível em sala de aula.

---

18 Disponível em: <http://www.sbm.org.br/pt/noticias-destaque/372-proposta-curricular-da-sbm-para-o-ensino-m%C3%A9dio>. Acesso em 20 de julho de 2015.

19 Disponível em: <http://www.sbm.org.br/>. Acesso em 20 de julho de 2015.

Séries	Números e Funções	Geometria	Matemática Discreta	Tratamento da Informação
1º	• Conjuntos e noções de lógica. • Conjuntos Numéricos. • Proporcionalidade. • Funções: aspectos gerais. • Funções Afim e Quadrática.	• Geometria Plana: congruência, semelhança e áreas. • Trigonometria do triângulo.	• Conjuntos e Contagem. • Aritmética.	• Noções de amostragem. • Organização de dados: distribuições de frequências e gráficos.
2º	• Sequências. • Outras funções reais. • Funções Exponenciais e Logarítmicas. • Equações e Sistemas Lineares.	• Perímetro e área de figuras semelhantes. • Círculo. • Geometria Espacial de Posição.	• Matemática Financeira. • Técnicas de Contagem.	• Medidas resumo e distribuição de dados.
3º	• Funções Trigonométricas. • Desigualdades e médias.	• Poliedros. • Áreas e Volumes. • Geometria Analítica.	• Probabilidade.	• Noções de Estatística bivariada.
Temas Suplementares	• Taxas de variação. • Outras funções trigonométricas. • Números Complexos. • Noções sobre matrizes e transformações elementares no plano e no espaço.	• Áreas de figuras planas: outras abordagens. • Vetores no plano. • Transformações geométricas e simetria.	• Grafos. • Aritmética. • Outros métodos de contagem.	

Figura[20] **8** Diretrizes curriculares propostas pela SBM para o ensino de matemática no ensino médio

Observa-se que na proposta da figura 8 aparece a Matemática Financeira na 2ª série da coluna Matemática Discreta. Aparecem também assuntos associados à matemática financeira, tais como: Proporcionalidade, Funções, Funções Exponenciais e Logarítmicas e Sequências. Nessa proposta a matemática financeira aparece de forma explícita e com uma proposta de conteúdos como pode ser visto na figura a seguir.

[20] Disponível em: <http://www.sbm.org.br/images/pdf/Proposta_curricular.pdf>. Acesso em 20 de julho de 2015.

Estrutura de tópicos	Habilidades	Recomendações
1.1.Acréscimos e descontos percentuais 1.2.Taxas de Juros 1.3.Valor Presente e Valor Futuro 1.4.Juros Compostos 1.5.Taxas Equivalentes 1.6.Juros Simples 1.7.Séries Uniformes 1.8.Sistemas de Amortização	• Determinar o valor final de uma grandeza que sofreu variação percentual de uma taxa i (produto por $1+i$ e $1-i$); • Determinar a taxa de variação percentual de uma grandeza que sofreu acréscimo ou desconto; • Determinar a taxa de juros de um empréstimo relacionada ao período; • Resolver problemas envolvendo equivalência de capitais; • Resolver problemas envolvendo juros compostos e amortizações; • Determinar taxas de juros equivalentes e taxas de juros proporcionais; • Aplicar o conceito de juros simples a situações em que o prazo é menor que unidade; • Resolver problemas envolvendo séries uniformes; • Construir tabelas de amortização nos sistemas Price e SAC.	• No ensino de juros compostos e da Matemática Financeira como um todo, pode-se evitar o uso excessivo de fórmulas caso o aluno adquira a habilidade de resolver problemas com o diagrama de flechas montando a chamada equação de valor, com foco numa determinada época. • O conceito de juros simples é raramente utilizado em situações reais e, portanto, deve-se abolir a prática de propor aos alunos exemplos e exercícios artificiais de empréstimos a juros simples. A exceção reside no cálculo de juros em que o prazo é menor que a unidade de tempo adotada, em particular, no cálculo dos juros de mora. Uma boa forma de visualizar o motivo pelo qual isso acontece, é comparar os gráficos de montantes dos juros simples e compostos (função afim e exponencial), onde se pode verificar a vantagem de adotar essa prática para o detentor do capital. • Na medida do possível, o ensino da Matemática Financeira deve ser acompanhado do uso de calculadoras financeiras e/ou planilhas eletrônicas. Tal prática aproxima o aluno das aplicações desses conceitos no mundo real.

Figura[21] **9** Proposta da SBM para conteúdos da disciplina matemática financeira no ensino médio

Observa-se nas **recomendações** que *"o conceito de juros simples é raramente utilizado em situações reais e, portanto, deve-se abolir a prática de propor aos alunos exemplos e exercícios artificiais de empréstimos a juros simples. A exceção reside no cálculo de juros em que o prazo é menor que a unidade de tempo adotada (...)."*

Veja o exemplo a seguir, extraído de um livro aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e que consta das referências bibliográficas desta dissertação. Além de ir contra a recomendação anterior (da proposta da SBM), ainda contém erros nos cálculos dos juros simples.

[21] Disponível em: <http://www.sbm.org.br/images/pdf/Proposta_curricular.pdf>. Acesso em 20 de julho de 2015.

Figura 10 Um exemplo de um financiamento a juros simples

Observa-se na figura 10 que tem um erro grave de cálculo dos juros simples, pois no caso de dividir os R$840,00 restantes em 10 vezes, tem juro de 5% ao mês. O comprador fez os cálculos incluindo 5% em 10 meses, em vez de 5% ao mês. Um exemplo totalmente artificial de financiamento a juros simples.

No capítulo 3 desta dissertação será explicada a exceção dita na segunda parte da recomendação anterior, bem como será acrescida uma situação envolvendo a convenção linear nos cálculos dos juros.

Observa-se também nas **recomendações** que *"na medida do possível, o ensino da Matemática Financeira deve ser acompanhado do uso de* ***calculadoras financeiras*** *e/ou* ***planilhas eletrônicas****. Tal prática aproxima o aluno das aplicações desses conceitos no mundo real."*

Serão dados exemplos, no capítulo 3 desta dissertação, de situações aplicadas ao mundo real em que os alunos podem utilizar calculadoras financeiras e planilhas eletrônicas.

2.4.3 Proposta da SBM para a inclusão da disciplina matemática financeira nas licenciaturas em matemática

Há uma proposta da SBM para as diretrizes curriculares para o ensino de matemática nas licenciaturas em matemática disponível na internet[22]. Essa proposta é a terceira etapa de um trabalho iniciado em 2010.

Na página 6, encontra-se:

O presente documento constitui mais uma ação da SBM no sentido da formação do professor de matemática, marcando um passo na direção de uma discussão sobre Diretrizes Curriculares para os cursos de formação do Professor (Parecer CNE/CP 9/2001), especialmente visando contribuir para a reflexão sobre a abordagem dos conteúdos (Parecer CNE/CP 9/2001).

Com esse fim, é apresentada aqui uma discussão de Proposta de Currículo Nacional para os Cursos de Licenciatura, elaborada a partir de parâmetros que têm como meta oferecer aos professores do Ensino básico o conhecimento matemático necessário para a sua prática.

Na página 7, encontra-se:

Uma proposta de currículo para a licenciatura deve se basear no princípio de que a formação em matemática forneça ao professor do ensino básico não só pleno domínio dos conteúdos matemáticos, mas também conhecimento necessário para que possa promover a aprendizagem de matemática dos seus alunos e exercer a sua prática.

[22] Disponível em: <http://www.sbm.org.br/images/pdf/Diretrizes_Curriculares_Licenciatura_4.pdf>. Acesso em 20 de julho de 2015.

Na página 13, encontra-se:

Apresentamos a seguir uma discussão que identifica linhas norteadoras para a composição de um currículo de um curso de licenciatura, bem como uma proposta de disciplinas com as respectivas ementas e carga horária, encerrando com um exemplo de uma possível grade curricular, segundo essa proposta. Os assuntos que norteiam a identificação das linhas são entendidos como elementares na formação do professor de matemática.

No documento são apresentadas as disciplinas propostas para o currículo de um curso de licenciatura, com as respectivas ementas. Na página 58, encontra-se a inclusão da Disciplina Matemática Financeira, fazendo parte do 6° período com uma carga horária de 30 horas.

MATEMÁTICA FINANCEIRA (30 horas)

EMENTA

Conceitos Fundamentais. Juros Simples e Compostos. Taxas de Juros. Rendas ou Anuidades. Sistemas de Amortização.

HABILIDADES:

Espera-se que ao final do curso o aluno seja capaz de:

- resolver problemas do cotidiano, envolvendo taxas de juros, descontos, financiamentos e amortização.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

[1]. Puccini, E.C., *Matemática Financeira*, Universidade Aberta do Brasil, 2007
[2]. Morgado, A. C. ; Wagner, E.; Zani, S. *Progressoões e Matemática Financeira*. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2005.
[3]. Lima, E.L., et AL., *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 2. 6a Ed. Rio de Janeiro, Coleção do Professor de Matemática SBM, 2006.

Figura 11 Ementa proposta pela SBM para a disciplina matemática financeira nas licenciaturas em matemática

Conforme (SÁ, 2012, p.132),

> As licenciaturas em Matemática já realizaram algum avanço e a legislação educacional, em todos os níveis, influenciou positivamente. Tem-se, hoje, na maioria dos cursos, disciplinas como Didática da Matemática, Matemática na Escola Básica, Laboratório de Matemática etc.
> No entanto, cabe refletir que não basta a simples existência de tais disciplinas para interferir na formação do professor de Matemática. Há a necessidade de se rever quem são os formadores de professores de Matemática para atuarem na Escola Básica. (SÁ, 2012, p.132)

Nesse sentido, cabe refletir que não basta a existência da disciplina Matemática Financeira no Ensino Básico e nas Licenciaturas em Matemática, deve-se refletir a respeito de quem serão os formadores dos professores de Matemática que atuarão em tais níveis.

Conforme (HOFMANN, 2013, p.18),

> O insucesso da escola como instituição educadora tem sido atribuído não apenas aos objetos de ensino selecionados para comporem o currículo, mas também à forma como são abordados didaticamente na sala de aula. (HOFMANN, 2013, p.18),

No próximo capítulo será mostrado um estudo sobre o sistema de juros compostos e, também, outros assuntos relacionados a esse sistema.

III O SISTEMA DE JUROS COMPOSTOS E SUAS APLICAÇÕES NOS CÁLCULOS DE INFLAÇÃO ACUMULADA, GANHO OU PERDA NO PODER DE COMPRA, TAXAS EFETIVAS E REAIS E NOS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÕES

Nesse capítulo não se tem a intenção de apresentar uma proposta de ensino de matemática financeira no ensino básico. Caso essa fosse a intenção deveria se fazer um estudo preliminar sobre conteúdos elementares que servem de base para o estudo deste conteúdo, tais como; razão, proporção e porcentagem. A intenção é apresentar um estudo do sistema de juros compostos com o objetivo de facilitar o entendimento dos cálculos de inflação acumulada, de taxas efetivas e reais, de perdas ou ganhos do poder de compra e também, o entendimento dos cálculos das taxas de juros, das prestações e do valor presente, nos sistemas de amortizações Francês e Constante, muito utilizados na prática.

Serão mostradas duas situações em que os juros simples são maiores do que os juros compostos, bem como uma controvérsia envolvendo a súmula 121 do Supremo Tribunal Federal (STF).

Ao se desenvolver os sistemas de amortizações, será dada ênfase ao princípio básico de que "*os juros de cada período incidem apenas sobre os saldos devedores que restam ao pagar-se a prestação do início desse período*".

No caso particular do sistema francês de amortização (muito utilizado no cotidiano das pessoas), será mostrada a importância de se saber a fórmula do termo geral e a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, para se entenderem as fórmulas utilizadas neste sistema.

Para finalizar o capítulo serão feitos comentários sobre a Matemática Financeira na Prática e sobre alguns Livros Didáticos aprovados pelo PNLD, será apresentada uma atividade de matemática financeira aplicada pelo autor em suas aulas e também, serão apresentadas e resolvidas uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio sobre Matemática Financeira e duas questões do PISA de 2012, sendo uma sobre *letramento financeiro*.

3.1 O Sistema de Juros Compostos

Este sistema de juros já era usado na antiguidade e retrata melhor a realidade.

Conforme Sá (2012, p.44),

> A prática dos juros também está documentada nas tábulas das coleções de Berlim, Yale e do Louvre, que contêm problemas sobre juros compostos. Em uma tábula do Louvre, de cerca de 1700 a.C., há o seguinte problema: por quanto tempo deve-se aplicar uma certa soma de dinheiro a juros compostos anuais de 20%, para que ele dobre? (Sá, 2012, p.44)

Conforme, (MATHIAS; GOMES, 1996, p.97)

> No regime de **juros compostos**, que tem grande importância financeira por retratar melhor a realidade, o juro gerado pela aplicação é incorporado à mesma passando a participar da geração de juros no período seguinte. Diz-se então que os juros são capitalizados, e como não só o capital inicial rende juros, mas estes são devidos também sobre os juros formados anteriormente, tem-se o nome de juros compostos (MATHIAS; GOMES, 1996, p.97).

Os valores **compostos**, chamados de **montantes**, passam a render juros no período seguinte. O valor inicial é chamado de capital ou principal. O juro gerado por cada unidade de capital é chamado de **taxa unitária**.

Exemplo 1: Uma pessoa deposita R$100,00 em sua caderneta de poupança no banco XYZ. Sabendo-se que nos três primeiros anos o rendimento dessa aplicação foi de 10% ao ano acumulados anualmente, e que não houve novos depósitos ou retiradas nesse período, o saldo da caderneta ao término do terceiro ano será de:

Resolução 1: Se uma pessoa aplica R$100,00 a juros de 10% a.a. obtém, ao final de 1 ano, R$10,00 de juros e, se esses R$10,00 de juros se compõem aos R$100,00 que ela possuía no início, obtém-se o montante de R$110,00. Como o juro do 2º ano foi de 10% e deve ser calculado sobre esse **montante composto** ela obtém, ao final desse ano, R$11,00 de juros e, se esses R$11,00 de juros se compõem aos R$110,00 que já se possuía no início do 2º ano, obtém-se o novo montante composto de R$121,00. Se o processo continuar, ou seja, se esses R$121,00 forem acrescidos de 10% de juros no terceiro ano obtém-se, R$121,00 + 10% de R$121,00, que é igual a R$133,10. Portanto, o saldo da caderneta de poupança ao término do terceiro ano será de **R$133,10**.

O processo utilizado nessa resolução se torna trabalhoso quando se tem mais de três períodos, dessa forma, é essencial o aluno utilizar o conceito de taxa unitária e **proporção** para desenvolver um processo que mais adiante dará origem a fórmulas para cálculos dos montantes no sistema de juros compostos para taxas de juros constantes ou não necessariamente constantes.

Resolução 2: Como a taxa de juros é de 10% ao ano, ao final de um ano, para cada real aplicado têm-se 10% de R\$1,00, ou seja, $\frac{10}{100} \times R\$1{,}00 = R\$0{,}10$ (taxa unitária). Como para cada real tem-se o montante de R\$1,10 e a pessoa aplicou R\$100,00, ela terá $100 \times R\$1{,}10 = R\$110{,}00$ ao final do primeiro ano. Ao final do segundo ano ela terá $110 \times R\$1{,}10 = R\$121{,}00$, pois a taxa de juros desse ano também é 10%. Ao final do terceiro ano ela terá $121 \times R\$1{,}10 = R\$133{,}10$.

Observa-se que nas três multiplicações efetuadas aparece o fator R\$1,10. Esse fator é chamado de **fator de capitalização** ou **fator de correção** período a período. Observa-se também que basta efetuar o cálculo

- $100 \times 1{,}1 \times 1{,}1 \times R\$1{,}10 = 100 \times R\$1{,}1^3 = 100 \times R\$1{,}331 = R\$133{,}10.$

Quando se aplica o processo de generalização para se chegar às fórmulas dos montantes compostos para taxas de juros constantes ou não necessariamente constantes, utiliza-se esse raciocínio da última observação.

3.1.1 Cálculo do montante após t períodos - no sistema de juros compostos - sendo a mesma taxa de juros em todos os períodos

Tanto nas avaliações do PISA como em outras avaliações às quais os estudantes são submetidos, uma das competências e habilidades exigidas destes é a capacidade de generalizar uma situação dada. Por exemplo:

Representando-se por C o capital e por M_t os montantes obtidos após **t** período(s) de capitalização pode-se formar a sequência C, M_1, M_2, M_3,..., M_t **, ...** , sendo **t**, nesse momento do nosso estudo, um número **natural positivo**.

Indicando-se a taxa unitária por **i**, tem-se um juro de **i** para cada unidade de capital. Sendo assim, o montante para cada unidade de capital é **1+i** . De acordo com a explicação dada no início de 3.1, no sistema de juros compostos o montante M_t obtido ao final do período **t** é calculado sobre os montantes M_{t-1}, sendo $M_0 = C$ quando t=1. Assim, aplicando-se M_{t-1} unidades de capital, tem-se o montante de $M_t = M_{t-1} \times (1+i)$, se **i** for constante para todos os períodos, pois se ***"****1,00 está para o montante (1+i), assim como o montante M_{t-1} está para o montante M_t****"***, sendo todos os valores na mesma unidade monetária, tem-se:

$$\bullet \frac{1{,}00}{(1+i)} = \frac{M_{t-1}}{M_t} \Rightarrow M_t = M_{t-1} \times (1+i).$$

Portanto, aplicando-se C, M_1, M_2, M_3,..., M_t **, ...** unidades de capital e sendo **i** constante para todos os períodos, tem-se os montantes:

- $M_1 = C.(1+i)$, $M_2 = M_1.(1+i)$, $M_3 = M_2.(1+i)$, ... , $M_t = M_{t-1}.(1+i)$.

Com isso, verifica-se que **"**cada termo da sequência C, M_1, M_2, M_3,..., M_t **, ...**, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o termo imediatamente anterior a ele por **(1+i)**". Portanto, a sequência anterior é uma **progressão geométrica** de razão q = 1+i, primeiro termo $a_1 = C$, termo geral $a_n = M_t$ e número de termos n = t+1.

Dessa forma, pode-se encontrar M_t multiplicando-se C por (1+i) até que o número de fatores (1+i) seja igual a t, pois são t períodos de aplicação de juros. Assim, $M_t = C.\underbrace{(1+i).(1+i).\ \ldots\ .(1+i)}_{\text{t fatores iguais a (1+i)}} = C.(1+i)^t$.

Destacando a fórmula, tem-se:

$$\boxed{\mathbf{M_t = C.(1+i)^t}}$$

Fórmula 1 Cálculo do montante no sistema de juros compostos após t períodos a uma mesma taxa de juros

Pode-se encontrar M_t conhecendo-se a fórmula do termo geral da progressão geométrica, observe:

- $a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow M_t = C.(1+i)^{t+1-1} = C.(1+i)^t$

Conforme Sá (2011, p.68),

> Muitas vezes, em nossas aulas de matemática, ensinamos aos alunos do ensino médio o que são progressões, mostramos as fórmulas, resolvemos exercícios de aplicação e, normalmente, não aproveitamos a oportunidade para trabalhar o conceito de juro, bem como suas aplicações em situações de empréstimos ou investimentos. As reformas curriculares, os parâmetros curriculares nacionais, enfatizam que devemos procurar relacionar os conteúdos ministrados com o dia a dia das pessoas. Essa é uma excelente oportunidade para nós, professores de Matemática (SÁ, 2011, p.68).

Como já dito anteriormente, o fator $(1+i)$ é chamado de **fator de capitalização ou fator de correção** período a período. O fator $(1+i)^t$ é chamado de **fator de capitalização total**.

Resolução 3: Têm-se C = R$100,00, i = 10% = 0,1 e t = 3, assim, $M_3 = 100.(1+0{,}1)^3 = 100.1{,}1^3 = 100.1{,}331 = 133{,}10$. Portanto, ao término do terceiro ano essa pessoa terá **R$133,10** em sua caderneta de poupança.

Nesse exemplo não seria trabalhoso calcular manualmente o montante, como já vimos nas três resoluções, mas para quatro ou mais períodos é conveniente utilizar uma calculadora científica para efetuar os cálculos, caso não seja dada alguma informação complementar. Esse é um bom momento para o professor apresentar essa calculadora para os estudantes que a desconhecem.

Em situações que o valor de um capital C perde um mesmo percentual do seu valor a cada período, a uma taxa unitária **i**, o seu valor final V_t após **t** períodos é $V_t = C.(1-i)^t$ se **i** for constante para todos os períodos. Neste caso, $(1-i)$ é chamado de **fator de redução** período a período é o valor $(1-i)^t$ de **fator de redução total**.

Exemplo 2: A cada mês que passa, o preço de uma cesta básica de alimentos diminui 3% em relação ao seu preço do mês anterior. Admitindo que o preço da cesta básica no primeiro mês é R$97,00, o seu preço no 12º mês será, em reais:

a) $97 \times 0{,}03^{12}$ b) $100 \times 0{,}97^{12}$ c) $100 \times 0{,}97^{13}$ d) $97 \times 0{,}03^{11}$ e) $97 \times 0{,}97^{12}$

Fonte: Vestibular da UFPE

Resolução: Sejam C = V_0 = R$97,00 o preço no 1° mês, i = 3% = 0,03 a.m. de diminuição e t = 11 meses (Cuidado: t não é 12, pois t = 12 -1 = 11). Substituindo esses valores na fórmula $V_t = C \times (1-i)^t$, tem-se: $V_{11} = 97 \times (1-0{,}03)^{11} = 97 \times 0{,}97^{11}$ (observe que não tem esse valor nas alternativas e que a alternativa (e) $97 \times 0{,}97^{12}$ é uma "pegadinha" para quem fez t = 12). Assim, precisa-se escrever no lugar de 97 o valor $100 \times 0{,}97$, pois eles são equivalentes. Dessa forma, $97 \times 0{,}97^{11} = 100 \times 0{,}97 \times 0{,}97^{11} = 100 \times 0{,}97^{12}$.

Portanto, o preço dessa cesta básica de alimentos no 12° mês será, em reais, $100 \times 0{,}97^{12}$ (alternativa (b)).

Considerando-se agora **t** um número **real não negativo** e sabendo que C > 0, as funções $M_I(t) = C.(1+i)^t$, i > 0 e $M_{II}(t) = C.(1-i)^t$, 0 < i < 1, possuem gráficos do tipo **exponencial** crescente e decrescente, respectivamente. A seguir, estão representados os gráficos das funções $M_I(t) = 10 \times 1{,}1^t$: sendo $M_I(t)$ o montante gerado por R$10,00, aplicados a 10% a.m., durante t meses e capitalizados mensalmente e, $M_{II}(t) = 20 \times 0{,}97^t$: sendo $M_{II}(t)$ o valor final que R$20,00 assume após t reduções de 3% a.m, diminuídos mensalmente.

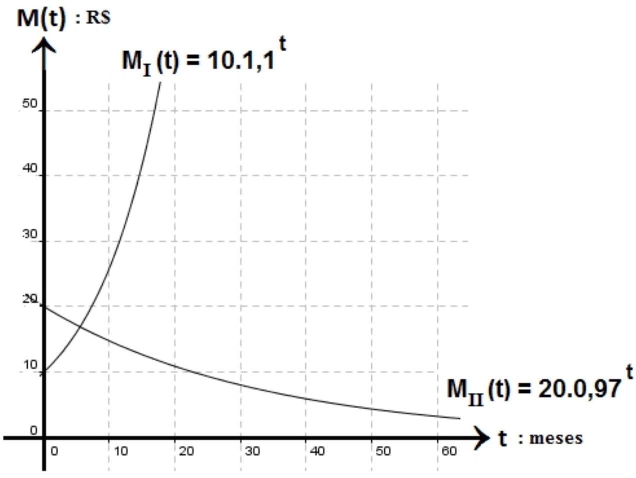


Gráfico 1 Função exponencial crescente e função exponencial decrescente associadas ao regime de crescimento ou decrescimento composto

No cálculo do montante no sistema de juros compostos, entre os estudantes que apenas memorizaram a fórmula **1**, sem entendê-la, um erro muito normal é substituir no lugar de **i** a taxa percentual em vez da taxa unitária. Por exemplo, para uma taxa de juros de 5% utilizam i = 5 em vez de i = 0,05. Lembrando que a taxa unitária é o juro gerado por cada unidade de capital, tem-se que 5% de 1 é igual 0,05, assim i = 0,05. Quando se estuda o sistema de juros simples, muitos livros utilizam a fórmula $J = \frac{C.i.t}{100}$, em que i, neste caso, é a taxa percentual. Esse pode ser o motivo pelo qual alguns estudantes utilizam, erradamente, a taxa percentual no lugar da taxa unitária no sistema de juros compostos.

Como o juro (ou diminuição) a cada período, no **sistema de juros simples**, é calculado sempre sobre o valor inicial C, tem-se (sendo i > 0 a taxa unitária e não a percentual):

- $\underbrace{M(t)}_{f(x)} = \underbrace{C}_{b} + \underbrace{C.i.}_{a}\underbrace{t}_{x}$ (quando há crescimento)
- $\underbrace{M(t)}_{f(x)} = \underbrace{C}_{b} - \underbrace{C.i.}_{a}\underbrace{t}_{x}$ (quando há diminuição)

Nos dois casos o gráfico da função M(t) é parte do gráfico de uma função afim (parte de uma reta). No caso em que há um crescimento, o domínio de M(t) é o conjunto dos números reais não negativos e, no caso em que há uma diminuição, é o conjunto dos números reais compreendidos no intervalo $\left[0, \frac{1}{i}\right]$.

O **montante M_{II}** no sistema de juros **simples é maior** do que o **montante M_I** no sistema de juros **compostos** apenas quando $0 < t < 1$, conforme o gráfico a seguir:

(para um mesmo capital, uma mesma taxa e quando há crescimento)

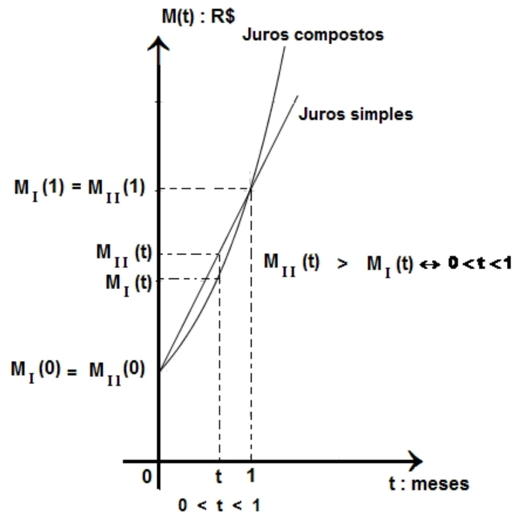


Gráfico 2 Comparação entre os gráficos das funções que representam os montantes em função do tempo nos sistemas de juros simples e compostos

No caso, em que se considera um valor $\mathbf{t_1}$ não negativo e não inteiro, ou seja, $n < t_1 < n + 1$, sendo n um número natural fixo qualquer, diferentemente da situação em que foi feita associação da fórmula do montante composto com a fórmula do termo geral da progressão geométrica (em que $\mathbf{t_1}$ deveria ser um número natural positivo), podem ser utilizadas duas convenções para encontrar o montante $M(t_1)$: a convenção **exponencial** e a convenção **linear**. Esse montante é dado por $M(t_1) = C.(1+i)^{t_1}$ na convenção **exponencial** e por $C.(1+i)^n + k$ (sendo k o juro simples calculado sobre M(n) para o tempo $t_1 - n$, ou seja, $k = i.\ (t_1 - n).\ M(n)$) na convenção **linear**, conforme o gráfico a seguir, em que a aplicação da ideia de juros simples para o tempo $t_1 - n$ também gerou **um montante maior na convenção linear**.

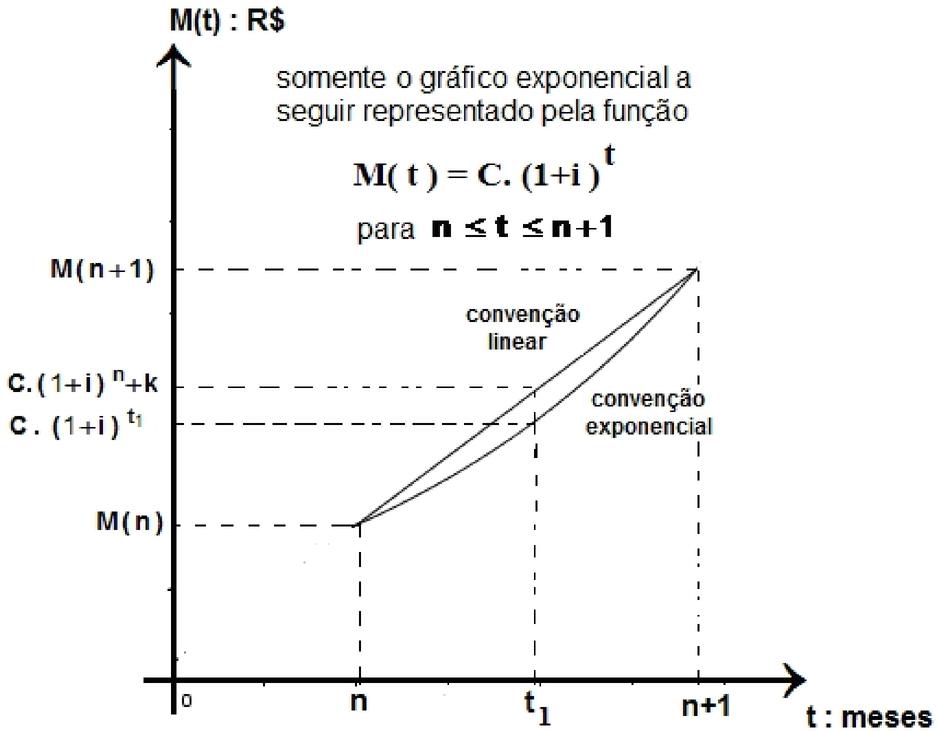


Gráfico 3 Gráficos comparativos dos montantes calculados nas convenções exponencial e linear quando $n < t_1 < n + 1$

O sistema de juros simples tem pouca aplicabilidade prática, como já foi visto na proposta curricular da SBM, apresentada no capítulo 2. Por esse motivo, nesse trabalho não será mais estudado esse sistema. O quadro a seguir é apenas informativo e para as pessoas refletirem. Não será analisado o mérito dessa situação.

Quadro 5 Manifesto a favor do juro composto (RIBEIRO, 2010, p.31)

Professores de finanças lançam manifesto a favor do juro composto

Um grupo de 32 respeitados especialistas em matemática financeira e acadêmicos brasileiros está lançando um manifesto em defesa dos juros compostos, que são empregados nas operações de crédito. Eles se dizem “preocupados com a restrição legal de se capitalizar juros” e “apelam para que os representantes dos poderes Legislativo e Judiciário” reexaminem tal proibição, contida na súmula número 121 do STF (Supremo Tribunal Federal).

“É contrária a tudo que se faz no mundo real e ao que se ensina nas universidades e nos livros”, diz o documento. Os juros compostos são utilizados nos cálculos das parcelas de um empréstimo. Por essa modalidade, os juros de uma dívida são incorporados ao valor principal e passam a render juros também. O método mais comum é o chamado “tabela Price”, que prevê valores fixos das parcelas.

De acordo com estimativas de juristas, há milhões de processos na justiça questionando esse regime quando aplicado a financiamentos habitacionais, por exemplo. Na maioria dos casos, ganham os mutuários que processaram bancos ou construtoras.

Para os signatários do manifesto, entretanto, as decisões são “fundamentadas em argumentos equivocados, que contrariam a lógica e o bom-senso”. “Os juízes recomendam a troca para o sistema de juros simples, mas isso é matematicamente impossível. Não existe uma maneira de corrigir uma operação de crédito usando juros simples”, frisa José Dutra Sobrinho, professor do Insper. “É uma questão científica e não jurídica, portanto.”

Segundo ele, não existe um país que não use a “tabela Price” como regra para os cálculos dos financiamentos.

A súmula 121 do STF diz: *"É vedada a capitalização de juros, ainda que expressamente convencionada"*.

Antes de iniciar uma análise que seria feita em livros didáticos do ensino médio, quanto às atividades de matemática financeira, Sá (2012, p.81), diz:

> Quando se trata de cálculos de juros, os autores consideram que, como ocorre nos juros simples, nos juros compostos basta que a taxa e o tempo estejam referidos a uma mesma unidade que o problema pode ser diretamente resolvido pela fórmula básica. Nesses casos, não aproveitam para ressaltar um conceito fundamental para os juros compostos, que é o de período de capitalização, pressupondo que, se nada foi comentado na situação-problema, subtende-se que esse período é o mesmo definido na taxa e no tempo. Entretanto, não consideramos dessa forma e acreditamos ser importante explicitar o período de capitalização envolvido em cada situação. (SÁ, 2012, p.81)

No exemplo 1 frisou-se que não houve novos depósitos ou retiradas no período da aplicação e explicitou-se o período de capitalização conforme foi citado acima (SÁ, 2012, p.81). Isso também ocorre no exemplo a seguir.

Exemplo 3: Uma pessoa deposita R$100,00 em sua caderneta de poupança no banco XYZ. Sabendo-se que o rendimento dessa aplicação é de 2% ao mês, acumulados mensalmente, e que não houve novos depósitos ou retiradas, o saldo da caderneta, ao término do trigésimo quinto mês será de:

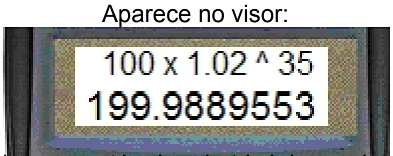
Resolução: Têm-se C = R$100,00, i = 2% = 0,02 e t = 35, assim, $M_{35} = 100.(1+0{,}02)^{35} = 100.1{,}02^{35} \cong 100.2 = 200$. Portanto, ao término do trigésimo quinto mês essa pessoa terá **R$200,00** em sua caderneta de poupança. Observa-se que no sistema de juros compostos o valor inicial dobrou após 35 meses. Se fosse no sistema de juros simples (que não é o caso) o valor inicial dobraria após 50 meses, pois 50.2%=100%.

<u>Calculadora Científica</u> (modelo CASIO *fx-82MS*):

Para calcular $M_{35} = 100 \times 1{,}02^{35}$ basta digitar os números e as teclas em sequência, como a seguir:

100 [×] 1.02 [^] 35 [=]

Aparece no visor:



Indicando que ao término do trigésimo quinto mês o saldo da caderneta é de aproximadamente:
R$200,00

3.1.2 Cálculo da taxa percentual acumulada após t períodos sendo a mesma taxa de juros em todos os períodos

Sabe-se que $C + J = M_t$, sendo J os juros acumulados após t períodos. Assim $J = M_t - C = C.(1+i)^t - C = C.[(1+i)^t - 1]$, sendo t períodos a uma mesma taxa unitária i.

Sabe-se que o capital C está para 100% (pois C é a base de cálculo para J) assim como J está para a taxa percentual acumulada r_{ac} acrescida do símbolo %. Assim, tem-se a proporção:

$$\frac{C}{100\%} = \frac{J}{r_{ac}\%} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{C}{100\%} = \frac{C.[(1+i)^t - 1]}{r_{ac}\%}$$

Portanto, a fórmula para calcular a taxa percentual acumulada de juros após t períodos, sendo a mesma taxa de juros em todos os períodos, é:

$$\boxed{\mathbf{r_{ac}} = 100.\,[(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{t}} - 1]}$$

Fórmula 2 Cálculo da taxa percentual acumulada de juros após t períodos a uma mesma taxa

Em situações que o valor de um capital C perde um mesmo percentual do seu valor a cada período, a uma taxa unitária **i**, o percentual de diminuição será calculado pela fórmula $100.\mathbf{[1-(1-i)^t]}$, em %.

Exemplo 4: Sabendo-se que a inflação dos meses de setembro, outubro e novembro foi de 10% ao mês, pode-se afirmar que a inflação no trimestre foi de:

a) 29,0% b) 29,3% c) 30,0% d) 31,3% e) 33,1%

Fonte: Vestibular da UFRRJ - 2° semestre de 1998

Resolução: Têm-se i = 10% = 0,1 e t = 3. Assim,:

$r_{ac} = 100.[(1+0,1)^3 - 1] = 100.[1,1^3 - 1] \cong 100.[1,331-1] = 100.0,331 = 33,1.$ Portanto, podemos afirmar que a inflação no trimestre foi de **33,1%.** (alternativa (e)). Observação: como nesse caso são poucos períodos, pode-se usar o recurso de atribuir um valor inicial 100 (sem perda de generalidade) e aplicar o processo utilizado na resolução 1 do exemplo 1 para encontrar o montante e, em seguida, subtrai-se desse montante o valor 100, encontrando a taxa percentual acumulada, sendo a inflação acumulada igual a essa taxa percentual seguida do símbolo %.

Exemplo 5: Calcule a taxa de inflação acumulada após 35 meses, sendo de 2% a taxa de juros mensal por todo esse período.

Resolução: Têm-se i = 2% = 0,02 e t = 35.

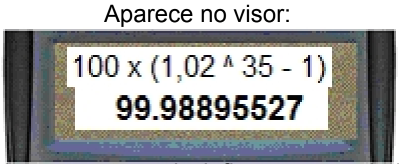
Assim, $r_{ac} = 100.[(1+0,02)^{35} - 1] = 100.[1,02^{35} - 1] \cong 100.[2-1] = 100.1 = 100.$

Portanto, a **inflação** acumulada nesses 35 meses é de aproximadamente **100%**.

<u>**Calculadora Científica**</u> (modelo CASIO *fx-82MS*):

Para calcular $100 \times (1,02^{35} - 1)$ basta digitar os números e as teclas em sequência, como a seguir:

Aparece no visor:



Indicando que a taxa de inflação acumulada é de aproximadamente:**100%.**

3.1.3 Cálculo do número de períodos sendo a mesma taxa de juros em todos os períodos

Nesse caso, utiliza-se a *"propriedade da potência"* dos logaritmos para calcular o número de períodos: "o logaritmo de uma potência x^n ($x > 0$ e **n** um número real qualquer), numa base determinada b ($b > 0$ e $b \neq 1$) é igual ao produto de **n** pelo logaritmo de **x** na base **b**. Em símbolos: $\log_b x^n = n.\log_b x$". Dependendo do problema, outra(s) propriedade(s) dos logaritmos deve(m) ser usada(s).

Partindo-se de $M_t = C.(1+i)^t$, que equivale a $(1+i)^t = \frac{M_t}{C}$ e, aplicando-se logaritmos a ambos os membros dessa última igualdade, obtém-se $\log_b (1+i)^t = \log_b \frac{M_t}{C}$. Aplicando-se a propriedade da potência, tem-se: $t.\log_b (1+i) = \log_b \frac{M_t}{C}$, que equivale a $t = \frac{\log_b \frac{M_t}{C}}{\log_b (1+i)}$.

Destacando a fórmula, tem-se:

$$\boxed{t = \frac{\log_b \frac{M_t}{C}}{\log_b (1+i)}}$$

Fórmula 3 Cálculo do número de períodos no sistema de juros compostos

O valor de b pode ser qualquer número real positivo e diferente de 1. Escolhe-se esse valor de acordo com a conveniência ou com as informações do problema.

Uma atividade interessante nesse momento é resolver o problema citado no início da seção 3.1, utilizando-se as duas convenções vistas anteriormente: *"A prática dos juros também está documentada nas tábulas das coleções de Berlim, Yale e do Louvre, que contêm problemas sobre juros compostos. Em uma tábula do Louvre, de cerca de 1700 a.C., há o seguinte problema: por quanto tempo deve-se aplicar uma certa soma de dinheiro a juros compostos anuais de 20%, para que ele dobre?".*

Pela **convenção exponencial**: $1{,}2^t = 2 \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}2} \cong 3{,}8$ anos.

Pela **convenção linear**:

Conforme, (Sá, 2012, p.45),

> "Os antigos babilônios, é claro, ainda não conheciam logaritmos, mas, com suas tabelas, já sabiam que $1{,}2^3 = 1{,}728$ e $1{,}2^4 = 2{,}0736$, logo, o valor de **t** que procuravam estaria entre 3 e 4. Para resolverem esse tipo de equação, aplicavam o método aproximado da interpolação linear, que nada mais é que determinar o valor de **t** que divide o intervalo entre 3 e 4 na mesma proporção que 2 divide o intervalo entre 1,728 e 2,0736. Com esse método, chegaram à resposta – 3,787 – que é notavelmente próximo da resposta correta" (Sá, 2012, p.45).

Encontra-se o resultado 3,787 fazendo-se a proporção:

$$\frac{2-1{,}728}{2{,}0736-1{,}728} = \frac{t-3}{4-3} \Rightarrow t = 3 + \frac{0{,}272}{0{,}3456} \cong 3{,}787.$$

Observa-se que o método da interpolação linear nada mais é do que a chamada convenção linear, pois de fato o capital C dobra:

$$M_n = C.(1+i)^n \Rightarrow M_3 = C.(1{,}2)^3 = 1{,}728.C \Rightarrow M_t = 1{,}728.C + 0{,}2.0{,}787.1{,}728.C \cong 2.C$$

Exemplo 6: Para acompanhar a inflação, o preço de determinado produto deverá ser reajustado em 2% ao mês. Em quantos meses, aproximadamente, o preço desse produto dobrará? Observação: Considere log 2 = 0,3010, log 10 = 1 e log 102 = 2,0086.

Fonte: Vestibular da UFRRJ - 1° semestre de 1996

Resolução: Baseado na resolução do exemplo 3, já se sabe que a resposta é 35 meses. Para comprovar pode-se utilizar a fórmula 3. Neste caso, os logaritmos dados não possuem base (subtende-se que a base é 10, ou seja, $b = 10$), têm-se também i = 2% = 0,02 e $M_t = 2C$.

Substituindo esses valores na fórmula 3, tem-se: $t = \dfrac{\log_{10} \dfrac{2C}{C}}{\log_b (1+0{,}02)} = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}02}$ (o valor dessa expressão seria facilmente obtido com uma calculadora científica, mas na prova do vestibular não podia utilizar calculadora). Como o enunciado não informa o valor de $\log 1{,}02$, tem-se que utilizar a *"propriedade do quociente"* dos logaritmos para calculá-lo $(\log 1{,}02 = \log \frac{102}{100} = \log 102 - \log 100 \cong 2{,}0086 - 2 = 0{,}0086)$.

Assim, tem-se:

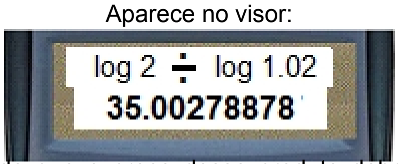
$$t \cong \frac{0{,}3010}{0{,}0086} = \frac{3010}{86} = 35.$$

Portanto, comprova-se que em aproximadamente **35** meses o preço desse produto dobrará. (Observação: no gabarito oficial da UFRRJ a resposta era n = 36 meses, pois foi usada a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, porém, como já foi visto n = t+1. Assim, t+1 = 36, ou seja, t = 35).

Calculadora Científica (modelo CASIO *fx-82MS*):

Para calcular $\frac{\log 2}{\log 1{,}02}$ basta digitar os números e as teclas em sequência, como a seguir:

Aparece no visor:



Indicando que o preço desse produto dobrará em aproximadamente:
35 meses

3.1.4 Cálculo do montante após t períodos, no sistema de juros compostos, sendo as taxas de juros de cada período não necessariamente iguais

Neste caso, basta repetir o procedimento explicado em 3.1.1. Representando-se as taxas unitárias de cada período t, respectivamente, por $i_1, i_2, i_3, ..., i_t$, tem-se:

$$M_t = C.\underbrace{(1+i_1).(1+i_2).(1+i_3).\ \ldots\ .(1+i_t)}_{\text{t fatores não necessariamente iguais}}$$

Destacando a fórmula, tem-se:

$$\boxed{\mathbf{M_t = C.(1+i_1).(1+i_2).(1+i_3).\ \ldots\ .(1+i_t)}}$$

Fórmula 4 Cálculo do montante no sistema de juros compostos após t períodos a taxas de juros não necessariamente iguais a cada período

Em situações que o valor de um capital C perde seu valor a cada período a taxas unitárias iguais a $i_1, i_2, i_3, ..., i_t$, respectivamente,, o seu valor final $\mathbf{V_t}$ após **t** períodos é $V_t = C.(1-i_1).(1-i_2).(1-i_3).\ ....(1\text{-}i_t)$ se **i** for constante para todos os períodos. Neste caso, valor $(1-i_1).(1-i_2).(1-i_3).\ ....(1\text{-}i_t)$ é chamado de **fator de redução total** e os fatores **de reduções** período a período são diferentes e valem $(1-i_1)$, $(1-i_2)$, $(1-i_3)$, ..., $(1\text{-}i_t)$.

Em situações que o valor de um capital C perde seu valor a cada período a taxas unitárias iguais a $i_1, i_2, i_3, ..., i_t$, respectivamente, o percentual de diminuição será calculado pela fórmula $100.\mathbf{[1-(1-i_1).(1-i_2).(1-i_3).\ ....(1\text{-}i_t)]}$, em %.

Exemplo 7: Uma pessoa deposita R$1.000,00 numa caderneta de poupança. Sabendo-se que no primeiro mês, o rendimento total, incluindo juros e correção monetária, foi 3% e no segundo mês, de 2% e não havendo novos depósitos ou retiradas, o saldo da caderneta, ao término do segundo mês será de:

a) R$ 1 050,00 b) R$ 1 050,60 c) 1 056,00 d) R$ 1 500,00 e) R$ 1 506,00

Fonte: Vestibular da UFRRJ – 1° semestre de 1997

Resolução 1: Basta calcular R$1.000,00 + 3% de R$1.000,00 = R$1.030,00 e em seguida calcular R$1.030,00 + 2% de R$1.030,00 = R$1.050,60 (alternativa (b)).

Resolução 2: Têm-se $C = R\$1.000,00$, $t = 2$, $i_1 = 2\% = 0,02$ e $i_2 = 3\% = 0,03$. Utilizando-se a fórmula 4 obtém-se:

- $M_2 = 1000.(1+0,02).(1+0,03) = 1000.1,02.1,03 = 1050,60$. Portanto, o saldo da caderneta, ao término do segundo mês será de **R$1.050,60**.

3.1.5 Cálculo da taxa percentual acumulada após t períodos, sendo as taxas de juros de cada período não necessariamente iguais

Neste caso, basta repetir o procedimento explicado em 3.1.2. Representando-se as taxas unitárias de cada período t, respectivamente, por $i_1, i_2, i_3, ..., i_t$, basta substituir $[(1+i)^t - 1]$ por $[(1+i_1).(1+i_2).(1+i_3).\ ...\ .(1+i_t) - 1]$ na fórmula 2 , ou seja, em $r_{ac} = 100.[(1+i)^t - 1]$.

Portanto, a fórmula para calcular a taxa percentual acumulada de juros após t períodos, sendo as taxas de juros de cada período não necessariamente iguais, é:

$$\boxed{r_{ac} = 100.[(1+i_1).(1+i_2).(1+i_3).\ \ldots\ .(1+i_t)-1]}$$

Fórmula 5 Cálculo da taxa percentual acumulada de juros após t períodos a taxas de juros não necessariamente iguais a cada período

Exemplo 8: Num determinado país, em setembro de 2003, houve uma inflação de 2%. Em outubro do mesmo ano, a inflação foi de 2,5%. A taxa de inflação acumulada nesses dois meses foi de:

a) 4,5% b) 4,55% c) 4,65% d) 5% e) 5,5%

Fonte: Concurso para técnico administrativo do CEFET/RJ

Resolução: Têm-se t = 2, i_1 = 2% = 0,02 e i_2 = 2,5% = 0,025. Assim, $100.[(1+0{,}02).(1+0{,}025)-1]=100.[1{,}02.1{,}025-1]=100.0{,}0455=4{,}55$. Portanto, podemos afirmar que a inflação acumulada nesses dois meses foi de **4,55%.** (alternativa (b)).

Observação: como nesse caso são poucos períodos, pode-se usar o recurso de atribuir um valor inicial 100 (sem perda de generalidade) e aplicar o processo utilizado na resolução 1 do exemplo 1 para encontrar o montante e, em seguida, subtrai-se desse montante o valor 100, encontrando a taxa percentual acumulada, sendo a inflação acumulada igual a essa taxa percentual seguida do símbolo %. Assim, 100+2% de 100 = 102, 102 + 2,5% de 102 = 104,55 e 104,55 – 100 = 4,55 e a inflação acumulada é **4,55%**.

Exemplo 9: Nos três primeiros meses de um ano, a inflação foi respectivamente de 5%, 4% e 6%. Nestas condições, a inflação acumulada do trimestre foi:

a) 15,752% b) 15% c) 12% d) 15,480% e) 15,360%

Fonte: Vestibular do MACKENZIE

Resolução: Têm-se t = 3, i_1 = 5% = 0,05, i_2 = 4% = 0,04 e i_3 = 6% = 0,06 . Assim, $100.[(1+0{,}05).(1+0{,}04).(1+0{,}06)-1]=100.[1{,}05.1{,}04.1{,}06-1]=100.0{,}15752=15{,}752$.

Portanto, podemos afirmar que a inflação acumulada nesses dois meses foi de **15,752%.** (alternativa (a)).

Observação: como nesse caso são poucos períodos, pode-se usar o recurso de atribuir um valor inicial 100 (sem perda de generalidade) e aplicar o processo utilizado na resolução 1 do exemplo 1 para encontrar o montante e, em seguida, subtrai-se desse montante o valor 100, encontrando a taxa percentual acumulada, sendo a inflação acumulada igual a essa taxa percentual seguida do símbolo %. Assim, 100+5% de 100 = 105, 105 + 4% de 105 = 109,2, 109,2 + 6% de 109,2 = 115,752 e 115,752 – 100 = 15,752 e a inflação acumulada é 15,752**%**.

Exemplo 10: No capítulo 1 foi dito que seria explicado como calcular a inflação de 347,51% em quase 20 anos do Plano Real, de acordo com o que foi enunciado nesse capítulo, ou seja, *"Ao longo de quase 20 anos do Plano Real, a inflação acumulada desde 1/07/1994 até 1/2/2014, medida pelo IPCA, foi de 347,51%. Assim, um produto que custava R$1,00 em 1994 custa hoje R$4,47"*.

Resolução: O passo inicial para solucionar esse exemplo é se recorrer a alguma fonte que apresente as inflações de todos os meses em questão. Isso foi feito e os resultados estão no quadro a seguir:

Quadro 6 Percentuais[1] de inflações mensais medidas pelo IPCA de 01/07/1994 até 01/02/2014

	jan	fev	mar	abr	mai	jun	jul	ago	set	out	nov	dez	acum.
1994	-	-	-	-	-	-	6,84	1,86	1,53	2,62	2,81	1,71	18,57
1995	1,70	1,02	1,55	2,43	2,67	2,26	2,36	0,99	0,99	1,41	1,47	1,56	22,41
1996	1,34	1,03	0,35	1,26	1,22	1,19	1,11	0,44	0,15	0,30	0,32	0,47	9,56
1997	1,18	0,50	0,51	0,88	0,41	0,54	0,22	-0,02	0,06	0,23	0,17	0,43	5,22
1998	0,71	0,46	0,34	0,24	0,50	0,02	-0,12	-0,51	-0,22	0,02	-0,12	0,33	1,66
1999	0,70	1,05	1,10	0,56	0,30	0,19	1,09	0,56	0,31	1,19	0,95	0,60	8,94
2000	0,62	0,13	0,22	0,42	0,01	0,23	1,61	1,31	0,23	0,14	0,32	0,59	5,97
2001	0,57	0,46	0,38	0,58	0,41	0,52	1,33	0,70	0,28	0,83	0,71	0,65	7,67
2002	0,52	0,36	0,60	0,80	0,21	0,42	1,19	0,65	0,72	1,31	3,02	2,10	12,53
2003	2,25	1,57	1,23	0,97	0,61	-0,15	0,20	0,34	0,78	0,29	0,34	0,52	9,30
2004	0,76	0,61	0,47	0,37	0,51	0,71	0,91	0,69	0,33	0,44	0,69	0,86	7,60
2005	0,58	0,59	0,61	0,87	0,49	-0,02	0,25	0,17	0,35	0,75	0,55	0,36	5,69
2006	0,59	0,41	0,43	0,21	0,10	-0,21	0,19	0,05	0,21	0,33	0,31	0,48	3,14
2007	0,44	0,44	0,37	0,25	0,28	0,28	0,24	0,47	0,18	0,30	0,38	0,74	4,46
2008	0,54	0,49	0,48	0,55	0,79	0,74	0,53	0,28	0,26	0,45	0,36	0,28	5,90
2009	0,48	0,55	0,20	0,48	0,47	0,36	0,24	0,15	0,24	0,28	0,41	0,37	4,31
2010	0,75	0,78	0,52	0,57	0,43	0,00	0,01	0,04	0,45	0,75	0,83	0,63	5,91
2011	0,83	0,80	0,79	0,77	0,47	0,15	0,16	0,37	0,53	0,43	0,52	0,50	6,50
2012	0,56	0,45	0,21	0,64	0,36	0,08	0,43	0,41	0,57	0,59	0,60	0,79	5,84
2013	0,86	0,60	0,47	0,55	0,37	0,26	0,03	0,24	0,35	0,57	0,54	0,92	5,91
2014	0,55	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,55
percentual de inflação acumulada de 01/07/1994 até 01/02/2014													**347,51**

[1] Disponível em: <http://www.portalbrasil.net/ipca.htm>. Acesso em 23 de julho de 2015.

Agora basta utilizar a fórmula 5, ou seja,

$$r_{ac} = 100.[(1+i_1).(1+i_2).(1+i_3).\ ...\ .(1+i_t)-1]$$

O problema aqui é que se têm t = 235 e os cálculos são muito trabalhosos, mesmo que se utilize uma calculadora científica.

Tem-se que fazer: $r_{ac} = 100.[(1+i_1).(1+i_2).(1+i_3).\ ...\ .(1+i_{235})-1]$, ou seja, $r_{ac} = 100.[(1+0{,}0684).(1+0{,}0186).(1+0{,}0153).\ ...\ .(1+0{,}0055)-1] = 347{,}51$.

Portanto, o percentual de inflação acumulada do Real de 01/07/1994 até 01/02/2014 foi de **347,51%** (está correto o enunciado).

Observação: Os cálculos foram feitos utilizando uma planilha eletrônica e para encontrar o valor exato a planilha considera as casas decimais em sua memória e não apenas as mostradas.

3.1.6 Taxas de juros proporcionais e equivalentes e taxas de juros nominal e efetiva

Conforme, (Crespo, 1999, p.82)

> Duas taxas são **proporcionais** quando seus valores formam uma proporção com os tempos a elas referidos, reduzidos à mesma unidade. (Crespo, 1999, p.82)

Exemplo: 10% ao mês é proporcional a 20% ao bimestre (tanto no sistema de juros simples quanto no sistema de juros compostos)

Conforme, (Crespo, 1999, p.83)

> Duas taxas são **equivalentes** quando, aplicadas a um mesmo capital, durante o mesmo período, produzem o mesmo juro. (Crespo, 1999, p.83)

Exemplo: no sistema de juros simples 10% ao mês é equivalente a 20% ao bimestre e no sistema de juros compostos 10% ao mês é equivalente a 21% ao bimestre. (observa-se que no regime de juros simples, duas taxas proporcionais são equivalentes)

Conforme, (Crespo, 1999, p.122)

> Taxa **nominal** é aquela cujo período de capitalização não coincide com aquele a que ela se refere. (Crespo, 1999, p.122)

Exemplo: Quando se tem 20% ao bimestre, capitalizados mensalmente, 20% é a taxa nominal.

No exemplo anterior a **taxa efetiva** é a taxa bimestral **equivalente** a 10% ao mês, ou seja, **a taxa efetiva** é **21%** ao bimestre.

Exemplo 11: Determinar o montante aproximado, após 35 meses, de uma aplicação de R$100,00, que rende 24% ao ano, capitalizados mensalmente. Qual é, aproximadamente, a taxa efetiva anual dessa aplicação?

Resolução: Nesse exemplo, 24% ao ano é a taxa **nominal**. Como a capitalização é mensal deve-se determinar a taxa mensal **proporcional** a 24% ao ano. Como 1 ano tem 12 meses, tem que a taxa proporcional mensal é $\frac{24\%}{12} = 2\%$. Assim, o montante após 35 meses é $M_{35} = R\$100{,}00 \times 1{,}02^{35} \cong R\$200{,}00$. A **taxa efetiva** dessa operação é a taxa anual **equivalente** a 2% ao mês. Como *"duas taxas são **equivalentes** quando, aplicadas a um mesmo capital, durante o mesmo período, produzem o mesmo juro"*, tem-se (sendo i_a a taxa unitária anual e i_m a taxa unitária mensal):

$$C.(1+i_a)^{1\,\text{ano}} = C.(1+i_m)^{12\,\text{meses}} \Rightarrow i_a = 1{,}02^{12} - 1 \Rightarrow i_a \cong 0{,}2682 = 26{,}82\%.$$

Portanto, o montante aproximado após 35 meses é de **R$200,00** e a taxa efetiva dessa operação é de **26,82%** ao ano, aproximadamente.

Observe que $R\$100{,}00 \times 1{,}2682^{\frac{35}{12}\text{anos}} \cong R\$200{,}00$, pois 2% a.m. e 26,82% a.a. são equivalentes e 35 meses é igual a $\frac{35}{12}$ anos.

Utilizando-se a fórmula $M(t) = C.(1+i)^t$, sendo i a taxa unitária **nominal**, o professor de matemática pode aplicar com os alunos do ensino médio um processo passo a passo para se chegar à fórmula $M(t) = C.e^{i.t}$, podendo calcular intuitivamente que e = 2,71828..., sem necessariamente demonstrar que existe o limite que aparecerá. Mostra-se que $C.e^{i.t}$ é o **maior valor possível** para o montante $M(t)$, aplicado a uma taxa nominal de juros, **capitalizada continuamente**. Isso é uma forma de motivação para os estudantes conhecerem mais uma interessante associação que os juros compostos possuem com tópicos da matemática em geral e, nesse caso, também com outras áreas do conhecimento (devido às aplicações que essa fórmula tem em outras áreas). Um exemplo de utilização da fórmula $M(t) = C.e^{i.t}$ e sua demonstração encontram-se no apêndice M.

3.1.7 Taxa real de juros e taxa aparente de juros

Ainda conforme, (Crespo, 1999, p.124)

> Denominamos **taxa aparente** aquela que vigora nas operações correntes.
> Quando não há inflação, a taxa aparente é igual à taxa real; porém, quando há **inflação**, a taxa aparente é formada por dois componentes: um correspondente à inflação e outro correspondente ao juro real. (Crespo, 1999, p.124)

Sendo C o valor inicial do salário, $\mathbf{i_f}$ a taxa unitária de **inflação** (aumento do preço a cada unidade monetária), $\mathbf{i_r}$ a taxa unitária de aumento **real** e $\mathbf{i_a}$ a taxa unitária **aparente**, tem-se:

$$\bullet\, C.(1+i_f).(1+i_r) = C.(1+i_a) \Rightarrow i_r = \frac{1+i_a}{1+i_f} - 1$$

Destacando-se a fórmula, tem-se:

$$\boxed{\mathbf{i_r} = \frac{(1+\mathbf{i_a})}{(1+\mathbf{i_f})} - 1}$$

Fórmula 6 Cálculo da taxa unitária de aumento real

Exemplo 12: Se seu salário sobe 26% e os preços sobem 20%, de quanto aumenta o seu poder aquisitivo?

a) 5% b) 6% c) 7% d) 8% e) 9%

Fonte: Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) de 1997

Resolução 1: Essa questão foi cobrada na 1ª fase sênior da OBM (para alunos cursando o ensino médio, ou seja, que tinham concluído pelo menos o ensino fundamental). Esse nível mínimo é o mesmo exigido nas avaliações do PISA. A questão deveria ter informado que os aumentos do salário e dos preços foram num mesmo período de tempo. Um erro muito comum cometido ao resolver problemas desse tipo é fazer a diferença 26% - 20% = 6%, o que levaria à conclusão de que a alternativa correta é a letra (b). Porém, deve-se ter em mente que para saber o aumento do poder aquisitivo deve-se analisar o que se compra a mais de um produto após os aumentos do salário e dos preços em relação ao valor *composto* pelo valor inicial do salário mais o aumento que os preços tiveram. Assim, a base de cálculo para se calcular o aumento do poder aquisitivo é de 100% + 20% = 120%. Dessa forma, tem-se a proporção:

*"120% está para 100% assim como 6% está para **x%** de aumento do poder aquisitivo",* ou seja:

$$\frac{120\%}{100\%} = \frac{6\%}{x\%} \Rightarrow x = \frac{100.6}{120} = 5$$

Portanto, o aumento do poder aquisitivo foi de **5%** (alternativa (a)), ou seja, houve um **aumento real** do salário em 5%.

Uma forma simples de entender melhor essa situação é supor que o valor inicial do salário é R\$100,00 (sem perda de generalidade). Após o aumento o valor desse salário passou para R\$100,00 + 26% de R\$100,00 = R\$126,00, mas o preço de um produto que era vendido por R\$100,00 (mesmo valor do salário) passou a ser vendido por R\$100,00 + 20% de R\$100,00 = R\$120,00 (nova base de cálculo). Assim, o **aumento real** desse salário foi R\$126,00 – R\$120,00 = R\$6,00. Porém, esse aumento real deve ser visto em relação ao novo preço (R\$120,00). Como R\$6,00 corresponde a 5% de R\$120,00 (basta fazer uma proporção), tem-se que se compra 5% a mais de um produto após os aumentos do salário e dos preços, em relação a antes desses aumentos. Portanto, o aumento do poder aquisitivo é de **5%** (letra (a)).

Resolução 2: Como precisa-se ter em mente que para saber o aumento do poder aquisitivo deve-se analisar o que se compra a mais de um produto após os aumentos do salário e dos preços, em relação ao valor *composto* pelo valor inicial do salário mais o aumento que os preços tiveram., tem-se o regime de *juros compostos*. Sendo C o valor inicial do salário, $\mathbf{i_f}$ = 20% = 0,2 a taxa unitária de **inflação** (aumento do preço a cada unidade monetária), $\mathbf{i_r}$ a taxa unitária de aumento **real** e $\mathbf{i_a}$ = 26% = 0,26 a taxa unitária **aparente**, tem-se:

$$\bullet\, C.(1+i_f).(1+i_r) = C.(1+i_a) \Rightarrow i_r = \frac{1+i_a}{1+i_f} - 1 \Rightarrow i_r = \frac{1{,}26}{1{,}2} - 1 = 0{,}05 = 5\%.$$

Exemplo 13: Suponha que em dois meses um determinado título de capitalização teve seu valor reajustado em 38%. Sabendo-se que o reajuste no 1º mês foi de 15%, podemos afirmar que o do 2º mês foi de:

a) 18,5% b) 19,5% c) 20% d) 21,5% e) 23%

Fonte: Vestibular da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro – UniRio

Resolução 1: Um erro muito comum cometido ao resolver problemas desse tipo é fazer a diferença 38% - 15% = 23%, o que levaria à conclusão de que a alternativa correta é a letra (e). Porém, deve-se ter em mente que para saber o valor do reajuste do título no 2° mês deve-se analisar a diferença entre o valor do seu reajuste em dois meses e o valor do seu reajuste no 1° mês, em relação ao valor *composto* pelo valor inicial desse título mais o valor do reajuste do 1° mês. Como feito no exemplo 12, uma forma simples de entender melhor essa situação é supor que o valor inicial do título é de R$100,00 (sem perda de generalidade). Após um mês o valor desse título é R$100,00 + 15% de R$100,00 = R$115,00 (base de cálculo para o 2° mês) e após 2 meses é de R$100,00 + 38% de R$100,00 = R$138,00. Assim, a valorização do 2° mês foi de R$138,00 – R$115,00 = R$23,00. Como R$23,00 corresponde a 20% de R$115,00 (basta fazer uma proporção), tem-se que a valorização do título no 2° mês foi de **20%** (alternativa (c)).

Resolução 2: Como o reajuste do segundo mês é calculado sobre o valor *composto* pelo valor inicial do título mais o valor do seu reajuste do 1° mês, tem-se o regime de *juros compostos*. Sendo C o valor inicial, $\mathbf{i_1}$ = 15% = 0,15 e $\mathbf{i_2}$ as taxas unitárias de reajuste dos 1° e 2° meses e $\mathbf{i_n}$ = 38% = 0,38 a taxa unitária de reajuste em 2 meses, tem-se:

$$\bullet\, C.(1+i_1).(1+i_2) = C.(1+i_n) \Rightarrow i_2 = \frac{1+i_n}{1+i_1} - 1 \Rightarrow i_2 = \frac{1,38}{1,15} - 1 = 0,2 = 20\%.$$

Exemplo 14: Em um período em que os preços subiram 82%, os salários de certa categoria aumentaram apenas 30%. Para que os salários recuperem o poder de compra, eles devem ser aumentados em:

a) 40% b) 46% c) 52% d) 58% e) 64%

Fonte: Vestibular UNIFICADO

Resolução: Um erro muito comum cometido ao resolver problemas desse tipo é fazer a diferença 82% - 30% = 52%, o que levaria à conclusão de que a alternativa correta é a letra (c). Supondo que o valor inicial do salário é R$100,00 (sem perda de generalidade). Após o aumento o valor desse salário passou para R$100,00 + 30% de R$100,00 = R$130,00 (nova base de cálculo), mas o preço de um produto que era vendido por R$100,00 (mesmo valor do salário) passou a ser vendido por R$100,00 + 82% de R$100,00 = R$182,00. Assim, para que esse salário recupere o seu poder de compra ele deve ser **aumentado** de R$182,00 – R$130,00 = R$52,00. Porém, esse valor deve ser visto em relação ao salário com aumento (R$130,00). Como R$52,00 corresponde a 40% de R$130,00 (basta fazer uma proporção), tem-se que para que esse salário **recupere o seu poder de compra** ele deve ser **aumentado** de **40%** (letra (a)). Aqui houve uma perda do poder de compra de $\frac{52}{182} \times 100\% \cong 28{,}57\%$.

Exemplo 15: Pode-se resolver a questão 6 da pesquisa que será analisada no capítulo **4** de forma parecida com a que foi resolvido o exemplo 14.

> **Questão 6 da Pesquisa**
> (...) em 1989, chegou a produzir uma inflação anual de 1973%. O recorde mensal seria batido em março do ano seguinte, quando a taxa alcançou **82%**. (...). <u>**Uma nota de 100 valia menos de 20 no fim do mês**</u>. (...).
> Existe um erro na conclusão do enunciado acima. Qual seria o verdadeiro valor de uma nota de R$ 100,00 (recebida no início de março) no fim do mês de março?

Resolução: Supondo uma nota de R$100,00. Como após um mês a nota continua sendo de R$100,00, mas o preço de um produto que era vendido por R$100,00 (mesmo valor da nota) passou a ser vendido por R$100,00 + 82% de R$100,00 = R$182,00 (base de cálculo). Assim, uma nota de R$100,00, que no início do mês de março de 1990 valia R$100,00, no final desse mês passou a valer aproximadamente **54,95%** do seu valor no início desse mês e não menos de R$20,00 (basta resolver a proporção: *"R$182,00 está para 100% assim como R$100,00 está para a **x%**"* sendo **x** a taxa percentual no final do mês de março em relação ao início desse mês).

Observação 1: bastava fazer $\frac{100}{182} \times 100\% \cong 54{,}95\%$.

Observação 2: Houve uma perda do poder de compra de aproximadamente 45,05%.

Observação 3: Maiores detalhes sobre essa questão encontram-se na pesquisa que será apresentada e analisada no capítulo 4.

3.2 Empréstimos e Financiamentos

Ao efetuar-se um financiamento de um bem qualquer, a pessoa pode fazer diversas opções, tais como: com entrada ou sem entrada, prestações fixas ou diferentes, entrada igual aos valores das prestações ou entrada diferente dos valores destas, caso elas sejam fixas, etc. Já, ao efetuar-se um empréstimo, é natural que a pessoa não pague nenhuma prestação de entrada, visto que se ela está tomando um empréstimo é porque ela já o faz com um valor de acordo com as suas necessidades. Porém, será cobrado (tomando-se esse empréstimo num banco ou qualquer outra instituição financeira) o Imposto sobre Operações Financeiras (IOF) e também podem ser cobrados outros valores de acordo com a modalidade desse empréstimo. No caso do IOF o tomador tem a opção de pagá-lo antecipado ou financiá-lo junto com o empréstimo. Se optar-se pela primeira, tem-se uma situação de empréstimo equivalente a um financiamento cuja entrada é o valor deste IOF adicionado a outros possíveis valores que também poderiam ser pagos antecipadamente e, ao optar-se pela segunda, há um acréscimo no valor do principal emprestado, sendo este igual ao valor inicial do empréstimo, adicionado ao IOF e outros possíveis valores. Ao utilizarem-se as fórmulas que serão apresentadas mais adiante e demonstradas em apêndices, as pessoas ao tomarem um empréstimo sem antecipar o IOF ou outros valores possíveis, além do que foi explicado acima, devem levar em consideração se há outras informações, tais como: c**arência** (período de tempo transcorrido entre o dia da efetivação do empréstimo e o dia que antecede em um período o dia do pagamento da primeira prestação), pagamentos de seguros, de taxas, etc.

Na teoria as coisas são mais fáceis, mas na prática é mais complicado, pois, além dessas informações e outras possíveis, a pessoa ainda deve conhecer possíveis legislações que regem o sistema financeiro do país.

Os exemplos apresentados aqui serão para dar um embasamento teórico para as pessoas terem noções de como funciona os empréstimos e os financiamentos na prática.

Para se iniciar o desenvolvimento deste assunto, antes mesmo de se apresentar os conceitos de saldo devedor, amortização e outros importantes conceitos, o exemplo a seguir mostra uma **maneira disfarçada de cobrar 100% de juros** (em apenas um mês) dos clientes poucos familiarizados com cálculos simples envolvendo financiamentos. Isso se deve ao fato de os clientes, na maioria das vezes, não conhecerem um **princípio básico**, que é fundamental quando se estuda esse assunto, princípio este que já foi comentado na introdução deste capítulo e será estudado no decorrer desta seção e subseções seguintes.

Exemplo 16: Uma loja oferece duas opções de pagamento na compra de uma mercadoria: à vista, com 25% de desconto, ou em duas prestações mensais iguais sem desconto, sendo a primeira prestação paga no ato da compra. A taxa mensal de juros dessa loja, embutidos nas vendas a prazo, é de:

a) 20% b) 25% c) 50% d) 100% e) 150%

Fonte: Concurso Público – Secretário Executivo - UFJF

Resolução: Observa-se que esse exemplo é idêntico à questão 2 da pesquisa que será apresentada e analisada no capítulo 4. O verdadeiro preço é aquele que tem 25% de desconto, independentemente do preço de um artigo nessa loja. Assim, por exemplo, se um artigo custa R$100,00 para pagamento em duas prestações de R$50,00, o cliente que comprar à vista só pagará R$75,00. Mas, como a primeira prestação é paga no ato da compra, se esse cliente tivesse os R$75,00 para comprar à vista e optasse para pagar em duas vezes de R$50,00, após a entrada ficaria com R$75,00-R$50,00=R$25,00 para pagar daí a um mês a segunda parcela de R$50,00. Portanto, a loja está cobrando **100% de juros** em apenas um mês, pois a dívida não quitada no ato da compra (R$25,00) dobrou após um mês (R$50,00). (alternativa (d)).

3.2.1 Saldo devedor, amortização e juros

No exemplo 16, a **dívida não quitada** no ato da compra, ou seja, a **diferença** entre o **verdadeiro preço à vista** e a **entrada** é chamada de **Saldo Devedor inicial** após o pagamento da entrada (1ª prestação).

De um modo geral, com ou sem entrada, ao pagar **cada prestação**, a partir da 2ª, tem-se um **novo Saldo Devedor**, que é a **diferença** entre o **valor acumulado** (saldo devedor do período anterior + o juro do período) até o dia do vencimento desta (antes de pagá-la) e o **valor da prestação** paga nesse dia.

Como já foi dito em 3.1.1, tanto nas avaliações do PISA como em outras avaliações às quais os estudantes são submetidos, uma das competências e habilidades exigidas destes é a capacidade de generalizar uma situação dada.

Com o intuito de generalizar, representar-se-ão por $SD_a(k)$ e $SD_d(k)$ respectivamente, os valores dos **Saldos Devedores** no dia do vencimento da prestação de número **k** (antes e depois do seu pagamento), em que **k** varia de **1** até **n**, sendo **k** o número da prestação correspondente e **n** o total de prestações. Assim, os saldos devedores no dia do vencimento da prestação n° k e antes do seu pagamento, **s**ão representados por $SD_a(1), SD_a(2), \ldots, SD_a(n)$ e os saldos devedores no dia do vencimento da prestação n° k e depois do seu pagamento, por $SD_d(1), SD_d(2), \ldots, SD_d(n)$. A **DÍVIDA** será considerada **QUITADA** (integralmente paga) quando $SD_d(n) = 0$**,** ou seja, quando não restar nada a pagar após o pagamento da última prestação, o que deverá ocorrer sempre.

No exemplo 16, tem-se: $SD_d(1) = R\$25{,}00\,(\underbrace{R\$75{,}00}_{\text{preço à vista}} - \underbrace{R\$50{,}00}_{\text{entrada}})$ e $SD_d(2) = R\$0{,}00\,(\underbrace{R\$50{,}00}_{SDd(1)+\text{Juros de }100\%} - \underbrace{R\$50{,}00}_{2^{a}\text{ prestação}})$. Como $SD_d(2) = R\$0{,}00$, a dívida foi quitada ao pagar-se a 2ª e última prestação de R$50,00.

A parcela da prestação que não inclui os juros é chamada de **Amortização (**parcela da prestação que está sendo efetivamente paga). Todas as **prestações** (quando os juros[2] são menores que estas) podem ser vistas como sendo **a soma das amortizações com os juros** embutidos nas mesmas, sendo que **a entrada**, quando houver, tem **nula** a parcela correspondente ao juro.

Como já foi dito na introdução deste capítulo, ao se desenvolver os sistemas de amortizações, será dada ênfase ao **princípio básico** de que ***"****os juros de cada período incidem apenas sobre os saldos devedores que restam ao pagar-se a prestação do início desse período****"***.

Representam-se, de um modo geral, os valores dos **Juros** e das **Amortizações** embutidos em cada prestação, respectivamente, por $\mathbf{J_k}$ e $\mathbf{A_k}$, em que **k** varia de **1** até **n,** sendo **k** o número da prestação correspondente, sendo **n** o total de prestações. Assim, os **Juros** são representados por $\mathbf{J_1}$, $\mathbf{J_2}$, ... , J_n e as **Amortizações** por $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, ... , $\mathbf{A_n}$.

De um modo geral, tem-se que **"***O* ***valor*** [3] ***inicial*** *da dívida antes de pagar até mesmo a entrada (caso esta exista) é* ***igual à soma das amortizações*****"**. Assim, escreve-se:

$$\mathbf{PV = A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n}$$

3.2.2 Cálculo da taxa de juros de um empréstimo em duas prestações mensais e iguais

Exemplo 17: Uma impressora que custa R$250,00 à vista, também pode ser paga em duas vezes: R$150,00 de entrada e R$150,00 ao fim de 30 dias. O juro mensal que a loja está cobrando ao cliente que paga em duas vezes é de:

a) 10% b) 20% c) 30% d) 40% e) 50%

Fonte: Concurso para técnico administrativo do CEFET/RJ

[2] Juros calculados sobre os saldos devedores que restam ao pagar-se as prestações imediatamente anteriores a essas prestações. Se numa determinada prestação esse juros for maior do que ou igual à prestação, não haverá amortização, pois esta será nula (no caso igual) ou uma parte dos juros irão se capitalizar no período seguinte, pois farão parte do saldo devedor (no caso maior). Quando todas as prestações forem menores do que ou iguais a esses juros, tem-se uma **dívida perpétua**, pois a dívida inicial nunca se acabará.

[3] O valor inicial da dívida é chamado de valor presente (*present value*) e será denotado por **PV**.

Resolução: Como a impressora custa R$250,00 à vista e deve-se dar uma entrada de R$150,00, o saldo devedor após a entrada é $SD_d(1) = R\$250,00 - R\$150,00 = R\$100,00.$ Depois de 30 dias (1 mês) deve-se pagar uma prestação de R$150,00, assim, o juros desse período é $J_2 = R\$150,00 - R\$100,00 = R\$50,00.$ Como esse juro de R$50,00 é pago sobre o saldo devedor de R$100,00, tem-se que a loja cobra um juro mensal de **50%** (alternativa (e)), pois, R$50,00 é 50% de R$100,00.

Exemplo 18: Uma loja oferece duas formas de pagamentos para seus clientes: à vista ou em duas parcelas iguais.

A loja anuncia, na sua vitrine, um vestido por um preço total de R$200,00 para pagamento em duas vezes, sendo R$100,00 no ato da compra e R$100,00 trinta dias após essa data. Para pagamento à vista, a loja oferece um desconto de 10% sobre o preço total de R$200,00, anunciado na vitrine.

Considerando o preço à vista como o preço real do vestido, determine a taxa de juros cobrada pela loja no pagamento em duas vezes.

Fonte: Vestibular da UFRJ

Resolução: O preço real desse vestido é R$200,00 – 10% de R$200,00 = R$180,00. Como no pagamento em duas vezes é dada uma entrada de R$100,00, tem-se um saldo devedor de R$180,00 – R$100,00 = R$80,00 (base de cálculo) e como depois de 30 dias deve-se pagar R$100,00 da 2ª prestação, tem-se que o juros é R$100,00 – R$80,00 = R$20,00, que é 25% de R$80,00. Basta fazer a proporção: $\frac{80}{20} = \frac{100}{x}$. Portanto, a taxa de juros cobrada pela loja no pagamento em duas vezes de **25% ao mês**.

3.2.3 Cálculo do valor das prestações de um empréstimo pago em duas prestações iguais com entrada, quadro da evolução do saldo devedor e quadro das amortizações e juros

Exemplo 19: Uma geladeira custa à vista R$900,00, mas pode ser paga em duas prestações iguais, uma no ato da compra e outra após 30 dias (1mês). A taxa do financiamento é de 25% ao mês sobre o saldo devedor.

Analisar se é justo que a loja cobre R$500,00 por cada prestação.

Resolução:

- Como o preço à vista da geladeira é de R$900,00 e a entrada é de R$500,00, o saldo devedor (após pagar a entrada) é de R$900,00 – R$500,00 = R$400,00. É justo que a loja cobre 25% de juros sobre R$400,00 (25% de R$400,00 é igual a R$100,00). Sendo assim, o saldo devedor 1mês após a compra (antes do pagamento da 2ª prestação) é de R$400,00 + R$100,00 = R$500,00. Como a 2ª prestação é de R$500,00, o saldo devedor após pagá-la é de R$500,00-R$500,00=**R$0,00**. Portanto, **é justo** que os valores das prestações sejam de **R$500,00**, pois imediatamente após o pagamento da 2ª prestação **o saldo devedor zerou**.

O quadro a seguir apresenta o resumo dessa situação:

Quadro 7 Evolução do saldo devedor de uma dívida de R$900,00, paga em duas prestações mensais de R$500,00 e taxa mensal de juros de 25%

VALOR À VISTA (PV): R$900,00	***SALDOS DEVEDORES NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO K (SD_k em R$)***		**VALOR DAS PRESTAÇÕES (PMT_k em R$)**
N° DA PRESTAÇÃO (k)	ANTES DO PGT° DA PRESTAÇÃO	DEPOIS DO PGT° DA PRESTAÇÃO	
1	900	400	500
2	500	**0**	500
Total	**-**	**-**	**1000**

O quadro a seguir apresenta os juros e as amortizações embutidos nas prestações:

Quadro 8 Parcelas de juros e amortizações de um empréstimo de R$900,00, pago em duas prestações mensais de R$500,00, com entrada e taxa mensal de juros de 25%

k	***J_k (em R$)***	***A_k (em R$)***	**PMT_k (em R$)**
1	0	500	500
2	100	400	500
Total	**100**	**900**	**1000**

- $SD_a(1) = R\$900{,}00 \Rightarrow J_1 = 0$, pois a primeira prestação é a entrada, (não há juros embutidos nesta).

- $SD_d(1) = R\$900{,}00 - R\$500{,}00 = R\$400 \Rightarrow SD_a(2) = 400 \times 1{,}25 = R\$500{,}00 \Rightarrow$

$\Rightarrow J_2 = R\$500{,}00 - R\$400{,}00 = R\$100{,}00 \Rightarrow SD_d(2) = R\$500{,}00 - R\$500{,}00 = R\$0{,}00 \Rightarrow$

Observa-se que as amortizações são:

$A_1 = R\$500{,}00$ **e** $A_2 = R\$500{,}00 - R\$100{,}00 = R\$400{,}00$ **(** $A_1 + A_2 = PV$ **).**

Nesse exemplo, caso não se conhecesse o valor das prestações, poderia se fazer:

• **1° modo**: Como foi dada uma entrada de R\$500,00, tem-se que o saldo devedor depois de pagar a 1ª prestação (entrada) é de R\$(900 – PMT) (base de cálculo para os juros: 100%). Como a 2ª prestação tem valor PMT reais e a dívida deve zerar ao pagá-la, tem-se que os juros de $\text{PMT} - (\underbrace{900 - \text{PMT}}_{\text{saldo devedor}}) = 2.\text{PMT} - 900$ (25%).

Assim, basta resolver a proporção a seguir:

$$\frac{900 - \text{PMT}}{2.\text{PMT} - 900} = \frac{100\%}{25\%} = 4 \Rightarrow 8.\text{PMT} - 3600 = 900 - \text{PMT} \Rightarrow \text{PMT} = 500.$$

Portanto, o valor das duas prestações é de **R\$500,00**.

• **2° modo**: Denotando-se por PV(valor presente) = R\$900,00, i = 25% = 0,25, e **n = 2** o nº de prestações. Para calcular o valor PMT das prestações basta fazer:

$$\underbrace{(\text{PV} - \underbrace{\text{PMT}}_{1^{\text{a}}\text{ prestação}})}_{\text{saldo devedor: } \text{SD}_d(1)} \times (1+i) - \underbrace{\text{PMT}}_{2^{\text{a}}\text{ prestação}} = \underbrace{0}_{\text{SD}_d(2)}$$

Nota-se que o fator de correção 1 + i é multiplicado pelo saldo devedor, pois os juros só são pagos sobre esse valor.

Assim,

$$(900 - \text{PMT}) \times 1{,}25 = \text{PMT} \Rightarrow 900 \times 1{,}25 - \text{PMT} \times 1{,}25 = \text{PMT} \Rightarrow \text{PMT} + 1{,}25 \times \text{PMT} = 1125 \Rightarrow$$

$$2{,}25 \times \text{PMT} = 1125 \Rightarrow \text{PMT} = \frac{1125}{2{,}25} \Rightarrow \text{PMT} = \text{R\$}500{,}00.$$

Nota-se que o **"princípio básico"** de que *"os juros de cada período incidem apenas sobre os saldos devedores que restam ao pagar-se a prestação do início desse período"* foi utilizado nos dois modos de resoluções anteriores. No segundo modo ainda foi utilizado o **"fator de correção"** mês a mês aplicado sobre esse saldo devedor.

• **3° modo**: Como **n=2**, podemos escrever $\text{PV} = C_1 + C_2$, sendo C_1 e C_2, respectivamente, os valores equivalentes das prestações na **data zero** (neste caso C_1 e C_2 coincidem com as amortizações, mas esta coincidência só ocorre quando se tem duas prestações com entrada). Como foi dada uma entrada de PMT, tem-se: $C_1 = \text{PMT}$. Como C_2 é o equivalente (na data zero) da 2ª prestação (que está na data 1), então, usando juros compostos, tem-se:

$$\text{PMT} = C_2 \times (1+i)^1 \Rightarrow C_2 = \frac{\text{PMT}}{1+i}.$$

Assim:

$$PV = C_1 + C_2 \Rightarrow \underbrace{PV = PMT + \frac{PMT}{1+i}}_{\substack{\text{Fórmula para encontrar} \\ \text{o valor presente}}} \Rightarrow 900 = PMT + \frac{PMT}{1,25} \Rightarrow PMT = \frac{1125}{2,25} = R\$500,00.$$

Nota-se que neste modo de resolução foi utilizado o conceito de fator de capitalização total, porém, tinha-se apenas um período de aplicação dos juros, o que faz este fator coincidir com o fator de capitalização mês a mês.

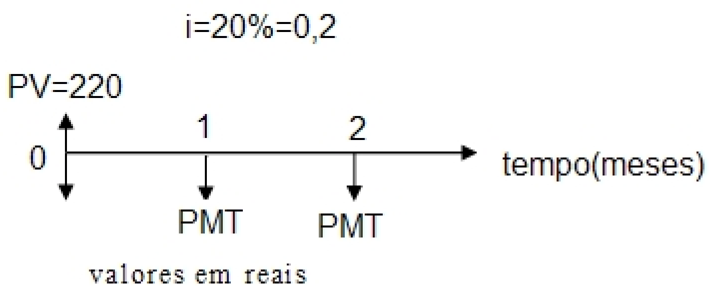
Apesar de, a princípio, o raciocínio utilizado no **3°** modo de resolução não ser tão simples, mais adiante será percebida a vantagem desse terceiro modo de resolução em relação aos dois primeiros.

Exemplo 20: Uma bicicleta custa à vista R$220,00, mas pode ser paga em duas **prestações iguais**, sendo a primeira em 1mês e a segunda em 2meses. A taxa de juros do financiamento é de 20% ao mês sobre o saldo devedor. Determinar o valor das prestações.

Fonte: elaborada pelo próprio autor

Resolução:

- Pode-se utilizar os 1° e 2° modos resolvidos a questão anterior, bastando para tanto aplicar juros de 20% sobre R$220,00 (R$220,00 x 1,2 = R$264,00) e considerar R$264,00 sendo equivalente ao PV e repetir o procedimento.



- Usando o mesmo raciocínio do 3° modo de resolução da questão anterior, ou seja, fazendo-se $PMT = C_1 \times 1,2 \Rightarrow C_1 = \frac{PMT}{1,2}$ e $PMT = C_2 \times 1,2^2 \Rightarrow C_2 = \frac{PMT}{1,44}$, tem=se:

$$PV = C_1 + C_2 \Rightarrow 220 = \frac{PMT}{1,2} + \frac{PMT}{1,44} \Rightarrow 220 \times 1,44 = \frac{PMT}{1,2} \times 1,44 + \frac{PMT}{1,44} \times 1,44 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,2 \times PMT + PMT = 316,80 \Rightarrow PMT = \frac{316,80}{2,2} = 144.$$

Portanto, o valor das prestações da bicicleta é de **PMT = R$144,00.**

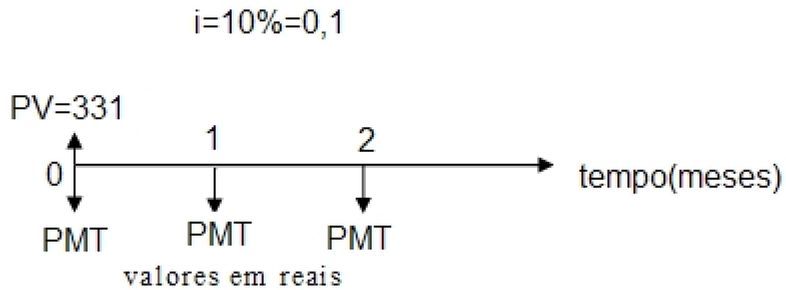
De fato, o valor **PMT=R$144,00** é justo, pois: R$220,00+20% de R$220,00=R$264,00, pois não foi dada entrada; R$264,00-**R$144,00**=R$120,00; R$120,00+20% de R$120,00=R$144,00; R$144,00-**R$144,00**=**R$0,00**. Imediatamente após o pagamento da 2ª prestação **o saldo devedor zerou**.

3.2.4 Cálculo do valor das prestações de um empréstimo pago em três prestações iguais com entrada, quadro da evolução do saldo devedor e quadro das amortizações e juros

Exemplo 21: Um comerciante deseja vender um produto que custa à vista R$331,00 em três parcelas iguais, sendo a primeira à vista, a segunda em um mês e a última em dois meses. Se os juros mensais (juros compostos) são de 10% ao mês, calcule o valor de cada parcela.

Fonte: Vestibular da UFRRJ 1998 – 2° semestre – 2ª prova

Resolução 1:



$$\underbrace{\underbrace{[(\underbrace{331-PMT}_{SD_d(1)})\times 1{,}1-PMT]}_{SD_d(2)}\times 1{,}1-PMT}_{SD_d(3)}=0 \;\Rightarrow\; (1{,}1\times 331-1{,}1\times PMT-PMT)\times 1{,}1-PMT=0 \;\Rightarrow$$

$$1{,}21\times 331-2{,}1\times PMT\times 1{,}1-PMT=0 \;\Rightarrow\; 2{,}31\times PMT+1\times PMT=1{,}21\times 331 \;\Rightarrow$$

$$PMT=\frac{1{,}21\times 331}{3{,}31}=1{,}21\times 100 \;\Rightarrow\; PMT=R\$121{,}00.$$

De fato, o valor **PMT=R$121,00** é justo, pois: R$331,00 - **R$121,00** = R$210,00**;** R$210,00 + 10% de R$210,00 = R$231,00**;** R$231,00 – **R$121,00** = R$110,00**;** R$110,00 + 10% de R$110,00 = R$121,00**;** R$121,00 – **R$121,00** = R$**0,00**. Imediatamente após o pagamento da 3ª prestação **o saldo devedor zerou**.

Esse modo de resolução é de fácil compreensão, pois nota-se que **o juro de um período qualquer é calculado sempre sobre o saldo devedor após o pagamento da prestação do período anterior**. Mas, a partir de três prestações sem entrada ou quatro com entrada, ele já se torna inviável devido às dificuldades de realizarem-se os cálculos.

O quadro a seguir apresenta o resumo dessa situação:

Quadro 9 Evolução do saldo devedor de uma dívida de R$331,00, paga em três prestações mensais de R$121,00, com entrada e taxa mensal de juros de 10%

VALOR À VISTA (PV): R$	***SALDOS DEVEDORES NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO K (SD_k em R$)***		**VALOR DAS PRESTAÇÕES (PMT_k em R$)**
N° DA PRESTAÇÃO (k)	**ANTES DO PGT° DA PRESTAÇÃO**	**DEPOIS DO PGT° DA PRESTAÇÃO**	
1	331	210	121
2	231	**110**	121
3	121	**0**	121
Total	**-**	**-**	**363**

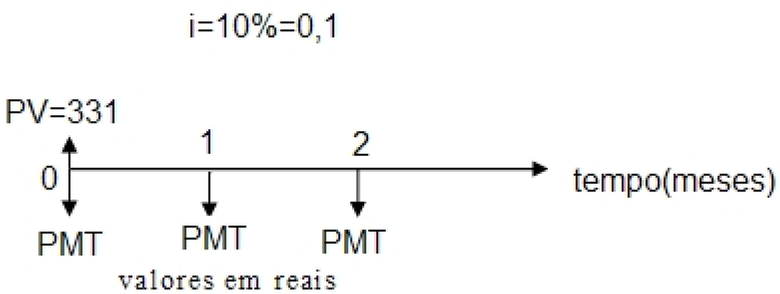
O quadro a seguir apresenta as amortizações e os juros embutidos em cada prestação

• **J_1=R$0,00 (**pois foi dada uma entrada de R$121,00, que é toda amortização), **J_2=R$21,00** (pois depois de pagar a entrada, tem-se: $SD_d(1)$ = R$331,00-R$121,00=R$210,00, sendo J_2 = 10% de R$210,00=R$21,00 e **J_3=R$11,00** (pois depois de pagar a 2ª prestação, tem-se: $SD_d(2)$=R$231,00-R$121,00=R$110,00, sendo J_3 = 10% de R$110,00=R$11,00. Para encontrar cada amortização, basta fazer R$121,00 menos a parcela de juros correspondente.

Quadro 10 Parcelas de juros e amortizações de um empréstimo de R$331,00, pago em três prestações mensais de R$121,00, com entrada e taxa mensal de juros de 10%

k	***J_k (em R$)***	***A_k (em R$)***	**PMT_k (em**
1	0	121	121
2	21	100	121
3	11	110	121
Total	**32**	**331**	**363**

Resolução 2:



$$\bullet\ \mathrm{PMT}+\frac{\mathrm{PMT}}{1{,}1}+\frac{\mathrm{PMT}}{1{,}1^2}=331 \text{ ou } 1{,}1^2\times\mathrm{PMT}+1{,}1^2\times\frac{\mathrm{PMT}}{1{,}1}+1{,}1^2\times\frac{\mathrm{PMT}}{1{,}1^2}=1{,}1^2\times 331$$

• $1{,}21\times PMT + 1{,}1\times PMT + PMT = 1{,}21\times 331 \Rightarrow PMT = \dfrac{1{,}21\times 331}{3{,}31} = 1{,}21\times 100 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbf{PMT = R\$121{,}00.}$$

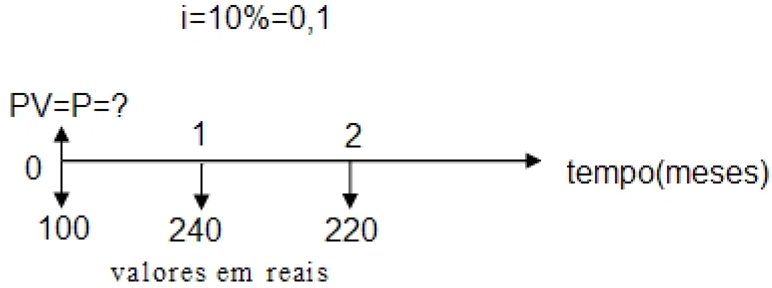
A segunda resolução deste exemplo 21 é bem mais simples do que a primeira, porém, esta segunda forma também se torna inviável a partir de três prestações sem entrada ou quatro com entrada, devido às dificuldades de realizarem-se os cálculos.

Serão mostradas em **3.3.1.1 e 3.3.1.2** as fórmulas para calcular as prestações em casos como os dos exemplos 20 e 21. Essas fórmulas são baseadas nos conceitos vistos anteriormente e nas fórmulas do termo geral e da soma de uma progressão geométrica.

3.2.5 Cálculo do valor presente de um empréstimo pago em três prestações diferentes com entrada, quadro da evolução do saldo devedor e quadro das amortizações e juros.

Exemplo 22: A rede de lojas Sistrepa vende por crediário com uma taxa de juros mensal de 10%. Uma certa mercadoria, cujo preço à vista é **P**, será vendida a prazo de acordo com o seguinte plano de pagamento: R$100,00 de entrada, uma prestação de R$240,00 a ser paga em 30 dias e outra de R$220,00 a ser paga em 60 dias.
Determine P, o valor de venda à vista dessa mercadoria.
Fonte: Vestibular da UFRJ 1998

Resolução:



• Usando o mesmo raciocínio da resolução do exemplo 21 e já multiplicando por $1{,}1^2$, tem-se: (valores na data da 3ª prestação)

$$1{,}1^2\times P = 1{,}1^2\times 100 + 1{,}1\times 240 + 220 \Rightarrow 1{,}21\times P = 121 + 264 + 220 \Rightarrow P = \frac{605}{1{,}21} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{P = R\$500{,}00.}$$

De fato, o valor **P=R$500,00** é justo, pois: R$500,00 - **R$100,00** = R$400,00**;** R$400,00 + 10% de R$400,00 = R$440,00**;** R$440,00 – **R$240,00** = R$200,00**;** R$200,00 + 10% de R$200,00 = R$220,00**;** R$220,00 – **R$220,00** = R$**0,00**. Imediatamente após o pagamento da 3ª prestação **o saldo devedor zerou**. A tabela a seguir apresenta o resumo dessa situação:

Quadro 11 Evolução do saldo devedor de uma dívida de R$500,00, paga em três prestações mensais e diferentes, com entrada e taxa mensal de juros de 10%

VALOR À VISTA (PV): ***R$ 500,00***	***SALDOS DEVEDORES NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO K (SD_k em R$)***		**VALOR DAS PRESTAÇÕES (PMT_k em R$)**
N° DA PRESTAÇÃO (k)	**ANTES DO PGT° DA PRESTAÇÃO**	**DEPOIS DO PGT° DA PRESTAÇÃO**	
1	500	400	100
2	440	200	240
3	220	**0**	220
Total	**-**	**-**	**560**

• **J_1 = R$0,00 (**pois foi dada uma entrada de R$100,00, que é toda amortização), **J_2 = R$40,00** (pois depois de pagar a entrada, tem-se: $SD_d(1)$=R$500,00-R$100,00=R$400,00, sendo J_2 = 10% de R$400,00 = R$40,00 e **J_3 = R$20,00** (pois depois de pagar a 2ª prestação, tem-se: $SD_d(2)$ =R$440,00-R$240,00=R$200,00, sendo J_3= 10% de R$200,00=R$20,00.

Quadro 12 Parcelas de juros e amortizações de um empréstimo de R$500,00, pago em três prestações mensais e diferentes, com entrada e taxa mensal de juros de 10%

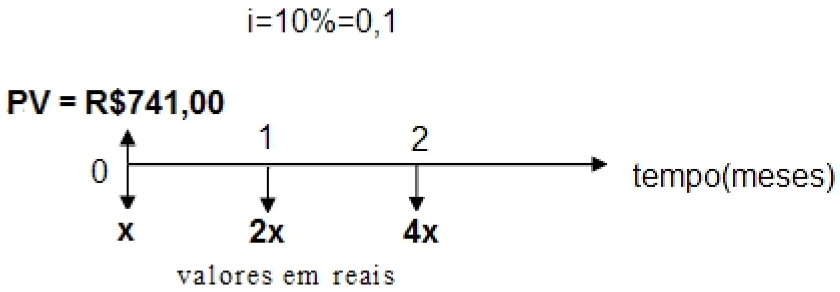
k	***J_k (em R$)***	***A_k (em R$)***	**PMT_k (em R$)**
1	0	100	100
2	40	200	240
3	20	200	220
Total	**60**	**500**	**560**

3.2.6 Cálculo das prestações mensais de um financiamento feito em três parcelas com entrada e que formam uma progressão geométrica

Exemplo 23: Uma loja vende por crediário em três prestações cujos valores, em reais, formam uma progressão geométrica (P.G.) de razão 2, sendo a primeira paga no ato da compra, a segunda um mês após a primeira e a terceira um mês após a segunda. A taxa de juros cobrada por essa loja é de 10% ao mês sobre o saldo devedor. Uma pessoa comprou nessa loja uma televisão cujo preço à vista é de R$741,00. Quais serão os valores dessas três prestações?

Fonte: elaborada pelo próprio autor

Resolução:



- Como as 3 prestações formam uma P.G. de razão 2, sendo PMT_1 = x, tem-se PMT_2 = 2x e PMT_3 = 4x. Usando o mesmo raciocínio da resolução do exemplo 21 e já multiplicando por $1{,}1^2$, tem-se: (valores na data da 3ª prestação)

$$1{,}1^2.x + 1{,}1.(2x) + 4x = 741.1{,}1^2 \Rightarrow 7{,}41.x = 1{,}21.741 \Rightarrow x = 1{,}21.100 = 121.$$

Portanto, as prestações da televisão são **R$121,00**, **R$242,00** e **R$484,00**.

De fato, as prestações são justas para quitar um valor presente de **PV=R$741,00,** pois: R$741,00 - **R$121,00** = R$620,00**;** R$620,00 + 10% de R$620,00 = R$682,00**;** R$682,00 – **R$242,00** = R$440,00**;** R$440,00 + 10% de R$440,00 = R$484,00**;** R$484,00 – **R$484,00** = R$**0,00**. Imediatamente após o pagamento da 3ª prestação **o saldo devedor zerou**.

3.3 Os sistemas de Amortizações de um Empréstimo ou Financiamento

Chamam-se de Sistemas de Amortizações às diferentes formas de devolução do valor presente (principal) de um empréstimo. São vários os sistemas utilizados no mundo, por exemplos: Sistema Francês de Amortização (SFA), Sistema de Amortização Constante (**SAC**), Sistema de Amortização Crescente (SACRE), Sistema Alemão, Sistema Americano, etc. Foram vistos neste capítulo exemplos que não se enquadram em nenhum sistema citado anteriormente. Cada sistema possui suas peculiaridades. A seguir, serão definidos e feitos comentários sobre os dois primeiros sistemas. Os outros sistemas foram citados aqui, sem defini-los, para citar que existem diferentes formas de devolução do valor principal de um empréstimo e que, independente da forma, **"***os juros incidem sempre sobre o saldo devedor período a período*.**"**, que é o "*princípio básico"*, já enunciado no decorrer deste trabalho.

3.3.1 Sistema Francês de Amortização (SFA)

Nesse sistema tem-se uma série de pagamentos iguais e periódicos (chamada de anuidade), que pode ser antecipada (com entrada), postecipada (sem entrada) ou diferida (com carência). Observa-se que as prestações são constantes.

Quando financiamos um bem qualquer por esse sistema, acontece muito de ser exigida uma entrada (igual ou não aos valores das prestações). Caso a entrada seja diferente da prestação é só subtraí-la do valor do bem, sendo o restante considerado o valor presente para o cálculo das prestações iguais pela fórmula sem entrada.

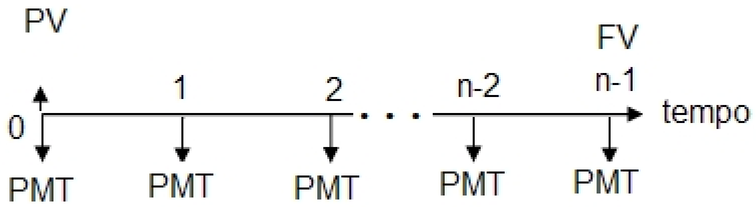
Neste sistema (muito utilizado no cotidiano das pessoas), será mostrada a importância de se saber a fórmula do termo geral e a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, para se entenderem as fórmulas utilizadas.

O Sistema Price, também conhecido como **Tabela Price** é um caso particular do SFA. (MATHIAS; GOMES, 1996, p.319)

Os exemplos de 16 a 21 estudados neste capítulo envolvem o Sistema Francês de Amortização.

Quando se tem um financiamento no SFA com muitas prestações é conveniente utilizarem-se fórmulas, como serão mostrados a seguir.

3.3.1.1 Financiamentos com n prestações iguais e periódicas (sendo uma de entrada)



Para calcular o valor das prestações (PMT) de um financiamento de valor presente PV, feito em n prestações iguais (sendo uma de entrada), periódicas e de taxa unitária de juros (i), utiliza-se a fórmula[4] a seguir:

$$\boxed{PMT = \frac{(1+i)^{n-1} \times i}{(1+i)^{n} - 1} \times PV}$$

Fórmula 7 Cálculo do valor das prestações de um empréstimo feito em n prestações iguais e periódicas, sendo uma de entrada

[4] A demonstração dessa fórmula encontra-se no apêndice **F**.

Aplicando-se a fórmula 7 no exemplo 21, obtém-se:

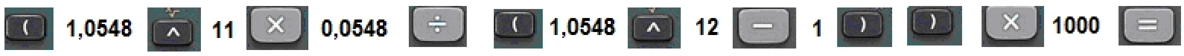
$$PMT = \frac{1{,}1^{3-1}.\,0{,}1}{1{,}1^{3} - 1}.331 \Rightarrow R\$121{,}00.$$

Exemplo 24: Uma câmera digital é vendida por R$1.000,00 à vista. No financiamento é cobrada taxa de 5,48% ao mês. De quanto será o valor das prestações se esta máquina for comprada em 12 prestações mensais, iguais e com entrada?

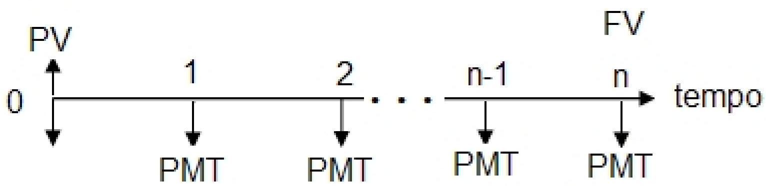
Resolução[5]: Aplicando-se a fórmula 8, tem-se:

$$PMT = \frac{1{,}0548^{12-1}.\;0{,}0548}{1{,}0548^{12} - 1}.1000 \Rightarrow PMT = R\$109{,}88.$$

Utilizando-se uma calculadora científica modelo CASIO *fx-82MS*, basta apertar as teclas na ordem indicada a seguir:



3.3.1.2 Financiamentos com n prestações iguais, periódicas e sem entrada



Para calcular o valor das prestações (PMT) de um financiamento de valor presente PV, feito em n prestações iguais, periódicas, sem entrada e de taxa unitária de juros (i), utiliza-se a fórmula[6] a seguir:

$$\boxed{PMT = \frac{(1+i)^{n} \times i}{(1+i)^{n} - 1} \times PV}$$

Fórmula 8 Cálculo do valor das prestações de um empréstimo feito em n prestações iguais, periódicas e sem entrada

[5] Encontra-se no apêndice **L** uma resolução utilizando-se uma calculadora HP12C.
[6] A demonstração dessa fórmula encontra-se no apêndice **G**.

Aplicando-se a fórmula 8 no exemplo 20, obtém-se:

$$\text{PMT} = \frac{1{,}2^{2}.\,0{,}2}{1{,}2^{2}-1}.220 \Rightarrow \text{PMT} = \text{R\$}144{,}00.$$

Exemplo 25: Uma câmera digital é vendida por R$1.000,00 à vista. No financiamento é cobrada taxa de 5,48% ao mês. De quanto será o valor das prestações se esta máquina for comprada em 12 prestações mensais, iguais e sem entrada?

Resolução[7]**:** Aplicando-se a fórmula 8, tem-se:

$$\text{PMT} = \frac{1{,}0548^{12}.\ 0{,}0548}{1{,}0548^{12}-1}.1000 \Rightarrow \text{PMT} = \text{R\$}115{,}90.$$

Utilizando-se uma calculadora científica modelo CASIO *fx-82MS*, basta apertar as teclas na ordem indicada a seguir:

(1,0548 ^ 12 × 0,0548 ÷ (1,0548 ^ 12 − 1)) × 1000 =

Caso seja dada uma entrada de valor diferente do valor das prestações, basta subtrair a entrada do valor presente à vista (PV'=PV- entrada) e utilizar a fórmula sem entrada para o valor PV'

3.3.1.3 A tabela Price[8]

Juntando-se o quadro da evolução do saldo devedor com o quadro das amortizações e juros embutidos nas prestações forma o quadro chamado de "Tabela Price". Para o exemplo 21, tem-se:

Quadro 13 Tabela Price para o exemplo 21

VALOR À VISTA (PV): ***R$ 331,00***	J_k *(em R$)*	A_k *(em R$)*	*SALDOS DEVEDORES NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO K* *(SD_k em R$)*		VALOR DAS PRESTAÇÕES (PMT_k em R$)
Nº DA PRESTAÇÃO (k)			ANTES DO PGTº DA PRESTAÇÃO	DEPOIS DO PGTº DA PRESTAÇÃO	
1	0	121	331	210	121
2	21	100	231	**110**	121
3	11	110	121	**0**	121
Total	**32**	**331**	**-**	**-**	**363**

[7] Encontra-se no apêndice **L** uma resolução utilizando-se uma calculadora HP12C.
[8] Em homenagem ao economista inglês Richard **Price**.

Observa-se que para encontrar cada saldo devedor depois do pagamento de cada prestação **k** (**SD_d(k)**) basta subtrair a prestação (PMT_k) do saldo devedor antes do pagamento dessa prestação (**SD_a(k)**), ou seja, **$SD_d(k) = SD_a(k) – PMT_k$**.

Os saldos devedores antes do pagamento da prestação **k**, a partir da segunda, são obtidos multiplicando-se o saldo devedor depois do pagamento da prestação **k - 1** por **1 + i**, ou seja, **$SD_a(k) = SD_d(k-1) . (1+ i)$**, considerando-se **$SD_a(1) = PV$** nos casos com entrada e **$SD_a(1) = PV . (1+i)$** nos casos sem entrada.

Os juros embutidos em cada prestação **k** (**J_k**), a partir da segunda, são obtidos multiplicando-se **SD_d(k-1)** por **i**, ou seja, **$J_k = i . SD_d(k-1)$**, considerando-se **$J_1 = 0$** nos casos com entrada e **$J_1 = i . PV$** nos casos sem entrada.

O valor de cada amortização **k** (**Ak**) é obtido subtraindo-se da prestação k (PMT_k) os juros **J_k**, ou seja, **$A_k = PMT_k – J_k$**.

Exemplo[9] 26: Construir um quadro com a tabela Price para o exemplo 25.

Resolução: O valor das prestações já foi calculado no exemplo 25 (PMT = R$115,90).

- Como não foi dada entrada, tem-se: $SD_a(1)$ =R$1.000,00 . 1,0548 = R$1.054,80.
- $SD_d(1)$ = R$1.054,80 – R$115,90 = R$938,90.

Em seguida, é só repetir o processo, ou seja, multiplicar por 1,0548 e subtrair R$115,90, para encontrar os demais saldos devedores antes e depois dos pagamentos das prestações.

- J_1 = R$1.000,00 . 0,0548 = R$54,80 e A_1 = R$115,90 – R$ 54,80 = R$61,10.
- J_2 = R$938,90 . 0,0548 = R$51,45 e A_2 = R$115,90 – R$51,45 = R$64,45.

Em seguida, é só repetir o processo, ou seja, multiplicar por 0,0548 os saldos devedores depois dos pagamentos das prestações e subtrair de R$115,90, para encontrar os demais juros e amortizações.

---

[9] Um simulador da **tabela Price** para download encontra-se
Disponível em: <http://www.clubedospoupadores.com/financiamentos/tabela-price-sistema-de-amortizacao-frances-saf.html>. Acesso em 26 de julho de 2015. Porém, ao informar a taxa, esta deve ser a taxa efetiva anual. No exemplo: 89,68869706% a.a. (5,48% a.m.). Sem entrada.

Quadro 14 Tabela Price para o exemplo 25

VALOR À VISTA (PV): ***R$ 1.000,00***	***J_k (em R$)***	***A_k (em R$)***	***SALDOS DEVEDORES NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO K (SD_k em R$)***		**VALOR DAS PRESTAÇÕES (PMT_k em R$)**
N° DA PRESTAÇÃO (k)			**ANTES DO PGT° DA PRESTAÇÃO**	**DEPOIS DO PGT° DA PRESTAÇÃO**	
1	54,80	61,10	1.054,80	938,90	115,90
2	51,45	64,45	990,35	874,45	115,90
3	47,92	67,98	922,37	806,47	115,90
4	44,19	71,70	850,67	734,77	115,90
5	40,27	75,64	775,03	659,13	115,90
6	36,12	79,78	695,25	579,35	115,90
7	**31,75**	84,15	611,10	495,20	115,90
8	27,14	88,76	522,34	**406,44**	115,90
9	22,27	93,63	428,71	312,81	115,90
10	17,14	98,76	329,95	214,05	115,90
11	11,73	104,17	225,78	109,88	115,90
12	6,02	109.88	115,90	**0**	115,90
Total	**390,80**	**1.000,00**	**-**	**-**	**1.390,80**

3.3.1.4 O custo efetivo total (CET)

É a **taxa real** de juros que está sendo cobrada num empréstimo ou financiamento quando são incluídos, no valor presente, o IOF e outros possíveis valores cobrados.

Por exemplo, se uma pessoa adquire um empréstimo de R$1.000,00 para pagar um mês depois e a taxa de juros contratada é de 5% ao mês, mas incluem-se no financiamento R$20,00 de IOF e outros valores, ela pagará um mês depois R$1.020,00 + 5% de R$1.020,00 = R$1.071,00. Dessa forma, o custo efetivo mensal é de 7,1% (R$71,00 em relação a R$1.000,00).

Exemplo[10] 27: Uma pessoa adquiriu um empréstimo de R$2.002,74 para pagar em 36 parcelas mensais, sendo a primeira em um mês. A taxa mensal de juros contratada foi de 2,02% e foi financiado o IOF de R$57,31.

a) Qual o valor de cada parcela?
b) Qual é o CET mensal e o anual?

[10] A resolução da letra (a) deste **exemplo 27** utilizando-se **HP12C** pode ser feita como no ex. 25 do **apêndice L**.

Resoluções:

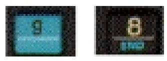
a) PV = R$2.002,74 + R$57,31 = R$2.060,05, n = 36 e i = 0,0202. Aplicando-se esses valores na fórmula 8, tem-se: $PMT = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}.PV = \frac{1{,}0202^{36} \cdot 0{,}0202}{1{,}0202^{36} - 1}.2060{,}05 = 81{,}08.$ Dessa forma, o valor de cada parcela é de **R$81,08**.

b) Para calcular o CET mensal deve-se usar a mesma fórmula só que considerando PV = R$2.002,74 (verdadeiro valor que a pessoa levou para casa).

Assim: $81{,}08 = \frac{(1+i_e)^{36} \cdot i_e}{(1+i_e)^{36} - 1}.2.002{,}74$.

Como no desenvolvimento dessa equação aparecerá uma equação polinomial de grau 37, deve-se utilizar uma calculadora financeira.

Usando uma calculadora HP12C, encontra-se o valor de **i_e = 2,2%**, que indica que o **CET mensal** é de aproximadamente **2,2%.** Basta fazer:

Observação: Ao pressionar as teclas 

indica que a calculadora está no modo de prestações **sem entrada**. Ao fazer isso, a palavra BEGIN desaparece do visor caso ela já esteja nele e não aparece caso ela já não esteja no visor.

O CET anual é de $\left(1{,}022^{12} - 1\right)100\% \cong 29{,}84\%.$

3.3.2 Sistema de Amortização Constante (SAC)

Também chamado de sistema hamburguês. Nesse sistema as **parcelas de amortização embutidas nas prestações são constantes** e dadas pelo valor do empréstimo dividido pelo número de prestações. A cada prestação será pago o juros sobre o saldo devedor que resta ao pagar-se a prestação imediatamente anterior a esta, mais a parcela de amortização constante. Quando se têm três ou mais prestações sem entrada, as prestações e os juros, neste sistema, decrescem em **progressão aritmética** (**P**.**A**.).

Os exemplos 28 e 29 a seguir são do SAC. No exemplo 29, mesmo inicialmente não se sabendo as amortizações, tem-se que estas são constantes, pois já se observa que as prestações decrescem em P.A. (razão r = -5), o que é uma peculiaridade do SAC.

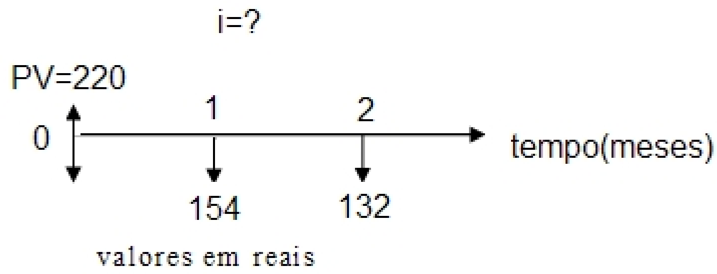
3.4 Cálculos das Taxas de Juros cobradas num Empréstimo ou Financiamento: uma Justificativa para o uso de Calculadora Financeira no Ensino Médio

3.4.1 Cálculo da taxa de juros de um financiamento pago em duas prestações diferentes, mensais e sem entrada, quadro da evolução do saldo devedor e quadro das amortizações e juros

Exemplo[11] 28: Uma bicicleta custa à vista R$220,00, mas pode ser paga em duas prestações, sendo a primeira de R$154,00 em 1mês e a segunda de R$132,00 em 2meses. Determinar a taxa de juros mensal do financiamento (cobrada sobre o saldo devedor).

Fonte: elaborada pelo próprio autor

Resolução:



- Usando o mesmo raciocínio já utilizado na resolução do exemplo 21 e já multiplicando por $(1+i)^2$, tem-se: (valores na data da 2ª prestação)

$$154.(1+i)+132 = 220.(1+i)^2$$

- Substituindo (1+i) por **x**, tem-se: $220.x^2 - 154.x - 132 = 0$

- Simplificando por 22, tem-se: $\underbrace{10}_{a}.x^2 \underbrace{-7}_{b}.x - \underbrace{6}_{c} = 0$

- Aplicando a fórmula de Bháskara, tem-se:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2 \times a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.10.(-6)}}{2 \times 10} = \frac{7 \pm \sqrt{289}}{20} = \frac{7 \pm 17}{20}$$

Assim, $x' = \frac{24}{20} = 1{,}2$ ou $x'' = -\frac{10}{20} = -0{,}5$ (não serve).

Dessa forma, tem-se: x = 1+i = 1,2 $\Rightarrow$ $i = 1{,}2 - 1 = 0{,}2 = 20\%$.

Portanto, a taxa de juros mensal é de **20%**.

[11] A resolução deste **exemplo 28** utilizando-se uma calculadora financeira **HP12C** encontra-se no **apêndice K**.

De fato, a taxa mensal de **20%** é justa, pois: R$220,00+20% de R$220,00=R$264,00, pois não foi dada entrada; R$264,00-**R$154,00** (1ª prestação) = R$110,00; R$110,00+20% de R$110,00=R$132,00; R$132,00-**R$132,00** (2ª prestação) = **R$0,00**. Imediatamente após o pagamento da 2ª prestação **o saldo devedor zerou**.

Quadro 15 Evolução do saldo devedor de uma dívida de R$220,00, paga em duas prestações mensais diferentes e sem entrada

VALOR À VISTA (PV): R$220,00	***SALDOS DEVEDORES NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO K (SD_k em R$)***		**VALOR DAS PRESTAÇÕES (PMT_k em R$)**
N° DA PRESTAÇÃO (k)	ANTES DO PGT° DA PRESTAÇÃO	DEPOIS DO PGT° DA PRESTAÇÃO	
1	264	110	154
2	132	**0**	132
Total	**-**	**-**	**286**

• $\mathbf{J_1}$ **= R$44,00** (20% de R$220,00, pois não foi dada entrada) e $\mathbf{J_2}$ **= R$22,00** (pois depois de pagar a 1ª prestação, tem-se: $SD_d(1)$ =R$264,00-R$154,00=R$110,00, sendo J_2 = 20% de R$110,00=R$22,00.

Quadro 16 Parcelas de juros e amortizações de um empréstimo de R$220,00, pago em duas prestações mensais diferentes e sem entrada

k	***J_k (em R$)***	***A_k (em R$)***[12]	**PMT_k (em R$)**
1	44	**110**	154
2	22	**110**	132
Total	**66**	**220**	**286**

3.4.2 Cálculo da taxa de juros de um financiamento pago em três prestações mensais diferentes e sem entrada, quadro da evolução do saldo devedor e quadro das amortizações e juros

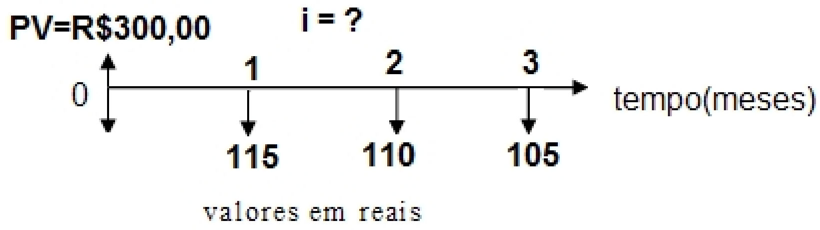
Exemplo[13] **29:** Uma bicicleta custa à vista R$300,00, mas pode ser paga em três prestações, sendo a primeira de R$115,00 em 1 mês, a segunda de R$110,00 em 2 meses e a terceira de R$105,00 em 3 meses. Determinar a taxa de juros mensal do financiamento (cobrada sobre o saldo devedor).

Fonte: elaborada pelo próprio autor

[12] Observa-se que as parcelas de amortizações são iguais a R$110,00, ou seja, **CONSTANTES**, que caracteriza o **S**istema de **A**mortização **C**onstante (**SAC**).

[13] A resolução deste **exemplo 29** utilizando-se uma calculadora financeira **HP12C** encontra-se no **apêndice K**.

Resolução:



- Supondo que o estudante não saiba que, neste caso, é um exemplo de SAC. Usando o mesmo raciocínio já utilizado na resolução do exemplo 21 e já multiplicando por $(1+i)^3$, tem-se: (valores na data da 3ª prestação)

$$115.(1+i)^2 + 110.(1+i) + 105 = 300.(1+i)^3$$, substituindo-se **(1+i) = x**, tem-se:

$$300.x^3 - 115.x^2 - 110.x - 105 = 0 \Rightarrow 60x^3 - 23.x^2 - 22.x - 21 = 0$$

(tem-se aqui um bom exemplo prático para ser relacionado com o estudo das equações polinomiais no terceiro ano do ensino médio: **Teorema das Raízes Racionais)**.

> **Teorema das Raízes Racionais:**
>
> Seja a equação polinomial de coeficientes inteiros: $a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$. Se o racional $\frac{p}{q}$, sendo p e q $\neq 0$ números inteiros primos entre si, é raiz dessa equação, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n. (IEZZI, 2004, p.298)

Utilizando o teorema, tem-se que os possíveis valores para **p** são –1, 1, – 3, 3, –7, 7, –21 e 21 e os possíveis valores de q são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60 (basta só os inteiros positivos). Como se observa que 0 < i < 1 (1 < x < 2), tem-se que são 5 as possíveis raízes racionais, são elas: $\frac{3}{2} = 1{,}5$, $\frac{7}{4} = 1{,}75$, $\frac{7}{5} = 1{,}4$, $\frac{7}{6} = 1{,}1666...$, , e $\frac{21}{20} = 1{,}05$. Como a soma das prestações é R$330,0, tem-se que a taxa de juros deve ser maior do que 3,23% ao mês, pois seria de aproximadamente 3,23% se as três prestações tivessem sido pagas juntas numa única prestação na data da terceira. Tem-se também que a taxa de juros deve ser menor do que 10% ao mês, pois seria de 10% se as três prestações tivessem sido pagas juntas numa única prestação na data da primeira. Assim, chega-se à conclusão que x = 1,05, ou seja, i = 0,05 = 5%.

Portanto, a taxa de juros mensal cobrada nesse financiamento é de **5%**.

Observação 1: As outras duas raízes do polinômio anterior podem ser obtidas facilmente utilizando-se o Teorema de D'Alembert. Procedendo-se dessa forma, obtém-se a equação do 2° grau $3.x^2 + 2x + 1 = 0$, que não possui raízes reais.

Observação 2: A taxa de juros mensal também poderia ter sido encontrada pelo "método das tentativas", ou seja, testando valores. Porém, esse método seria complicado no caso em que essa taxa não fosse um número simples (como nesse exemplo).

Observação 3: Os exemplos 24 e 25 são muito importantes para serem explorados nas aulas de matemática, caso a matemática financeira seja incorporada ao currículo do ensino básico, pois, nas resoluções utilizam-se uma equação do 2° grau e a uma equação do 3° grau numa situação que teve origem num problema real. Porém, o processo é muito trabalhoso, sendo importante nesse momento o professor dizer que existem calculadoras financeiras que fazem facilmente esses cálculos. Os cálculos ficam ainda mais trabalhosos quando se tiverem equações de grau maior do que 3, como pode ser conferido na atividade 5 da seção **3.8,** na qual aparece uma equação de grau 13 (que é comentada e resolvida no apêndice **I,** utilizando-se uma calculadora financeira do modelo HP12C)**.** É um bom momento para o professor apresentar uma calculadora desse tipo e, como estas calculadoras possuem preços altos, pode-se mostrar o emulador de uma dessas calculadoras (a HP12C), que está disponível para download em *smartphones* por um preço muito baixo ou até mesmo gratuitamente.

De fato, a taxa de juros de 5% ao mês é justa, pois para um valor presente de **PV=R$300,00,** tem-se: R$300,00 + 5% de R$300,00 = R$315,00; R$315,00 – **R$115,00** = R$200,00**;** R$200,00 + 5% de R$200,00 = R$210,00**;** R$210,00 – **R$110,00** = R$100,00**;** R$100,00 + 5% de R$100,00 = R$105,00**;** R$105,00 – **R$105,00** = R$**0,00**. Imediatamente após o pagamento da 3ª prestação **o saldo devedor zerou**.

Quadro 17 Evolução do saldo devedor de uma dívida de R$300,00, paga em três prestações mensais diferentes e sem entrada

VALOR À VISTA (PV): R$ 300,00	***SALDOS DEVEDORES NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO K (SD_k em R$)***		**VALOR DAS PRESTAÇÕES (PMT_k em R$)**
N° DA PRESTAÇÃO (k)	ANTES DO PGT° DA PRESTAÇÃO	DEPOIS DO PGT° DA PRESTAÇÃO	
1	315	200	115
2	210	100	110
3	105	**0**	105
Total	-	-	**330**

• $\mathbf{J_1}$ = 5% de R$300,00 = **R$15,00 (**pois não foi dada entrada), $\mathbf{J_2}$ = 5% de R$200,00 = **R$10,00** (pois depois de pagar a 1ª prestação, tem-se: $SD_d(1)$ = R$315,00 - R$115,00 = R$200,00, sendo J_2 = 5% de R$200,00 = R$10,00 e $\mathbf{J_3}$ **= R$5,00** (pois depois de pagar a 2ª prestação,tem-se: $SD_d(2)$ = R$210,00 - R$110,00 = R$100,00, sendo J_3 = 5% de R$100,00 (R$5,00).

Quadro 18 Parcelas de juros e amortizações de um empréstimo de R$500,00, pago em três prestações mensais e diferentes, sendo uma entrada

k	***J_k (em R$)***	***A_k (em R$)***[14]	**PMT_k (em R$)**
1	15	100	115
2	10	100	110
3	5	100	105
Total	**30**	**300**	**330**

O princípio básico a seguir é aplicado nos SFA e SAC e, quando se utiliza a taxa real de juros cobrada, ele é válido até mesmo nos outros sistemas de amortizações não estudados aqui.

Princípio Básico envolvido nos Empréstimos e Financiamentos:

Em **qualquer** sistema de amortização aplicado a empréstimos ou financiamentos, **o juro** embutido em cada prestação a partir da 2ª (nos casos com ou sem entrada) **é calculado sempre sobre o saldo devedor** que resta imediatamente após o pagamento da prestação anterior, sendo de **zero** o juros embutido na 1ª prestação no caso com entrada e, no caso sem entrada, o juro embutido na 1ª prestação é calculado sobre o valor do principal. Ou seja:

$$\bullet \text{ com entrada : } J_1 = 0 \qquad \bullet \text{ sem entrada : } J_1 = i \times PV$$

$$\bullet \text{ com ou sem entrada : } J_k = i \times SD_d(k-1) \;,\; k = 2,3,...,n$$

3.5 Valor Acumulado após n Depósitos Iguais, Periódicos e à mesma Taxa de Juros

Para calcular o valor do montante acumulado (FV) (*Future Value*) após n depósitos periódicos e iguais a PMT, sendo a taxa unitária de juros (i) constante, utiliza-se a fórmula[15] a seguir:

$$\boxed{FV = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times PMT}$$

Fórmula 9 Cálculo do valor acumulado após n depósitos iguais, periódicos e à mesma taxa de juros

[14] Observa-se que as parcelas de amortizações são iguais a R$100,00, ou seja, **CONSTANTES**, que caracteriza o **S**istema de **A**mortização **C**onstante (**SAC**).
[15] A demonstração dessa fórmula encontra-se no apêndice **H**.

Esse valor acumulado conta do momento que foi feito o primeiro depósito (não importa se é com entrada ou não) até o do último. Portanto, utilizando-se qualquer das fórmulas (com entrada ou sem entrada) tem-se a mesma fórmula. Não foi feito nenhum saque durante todo o período da aplicação. Caso sejam feitos n depósitos, mas o problema desejar o valor acumulado um período após o último depósito, deve-se ao final multiplicar por (1+i) o valor encontrado pela fórmula 9.

Exemplo 29: Uma pessoa depositou em uma aplicação financeira R$100,00 no 1° dia de cada mês do ano de 2008. Sabendo-se que a taxa mensal paga por essa aplicação é de 2% durante todo o ano e que a pessoa não efetuou nenhum saque no período. Qual foi o total aproximado disponível em 01/01/2009? (Dado: $1{,}02^{13} \cong 1{,}2936$)

Fonte: Elaborada pelo próprio autor e utilizada na lista das aulas de progressão geométrica

Resolução 1: O depósito de R$100,00 feito em 01/12/2008 equivale a um montante de R$$100.1{,}02^1$ em 01/01/2009; o de R$100,00 feito em 01/11/2008 equivale a R$$100.1{,}02^2$; e, assim sucessivamente, o depósito de R$100,00 feito em 01/01/2008 equivale a R$$100.1{,}02^{12}$.

Assim, tem-se um total de $\underbrace{100.1{,}02 + 100.1{,}02^2 + ... + 100.1{,}02^{12}}_{\text{soma de 12 termos de uma PG: } a_1 = 100.1{,}02 \text{ e } q = 1{,}02}$ reais em 01/01/2009.

Aplicando-se na fórmula[16], tem-se $\frac{a_1.(1-q^n)}{1-q} = \frac{100.1{,}02.(1-1{,}02^{12})}{1-1{,}02} = \frac{100.(1{,}02^{13}-1{,}02)}{0{,}02} \cong$

$\frac{100.(1{,}2936-1{,}02)}{0{,}02} = 1368.$

Portanto, o valor disponível para essa pessoa em 01/01/2009 foi de aproximadamente **R$1.368,00**.

Resolução 2: Utilizando-se a fórmula 9, tem-se: $FV = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.PMT = \frac{1{,}02^{12}-1}{0{,}02}.100.$

Como deseja-se encontrar o total acumulado um mês após o último depósito, deve-se multiplicar por 1,02. Assim, $FV = \frac{1{,}02^{13}-1{,}02}{0{,}02}.100 \cong \frac{1{,}2936-1{,}02}{0{,}02}.100 = 1368.$

---

16 A demonstração dessa fórmula encontra-se no apêndice **E**.

3.5.1 Cálculo do saldo devedor no dia do vencimento de uma prestação de número k e após o seu pagamento (no SFA)

<u>1° caso</u>: **com entrada**

Basta transferir o valor presente PV para a data da prestação n° **k** ($PV.(1+i)^{k-1}$) e subtrair o valor acumulado por **k** depósitos de PMT, ou seja, subtrair $\frac{(1+i)^k-1}{i}.PMT$.

Assim, no exemplo 21, tem-se:

$$SD_d(2)=331.1{,}1^1-\frac{1{,}1^2-1}{0{,}1}.121\cong 364{,}10-254{,}10=110 \text{ (ver quadro 13).}$$

<u>2° caso</u>: **sem entrada**

Basta transferir o valor presente PV para a data da prestação n° **k** ($PV.(1+i)^k$) e subtrair o valor acumulado por **k** depósitos de PMT $\left(\frac{(1+i)^k-1}{i}.PMT\right)$.

Assim, no exemplo 26, tem-se:

$$SD_d(8)=1000.1{,}0548^8-\frac{1{,}0548^8-1}{0{,}0548}.115{,}90\cong 1532{,}36-1125{,}92=406{,}44 \text{ (ver quadro14).}$$

3.5.2 Cálculo da parcela de juros embutida numa determinada prestação (no SFA)

O valor da parcela de juros embutida numa prestação de número **k** (**J_k**) é calculado por $J_k=i\ .\ SD_d(k-1)$.

Assim, no exemplo 26, tem-se:

$$J_7=0{,}0548.\left(1000.1{,}0548^6-\frac{1{,}0548^6-1}{0{,}0548}.115{,}90\right)=31{,}75 \text{ (ver quadro 14).}$$

3.6 Comentários Sobre a Matemática Financeira na Prática

É indiscutível a importância que o tema financeiro tem nos dias atuais, sobretudo depois da crise americana que teve origem em 2007 e teve fortes consequências por todo o mundo a partir de 2008.

Na pesquisa que será apresentada e analisada no capítulo 4, a 2ª pergunta feita aos participantes do ensino médio era a seguinte:

"Você sabe se pelo menos um de seus pais ou responsáveis já tomou algum empréstimo (pessoal, CDC, consignação em folha, etc) alguma vez?"

A esta pergunta, 68% destes participantes responderam sim, o que não significa que os outros 32% não tenham familiares próximos que tenham adquirido algum empréstimo, e sim, que apenas não tenham conhecimento de tal fato, o que mostra a relevância do assunto financeiro, não só para a pessoa que adquiriu o empréstimo, mas para todos os integrantes da família.

Numa sociedade, que é o caso do Brasil, em que as estatísticas apontam um alto grau de endividamento das famílias, faz-se necessário que esses assuntos sejam ensinados de forma mais abrangente para possibilitar um melhor entendimento, a fim de que as pessoas tenham condições de tomar decisões mais conscientes envolvendo suas dívidas e, até mesmo, a possibilidade de fazer a portabilidade destas, ou seja, a transferência de suas dívidas de uma instituição financeira para outra - um assunto muito comentado atualmente no nosso país. Ao fazer essa portabilidade há a quitação da dívida que os tomadores do empréstimo têm com uma instituição financeira. Assim, para tomarem decisões conscientes é necessário que estes conheçam não só as regras da matemática financeira, como também as legislações pertinentes ao tema.

Novamente aqui entra mais uma história envolvendo a curiosidade do autor desta dissertação: Ao fazer os cálculos necessários para a quitação de um empréstimo usando todo o conhecimento de matemática financeira adquirido até então, o saldo devedor não coincidia com o informado pelo banco. Cálculos e mais cálculos e uma descoberta: além do conhecimento matemático, era necessário conhecer uma resolução do Banco Central (que será citada a seguir) para calcular o saldo devedor com precisão. A partir daí o autor gerou suas próprias planilhas e pôde acompanhar diariamente os andamentos dos saldos devedores de todas as suas dívidas.

Ao fazer essa portabilidade há a quitação da dívida que os tomadores do empréstimo têm com uma instituição financeira. Assim, para tomarem decisões conscientes é necessário que estes conheçam não só as regras da matemática financeira, como também as legislações pertinentes ao tema.

Em termos gerais, atualmente (a partir da Resolução N°3516 do Banco Central, de 6 de dezembro de 2007), nessas quitações é levada em consideração nos cálculos dos saldos devedores (no caso de contratos com prazo a decorrer superior a 12 meses) a diferença entre a taxa de juros contratada e a taxa de básica de juros da economia (SELIC) na data da aquisição do empréstimo (o chamada *SPREAD* bancário). Essa diferença é adicionada à nova taxa básica na data da quitação do empréstimo, gerando assim uma nova taxa, que é usada para os cálculos dos saldos devedores. No caso em que o prazo a decorrer é de até 12 meses, usa-se nesses cálculos a própria taxa contratada e os cálculos normais da matemática financeira.

Maiores detalhes sobre essas quitações podem ser consultados em (FREITAS, 2013, p.61-76), em sua monografia de conclusão do curso de especialização em Análise Financeira, cujo título é *"A Base Matemática Aplicada para entender o Sistema Francês de Amortização na Prática"*.

3.7 Comentários sobre alguns Livros Didáticos aprovados pelo PNLD

Numa consulta a livros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2011 em diante, em busca de se saber em que série ensina-se o sistema de juros compostos, o autor encontrou seis livros que abordam esse conteúdo, sendo dois do nono ano do ensino fundamental, dois do primeiro ano do ensino médio e dois do segundo ano deste último nível de ensino. A intenção não foi fazer uma análise detalhada da forma de abordar o assunto e sim, se estes livros apresentam problemas envolvendo financiamentos e caso abordassem, se construíam um quadro com a evolução dos saldos devedores ou se pelo menos explicavam a evolução destes. Três livros apresentam questões sobre financiamento, sendo que um deles faz uma abordagem rápida sobre financiamentos com duas parcelas sendo uma entrada e uma após um mês, mas não chama atenção para o fato de que os juros só incidem sobre o saldo devedor. Outro livro já parte para uma situação em que uma pessoa tem que decidir qual de duas dívidas é a melhor, ou seja, qual possui menor valor presente, sendo uma com três pagamentos com entrada e a outra com seis pagamentos também com entrada. Este livro utiliza a fórmula $M_t = C.(1+i)^t$ do montante do sistema de juros compostos já imaginando que os valores presentes dos dois fluxos podem ser escritos como soma, respectivamente, de três e seis incógnitas distintas, como se isso fosse óbvio. Substitui essas incógnitas, uma a uma, em C e chega-se aos valores presentes dos fluxos, concluindo que o que possui menor valor é o melhor dos dois. Já o terceiro, logo após explicar juros compostos e dar exemplos e atividades, faz uma abordagem teórica dizendo quais são os dois sistemas de amortizações principais e já fornece a fórmula $P = \dfrac{C\,.\,i}{1-(1+i)^{-n}}$ (que é equivalente à fórmula $PMT = \dfrac{(1+i)^n\,.\,i}{(1+i)^n - 1}\,.\,PV$) para calcular o valor de cada prestação de um empréstimo no sistema Price. Informa que a fórmula apresentada não será demonstrada, visto que o mais importante neste momento é que o aluno perceba a relação entre as variáveis e sua aplicação. Em seguida já parte para um exemplo com 5 prestações e constrói uma tabela Price sem grandes detalhes e já encerra a explicação desse assunto apresentando uma atividade resolvida, também sem detalhes, envolvendo a tabela Price (com 6 prestações). Os livros fazem poucas associações entre os tópicos da matemática do ensino básico com a matemática financeira.

3.8 Sugestão de uma Atividade para ser feita com os Estudantes após o Estudo de Progressão Geométrica

No ano de 2006, o autor dessa dissertação sugeriu a inclusão do assunto **"**Noções de Lógica das Proposições**"** na grade curricular do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca – Unidade de Ensino Descentralizada de Nova Iguaçu-RJ, no qual atua como professor do ensino médio desde março de 2004 e, com a aprovação, esse assunto passou a ser ensinado no ano de 2007. Foi com grande surpresa e satisfação que o autor recebeu (em 13/07/15), agora na fase final da conclusão desta dissertação, um e-mail da SBM com o título **"**Proposta Curricular para o Ensino Médio e para as Licenciaturas em Matemática**"** da qual constam, como pode ser consultado na figura **8** do capítulo 2, a proposta de inclusão do assunto **"**Noções de Lógica**"** na 1ª série do ensino médio. Assim como ocorreu com o assunto **"**Noções de Lógica**"**, o autor tinha por objetivo, com as atividades dessa seção, fazer uma proposta de inclusão do conteúdo "Matemática Financeira" no ensino médio, porém, o autor não deu continuidade nesse objetivo. Na mesma Proposta Curricular da SBM, citada acima, consta, como pode ser consultado também na figura **8** do capítulo 2, uma proposta de inclusão do conteúdo "Matemática Financeira" na 2ª série do ensino médio, o que renovou no autor o desejo de contribuir para a discussão a respeito dessa inclusão. Na figura 9 do capítulo 2, também consta a Proposta da SBM com os conteúdos da disciplina matemática financeira a serem ensinados no ensino médio. Também tem a proposta da SBM de inclusão da disciplina Matemática Financeira nos cursos de Licenciatura em Matemática, como já foi visto no capítulo 2.

Com questões dos vestibulares de Universidades do Estado do Rio de Janeiro, o autor dessa dissertação criou e aplicou as atividades a seguir em duas turmas (2AINFO1 e 2AELME1) no mês de novembro de 2008 e em uma turma (2AINFO1) no mês de junho de 2009 da unidade do CEFET/RJ já citada acima. Os exemplos de 1 a 5 da 1ª parte foram resolvidos pelo professor em dois encontros extraclasses de 2 horas cada, após os alunos terem estudado progressão geométrica com o próprio professor. Este também deu orientações para os alunos de como fazerem, em casa, as atividades que constam da 2ª parte. O professor se disponibilizou para sanar eventuais dúvidas e encontrando erros nas correções dos trabalhos, estes eram entregues de volta para os alunos fazerem as devidas correções. Estas atividades valeram como parte da avaliação bimestral da disciplina Matemática.

Eis as atividades:

1ª PARTE: Atividades resolvidas pelo professor em dois encontros extraclasses de 2 horas cada

Exemplo 1: Um ventilador está sendo vendido à vista por R$5.890,00 ou em duas vezes de R$3.960,00.

Se um comprador dispusesse de R$5.890,00 para a aquisição do ventilador, e optasse pela forma de pagamento em duas vezes, teria de quitar, no ato da compra, a primeira parcela de R$3.960,00. Restariam, assim, R$1.930,00 (R$5.890,00 – R$3.960,00) para pagar, 30 dias após, a segunda parcela de R$3.960,00.

Suponha que os R$1.930,00, restantes venham a ser aplicados no mercado financeiro até o dia do pagamento da 2ª parcela de R$3.960,00. Neste caso, os R$1.930,00 teriam de render, para saldar a dívida, aproximadamente, o mínimo de:

a) 34,5% b) 50,5% c) 55% d) 80% e) 105%

Fonte: Vestibular da UERJ

Exemplo 2: Uma loja oferece duas formas de pagamentos para seus clientes: à vista ou em duas parcelas iguais.

A loja anuncia, na sua vitrine, um vestido por um preço total de R$200,00 para pagamento em duas vezes, sendo R$100,00 no ato da compra e R$100,00 trinta dias após essa data. Para pagamento à vista, a loja oferece um desconto de 10% sobre o preço total de R$200,00, anunciado na vitrine.

Considerando o preço à vista como o preço real do vestido, determine a taxa de juros cobrada pela loja no pagamento em duas vezes.

Fonte: Vestibular da UFRJ

Exemplo 3: Uma geladeira custa à vista R$900,00, mas pode ser paga em duas prestações iguais, uma no ato da compra e outra após 30 dias, sabendo-se que a taxa de financiamento é de 25% ao mês sobre o saldo devedor.
a) Determine o valor dessas prestações.
b) O quadro a seguir mostra a evolução do saldo devedor à medida que as prestações são pagas. Preencha-o.

VALOR À VISTA : R$	VALOR DAS PRESTAÇÕES (em R$)	SALDO DEVEDOR NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO (em R$)	
PRESTAÇÃO N°		ANTES DO PGT° DA PRESTAÇÃO	DEPOIS DO PGT° DA PRESTAÇÃO
1			
2			

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Exemplo 4: Um comerciante deseja vender um produto que custa à vista R$331,00 em três parcelas iguais, sendo a primeira à vista, a segunda em um mês e a última em dois meses. Os juros mensais (juros compostos) são de 10% ao mês.
a) Determine o valor dessas prestações.
b) O quadro a seguir mostra a evolução do saldo devedor à medida que as prestações são pagas. Preencha-o.

VALOR À VISTA : R$	VALOR DAS PRESTAÇÕES (em R$)	SALDO DEVEDOR NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO (em R$)	
PRESTAÇÃO N°		ANTES DO PGT° DA PRESTAÇÃO	DEPOIS DO PGT° DA PRESTAÇÃO
1			
2			
3			

Fonte: Vestibular da UFRRJ

Exemplo 5: A rede de lojas Sistrepa vende por crediário com uma taxa de juros mensal de 10%. Uma certa mercadoria, cujo preço à vista é **P**, será vendida a prazo de acordo com o seguinte plano de pagamento: R$100,00 de entrada, uma prestação de R$240,00 a ser paga em 30 dias e outra de R$220,00 a ser paga em 60 dias.
a) Determine **P**.
b) O quadro a seguir mostra a evolução do saldo devedor à medida que as prestações são pagas. Preencha-o.

VALOR À VISTA : R$	VALOR DAS PRESTAÇÕES (em R$)	SALDO DEVEDOR NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO (em R$)	
PRESTAÇÃO N°		ANTES DO PGT° DA PRESTAÇÃO	DEPOIS DO PGT° DA PRESTAÇÃO
1			
2			
3			

Fonte: Vestibular da UFRJ

2ª PARTE: Atividades propostas para os alunos fazerem em casa

1) A rede de lojas JURALTO vende por crediário com uma taxa de juros mensal de 20%. Uma certa mercadoria, cujo preço à vista é V, será vendida a prazo de acordo com o seguinte plano de pagamento : R$220,00 de entrada, uma prestação de R$412,00 a ser paga 1 mês após a entrada e outra de R$312,00 a ser paga 2 meses após a entrada.

a) Qual é o valor à vista dessa mercadoria?
b) O quadro a seguir mostra a evolução do saldo devedor à medida que as prestações são pagas. Preencha-o.

VALOR À VISTA : R$	VALOR DAS PRESTAÇÕES (em R$)	SALDO DEVEDOR NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO (em R$)	
PRESTAÇÃO N°		ANTES DO PGT° DA PRESTAÇÃO	DEPOIS DO PGT° DA PRESTAÇÃO
1			
2			
3			

Fonte: Vestibular do CEFET/RJ

2) Num **sistema de amortização** em que as **prestações são iguais**, pagas em intervalos iguais de tempo (sem entrada ou com entrada igual às outras prestações, essas prestações podem ser calculadas utilizando as fórmulas:.

$$\bullet\ \textbf{Com Entrada : } \mathbf{PMT = \frac{(1+i)^{n-1}.\,i}{(1+i)^{n}-1}.\,PV}$$

FÓRMULA (I)

$$\bullet\ \textbf{Com Entrada : } \mathbf{PMT = \frac{(1+i)^{n-1}.\,i}{(1+i)^{n}-1}.\,PV}$$

FÓRMULA (II)

$$\text{Em que } \begin{cases} \textbf{PMT : valor das prestações} \\ \textbf{PV : valor à vista (valor presente)} \\ \textbf{n : número de prestações} \\ \textbf{i : taxa unitária de juros (Ex.: 5\%} \Rightarrow \mathbf{i = 0,05}\textbf{)} \end{cases}$$

Observação.: Estas fórmulas podem ser demonstradas utilizando as fórmulas de Progressão Geométrica já estudadas em sala de aula).

Demonstre as fórmulas acima.

3) Suponha que você seja dono de uma loja de eletrodomésticos que financia as compras em até 12 prestações iguais (com ou sem entrada) e que a taxa de juros seja diferente a cada dia. Num determinado dia, você necessita calcular o valor das prestações, nas condições acima, para qualquer eletrodoméstico vendido em sua loja. Para isso, você pode montar uma tabela com apenas os coeficientes $\frac{(1+i)^{n-1}.\,i}{(1+i)^{n}-1}$ se a compra for com entrada e $\frac{(1+i)^{n}.\,i}{(1+i)^{n}-1}$ se, sem entrada. O valor das prestações seria obtido **multiplicando-se** o **coeficiente** referente ao número de prestações e opção escolhida pelo cliente (com entrada ou sem entrada) **pelo valor à vista** do eletrodoméstico.

Sendo a taxa de juros de hoje ------ % a.m., monte o quadro a seguir, arredondando os cálculos na 6ª casa decimal (**observação**: o professor estipulou taxas diferentes, em cada ano que a atividade foi aplicada, para todos os alunos das turmas)

n	**coeficientes** (com entrada)	**coeficientes** (sem entrada)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Um cliente comprou uma geladeira cujo preço à vista é **R$1.200,00**. Determine o valor das prestações sabendo-se que a compra foi feita em:
a) 12 prestações com entrada;
b) 6 prestações sem entrada.

4) Preencha o quadro a seguir, utilizando a compra efetuada no exercício anterior, com a evolução do saldo devedor (para o caso **com entrada**) à medida que as prestações forem sendo pagas.

VALOR À VISTA : R$	**VALOR DAS PRESTAÇÕES (em R$)**	**SALDO DEVEDOR NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO (em R$)**	
PRESTAÇÃO N°		**ANTES DO PGT° DA PRESTAÇÃO**	**DEPOIS DO PGT° DA PRESTAÇÃO**
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

5) Cole abaixo um recorte de jornal, revista ou qualquer outro meio de propaganda, que tenha o valor à vista, o número de prestações e o valor destas. Calcule, utilizando os seus conhecimentos de matemática, uma calculadora científica e as fórmulas dadas anteriormente, a taxa de juros cobrada pela loja.

(observação: este exercício era para mostrar aos alunos que nem todos os cálculos envolvendo matemática financeira são possíveis de serem feitos manualmente ou com auxílio de apenas uma calculadora científica. Nesse momento o professor apresentou a calculadora financeira HP12C e o emulador da mesma. Nesta atividade o aluno depara-se com uma equação de grau acima do que ele já está familiarizado a resolver. Quando no recorte de jornal aparecia a taxa de juros cobrada, o professor pediu para que os alunos confirmassem a veracidade dessa taxa).

Não serão apresentadas as resoluções das atividades acima aqui nesta seção, mas quatro questões da 1ª parte foram solucionadas na seção 3.2 e parte de uma das questões da 2ª parte será solucionada na pesquisa do capítulo **4**. Encontra-se no apêndice **I** as respostas dessas atividades e uma solução para a atividade 5 da 2ª parte, utilizando-se uma calculadora financeira HP12C (nesta **i** é a taxa centesimal e não a taxa unitária), bem como alguns comentários pertinentes sobre essa situação.

Como já dito na introdução dessa dissertação, uma das características do autor que o ajudou e o ajuda muito é a curiosidade. Foi devido a essa curiosidade que o autor incluiu a atividade 3 da 2ª parte das atividades descritas anteriormente. Na década de 1990, quando os sistemas de informática não eram tão desenvolvidos como hoje, uma curiosidade muito grande foi despertada no autor ao ir numa loja para financiar um eletrodoméstico: a vendedora tinha uma tabela (colada no verso da calculadora) igual à descrita na atividade 3 da 2ª parte e fazia exatamente como foi descrito em tal atividade, ou seja, perguntava o número de prestações e o plano (com ou sem entrada) e multiplicava o valor encontrado em sua tabela pelo valor do eletrodoméstico que a pessoa queria comprar, encontrando-se assim o valor das prestações.

É óbvio que, com uma quantidade grande de alunos, as correções das atividades 3 e 4 da 2ª parte desses trabalhos seriam complicadas . Para isso, o professor foi ajudado por alguns alunos (das turmas de informática descritas) para fazer uma planilha eletrônica para corrigir tais atividades. Algumas correções eram feitas na presença dos próprios alunos para que eles vissem na hora o que erraram.

Essas atividades tiveram boa repercussão e, inclusive, até elogios por parte de pais de alunos. Tiveram pais dizendo: *"meu filho finalmente aprendeu alguma coisa na escola que se utiliza na prática"*. Teve um aluno que disse que ajudou seu pai na hora de efetuar uma compra, efetuando os cálculos e encontrando os valores corretos, deixando seu pai orgulhoso.

Para complementar essas atividades, o autor sugere que elas sejam aplicadas após os estudantes fazerem as quatro primeiras questões da pesquisa que se encontra no capítulo 4.

3.9 Questão do Exame Nacional do Ensino Médio de 2012 sobre Matemática Financeira

Exemplo 30: Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: Pagar à vista, por R$55.000,00;
- Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$30.000,00, e mais uma prestação de R$26.000,00 para dali a 6 meses.

- Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$20.000,00, mais uma prestação de R$20.000,00, para dali a 6 meses e outra de R$18.000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
- Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada de R$15.000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$39.000,00.
- Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$60.000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Resolução: Como o Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, na opção 1, ele daria os R$55.000,00 e não sobraria nada para ele e ao final de 1 ano ele não teria nada; na **opção** 2, ele daria R$30.000,00 de entrada e sobraria R$25.000,00, que daí a 6 meses ficaria R$25.000,00 + 10% de R$25.000,00 = R$27.500,00 e, ao pagar a 2ª prestação de R$26.000,00, sobraria R$1.500,00 e ao final de 1 ano ele teria R$1.500,00 + 10% de R$1.500,00 = **R$1.650,00**; na **opção 3**, ele daria R$20.000,00 de entrada e sobraria R$35.000, que daí a 6 meses ficaria R$35.000,00 + 10% de R$35.000,00 = R$38.500,00 e, ao pagar a 2ª prestação de R$20.000,00 sobraria R$18.500,00, que daí a 6 meses ficaria R$18.500,00 + 10% de R$18.500,00 = R$20.350,00 e, ao pagar a 3ª prestação R$18.000,00 **sobraria R$2.350,00** para ele; na **opção 4**, ele daria R$15.000,00 de entrada e sobraria R$40.000,00, que depois de 1 ano passa para R$40.000,00 . $1{,}1^2$ = R$48.400,00 e, ao pagar a 2ª prestação de R$39.000,00 **sobraria R$9.400,00** para ele; na **opção 5**, daí a 1 ano ele teria R$55.000,00 . $1{,}1^2$ = R$66.550,00 e ao pagar a 1ª e única prestação de R$60.000,00 **sobraria R$6.550,00** para ele.

Portanto, a melhor opção é a de número **4** (alternativa (**d**)), pois ao final de 1 ano proporcionaria para o Arthur o maior rendimento entre as 5 opções.

Observa-se que a única opção em que a soma das prestações é menor do que R$55.000,00 é a opção 4. As taxas de juros (ao semestre) cobradas nas opções 2, 3, 4 e 5 são, respectivamente, 4%, 5,77%, -1,26% e 4,45%.

3.10 Duas questões de matemática do PISA de 2012

A questão a seguir foi cobrada na prova de matemática do PISA 2012, porém não foi na parte de *"letramento financeiro"*. Apesar de não envolver dinheiro, ela é resolvida utilizando-se conceitos estudados em matemática financeira.

Exemplo[17] 31:

O fotógrafo de animais Jean Baptiste fez uma viagem de um ano e tirou inúmeras fotos de pinguins e de seus filhotes. Ele se interessou particularmente pelo crescimento do tamanho de diferentes colônias de pinguins. Jean se pergunta como o tamanho de uma colônia de pinguins vai evoluir ao longo dos próximos anos. Para determinar essa evolução, ele levanta as seguintes hipóteses: • No início do primeiro ano, a colônia tem 10.000 pinguins (5.000 casais) e no início de cada ano, a colônia tem um número igual de machos e fêmeas que formam casais. • Cada casal de pinguins procria um filhote a cada primavera. • No final de cada ano, 20% de todos os pinguins (adultos e filhotes) estarão mortos. • Os pinguins com um ano de idade também terão filhotes. De acordo com as hipóteses anteriores, qual das seguintes fórmulas expressa o número total de pinguins P ao final de 7 anos? a) $P = 10.000 \times (1,5 \times 0,2)^7$ b) $P = 10.000 \times (1,5 \times 0,8)^7$ c) $P = 10.000 \times (1,2 \times 0,2)^7$ d) $P = 10.000 \times (1,2 \times 0,8)^7$

Resolução: Como cada casal de pinguins procria um filhote a cada primavera e 20% de todos os pinguins (adultos e filhotes) estarão mortos ao final de cada ano, tem-se que o número de pinguins aumenta em 50% a cada primavera e diminui de 20% no final do ano. Assim, após um ano o número de pinguins é $10.000 \times (1 + 0,5) \times (1 - 0,2) = 10.000 \times 1,5 \times 0,8$. Como esse aumento e essa diminuição ocorrerão sempre sobre o número de pinguins no início de cada ano, tem-se que após 7 anos o número total de pinguins é $\mathbf{P = 10.000 \times (1,5 \times 0,8)^7}$ (alternativa (**b**)).

A questão a seguir foi cobrada na prova de matemática do PISA 2012, na parte de *"letramento financeiro"*.

[17] Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/itens/2012/pisa_2012_matematica_itens_liberados.pdf>. Acesso em 06 de agosto de 2015.

Exemplo[18] 32:

"PISA 2012: Estudante e Dinheiro"
“Senhora Jones tem um empréstimo de 8000 *zeds* com a financeira ‘*FirstZed*’. A taxa de juros anual sobre esse empréstimo é de 15%. Seus reembolsos a cada mês são de 150 *zeds*.
Após um ano, a senhora Jones ainda deve 7.400 *zeds*.
Outra companhia financeira chamada ‘*ZedBest*’ dará à senhora Jones um empréstimo de 10.000 *zeds* com uma taxa de juros anual de 13%. Seus reembolsos a cada mês também seriam de 150 *zeds*.

NOVA OFERTA - *QUESTÂO 1*
Se ela aceitar o empréstimo da ‘ZedBest’, a senhora Jones pagará imediatamente o seu empréstimo com a ‘FirstZed’.
Quais são os outros dois benefícios financeiros para a senhora Jones se ela aceitar o empréstimo da ‘ZedBest’?
Resolução: Crédito Total
Refere-se tanto ter dinheiro extra para usar e obter uma menor taxa de juros.
● Ela estará pagando 13% de juros ao invés de 15%.
● Ela tem um adicional de 2.600 zeds.
● Ela tem dinheiro extra para gastar.
● A taxa de juros é menor.

NOVA OFERTA - *QUESTÂO 2*
O que é uma possível consequência financeira negativa para Mrs Jones se ela concordar com o empréstimo Zedbest?
Resolução: Crédito Total
Refere-se a Mrs Jones ter mais dívida.
● Ela vai dever mais dinheiro.
●Ela será incapaz de controlar seus gastos.
● Ela vai ter mais débito.
Refere-se a pagar mais juros no total.
● 13% de 10.000 é maior do que 15% de 8.000.
Refere-se a levar mais tempo para pagar o empréstimo.
● Isso pode levar mais tempo para reembolsar o empréstimo porque ele é maior e os pagamentos são os mesmos.
Refere-se à possibilidade de pagar uma taxa de cancelamento com FirstZed
● Ela pode ter uma taxa de penalização para pagar o empréstimo da FirstZed antes do tempo.

Uma observação a ser feita aqui é que ***“****para após um ano, a senhora Jones ainda dever 7.400 zeds à financeira FirstZed****”***, foi feito o cálculo: 8.000 x 1,15 – 12 x 150 = 7.400, o que não é uma situação encontrada na realidade, pois os reembolsos pagos não foram valorizados com o tempo, ou seja, os juros não foram calculados sobre os saldos devedores após pagar cada reembolso.

[18] Questões e resoluções disponíveis em: <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-volume-vi.pdf>. Acesso: 06 de agosto de 2015.

O estudo do sistema de juros compostos abre um leque para relacioná-lo com diversos conteúdos da matemática ensinada no ensino básico, tais como: proporção, porcentagem, funções polinomiais, funções do tipo exponencial, logaritmos, progressão aritmética, progressão geométrica, etc, bem como para entender a matemática financeira envolvida nos sistemas de amortização, o que contribui para o objetivo do Pisa, que é produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação nos países participantes, de modo a subsidiar políticas de melhoria do ensino básico, pois a avaliação procura verificar até que ponto as escolas de cada país participante estão preparando seus jovens para exercer o papel de cidadãos na sociedade contemporânea.

No capítulo a seguir serão apresentados os resultados e análises da pesquisa aplicada a 54 participantes.

IV RESULTADOS E ANÁLISES DA PESQUISA REALIZADA

Os questionários das pesquisas a seguir foram inicialmente aplicados a 28 participantes do ensino médio e 32 do ensino superior. Apesar de ter sido recomendado um tempo aproximado de 60 minutos, os participantes ficaram bem à vontade, sendo que alguns responderam na presença do autor e outros levaram para responder em casa. Os participantes foram escolhidos por terem "bom conhecimento de matemática ou interesse em aprender". Teve um alto índice de devolução destes questionários: 25 do ensino médio e 29 do ensino superior. Num primeiro momento não era necessário identificar-se, porém, numa segunda etapa foram feitas as identificações dos questionários de todos os participantes, com a finalidade de dar um retorno com os seus desempenhos e enviar as resoluções para eles. Foi montado um grupo na rede social *facebook* com 41 dos participantes, sendo enviadas para 44 participantes, por essa rede social ou por *e-mail*, as resoluções comentadas das questões da pesquisa. Foram feitas cópias das resoluções para todos os participantes, porém, só foi possível entregá-las (em mãos) para 37 dos participantes.

O quadro a seguir apresenta os resultados obtidos com o questionário aplicado a 25 participantes da pesquisa, dos quais: 7 já haviam concluído o ensino médio ou equivalente e estudaram em escolas diversas, 6 já haviam concluído o ensino médio na Unidade de Ensino Descentralizada de Nova Iguaçu, do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca - CEFET/RJ, no ano anterior à pesquisa e 12 estavam cursando o terceiro ano do ensino médio nesta Unidade de Ensino no momento dessa pesquisa. Os participantes desse nível são representados no quadro pelos códigos **M1**, **M2**, **M3**,..., **M25**. Foram feitas duas perguntas e em cada uma delas, para cada participante, foi marcado um X na coluna da letra **S**, no caso em que ele respondeu **sim** ou um X na coluna da letra **N** no caso em que ele respondeu **não**. Nas respostas às seis questões foi marcado um X em cada questão, para cada participante, na coluna de apenas uma das letras **A**, **E** ou **B**, respectivamente, nos casos em que o participante acertou, errou ou não tentou resolver a questão.

As duas perguntas e as seis questões foram as seguintes:

1ª pergunta: Durante o ensino fundamental ou médio você estudou progressão geométrica e/ou juros compostos?

( ) SIM ( ) NÃO

2ª pergunta: Você sabe se pelo menos um de seus pais ou responsáveis já tomou algum empréstimo (pessoal, CDC, consignação em folha, etc) alguma vez?

( ) SIM ( ) NÃO

Questão 1: Uma loja vende por crediário com uma taxa de juros mensal de 20%. Uma certa mercadoria, cujo preço à vista é R$780,00, será vendida a prazo de acordo com o seguinte plano de pagamento: R$220,00 de entrada, uma prestação de R$412,00 a ser paga 1 mês após a entrada e outra de R$312,00 a ser paga 2 meses após a entrada. Essa loja está obedecendo as normas da matemática financeira?

Questão 2: Uma loja vende seus artigos com pagamento em duas prestações iguais, **"**sem juros**"**. A primeira prestação é paga no ato da compra e a segunda, um mês após. Entretanto, um desconto de 25% é concedido se o cliente pagar à vista. Na realidade, essa loja cobra, nas vendas a prazo, juros mensais de taxa igual a:
a) 12,5% b) 25% c) 50% d) 75% e) 100%

Questão 3: Uma geladeira custa à vista R$720,00, mas pode ser paga em duas prestações iguais, uma no ato da compra e outra após 30 dias, sabendo-se que a taxa de financiamento é de 25% ao mês sobre o saldo devedor. Determinando o valor dessas prestações, encontramos:
a) R$400,00 b) R$405,00 c) R$425,00 d) R$450,00 e) R$500,00

Questão 4: Um comerciante deseja vender um produto que custa à vista R$210,00 em duas parcelas iguais, sendo a primeira um mês após a compra e a segunda um mês após a primeira. Se os juros mensais (juros compostos) são de 10% ao mês, calculando o valor de cada parcela, encontramos:
a) R$109,56 b) R$110,00 c) R$121,00 d) R$126,00 e) R$127,05

Questão 5: **"**Os fabricantes de papel higiênico reduziram de 40m para 30m os rolos de algumas marcas, sem diminuição de preços. Ou seja, o consumidor está pagando 25% a mais pelo produto**"** (Revista Veja, 15/08/01).
Você concorda com o percentual apresentado acima? Justifique.

Questão 6: (Trecho extraído da Revista Veja de 5/10/2011 - página 85)
(...) em 1989, chegou a produzir uma inflação anual de 1973%. O recorde mensal seria batido em março do ano seguinte, quando a taxa alcançou **82%**. (...). **<u>Uma nota de 100 valia menos de 20 no fim do mês</u>**. (...)

Existe um erro na conclusão do enunciado acima. Qual seria o verdadeiro valor de uma nota de R$100,00 (recebida no início de março) no fim do mês de março?

Quadro 19 Resumo dos Resultados da Pesquisa do Ensino Médio

	Perguntas				**Questões**																		**Total**
	1ª		2ª		**1**			**2**			**3**			**4**			**5**			**6**			**de**
	S	**N**	**S**	**N**	**A**	**E**	**B**	**A**	**E**	**B**	**A**	**E**	**B**	**A**	**E**	**B**	**A**	**E**	**B**	**A**	**E**	**B**	**Acertos**
M1	X		X			X			X			X			X		X				X		**1**
M2	X			X		X			X			X			X		X				X		**1**
M3	X		X			X			X			X			X		X				X		**1**
M4	X			X		X			X			X			X			X			X		**0**
M5	X		X			X			X			X			X		X				X		**1**
M6	X		X			X			X		X			X			X				X		**3**
M7	X		X			X			X			X			X			X			X		**0**
M8	X		X			X			X			X			X			X			X		**0**
M9	X			X		X			X			X			X			X			X		**0**
M10	X		X			X			X			X			X			X			X		**0**
M11	X		X			X			X			X			X			X			X		**0**
M12	X		X			X			X			X			X		X			X			**2**
M13	X		X			X			X			X			X		X				X		**1**
M14	X		X			X			X			X			X			X			X		**0**
M15	X		X		X				X			X			X		X				X		**2**
M16	X			X		X			X			X			X			X				X	**0**
M17	X		X			X			X			X			X			X			X		**0**
M18		X	X			X			X			X			X			X			X		**0**
M19	X		X			X			X			X			X			X			X		**0**
M20	X		X			X			X			X			X		X			X			**2**
M21	X			X	X				X			X			X		X			X			**3**
M22	X			X		X			X			X			X		X			X			**2**
M23	X			X		X			X			X			X		X					X	**1**
M24	X			X			X		X			X				X	X					X	**1**
M25	X		X			X			X			X			X			X				X	**0**
Total	**24**	**1**	**17**	**8**	**2**	**22**	**1**	**0**	**25**	**0**	**1**	**24**	**0**	**1**	**23**	**1**	**13**	**12**	**0**	**4**	**17**	**4**	**21**

O quadro a seguir apresenta os resultados obtidos com o questionário aplicado a 29 participantes da pesquisa, que já haviam concluído pelo menos o nível superior em pelo menos um curso de graduação. As áreas de formação são as seguintes: Administração (**6**), Ciências Contábeis (**3**), Direito (**1**), Economia (**2**), Física (**2**), Fonoaudiologia (**1**), Geografia (**1**), História (**1**), Informática (**1**), Língua Portuguesa e Língua Estrangeira (**4**), Matemática (**2**), Medicina Veterinária (**1**), Pedagogia (**1**), Química (**2**) e Sociologia (**1**). Três participantes possuíam mais de um curso de graduação e, nesse caso, foi contado o que mais se relaciona com a matemática financeira. Os participantes possuíam: graduação (**12**), especialização (**8**), mestrado (**8**) e doutorado (**1**). Os participantes desse nível são representados no quadro pelos códigos **G1**, **G2**, **G3**,..., **G29**. As demais informações a respeito do preenchimento deste são as mesmas do quadro anterior.

As duas perguntas foram as seguintes:

1ª pergunta: Durante a sua graduação você cursou a disciplina matemática financeira?
( ) SIM ( ) NÃO

2ª pergunta: Você já tomou algum empréstimo (pessoal, CDC, consignação em folha, etc) alguma vez na sua vida?
( ) SIM ( ) NÃO

As seis questões foram as mesmas já apresentadas anteriormente na pesquisa do ensino médio.

Quadro 20 Resumo dos Resultados da Pesquisa do Ensino Superior

	Perguntas				Questões																		Total
	1ª		2ª		1			2			3			4			5			6			de
	S	N	S	N	A	E	B	A	E	B	A	E	B	A	E	B	A	E	B	A	E	B	Acertos
G1	X		X		X			X				X		X			X			X			5
G2		X		X		X			X			X			X			X			X		0
G3	X		X		X				X		X			X				X			X		3
G4		X	X		X			X			X					X		X			X		3
G5		X		X		X			X			X			X		X					X	1
G6		X	X			X			X			X			X			X			X		0
G7		X	X			X			X			X			X			X			X		0
G8	X		X			X			X			X			X			X			X		0
G9		X	X			X		X				X			X			X		X			2
G10	X		X		X			X			X			X			X				X		5
G11	X			X		X			X			X			X			X				X	0
G12		X		X		X			X			X			X			X			X		0
G13	X			X		X			X			X			X			X			X		0
G14	X		X		X				X			X			X			X			X		1
G15	X			X	X			X			X			X			X				X		5
G16		X		X		X		X				X			X		X			X			3
G17		X	X		X			X			X				X			X			X		3
G18		X		X	X				X			X			X			X			X		1
G19		X		X		X			X			X			X		X				X		1
G20		X		X	X			X				X			X		X				X		3
G21	X		X		X			X			X				X		X			X			5
G22		X		X		X			X			X			X			X				X	0
G23	X			X	X			X			X			X				X			X		4
G24		X	X			X			X			X			X			X			X		0
G25	X		X				X			X		X			X		X					X	1
G26		X		X	X				X			X			X		X			X			3
G27		X		X			X			X		X				X			X			X	0
G28		X	X				X			X			X			X		X				X	0
G29	X		X		X			X			X				X			X		X			4
Total	12	17	15	14	13	13	3	11	15	3	8	20	1	5	21	3	10	18	1	6	17	6	53

4.1 Análises das Respostas das Duas Perguntas feitas aos Participantes do Ensino Médio

1ª pergunta: Durante o ensino fundamental ou médio você estudou progressão geométrica e/ou juros compostos?

( ) SIM ( ) NÃO

Com essa pergunta procura-se saber se o participante já teve contato prévio com conceitos importantes para o entendimento das questões apresentadas no questionário.

Quadro 21 Desempenho dos 24 participantes que responderam sim à 1ª pergunta

Questão	Número de participantes que		
	acertou	errou	deixou em branco
1	2	21	1
2	0	24	0
3	1	23	0
4	1	22	1
5	13	11	0
6	4	16	4

Dos 25 participantes, 24 haviam tido aulas de progressão geométrica e/ou juros compostos. Tal proporção sugeriria, logicamente, menos dificuldades para o entendimento do enunciado das questões e, possivelmente, de suas resoluções. Tal fato não se comprovou, pois os percentuais de acertos entre esses 24 participantes que não deixaram em branco a questão foram: aproximadamente **8,7%** (2 de 23) na 1ª, exatamente **0%** (0 de 24) na 2ª, aproximadamente **4,2%** (1 de 24) na 3ª, aproximadamente **4,3%** (1 de 23) na 4ª, aproximadamente **54,2%** (13 de 24) na 5ª e, exatamente **20%** (4 de 20) na 6ª.

Essas dificuldades estão diretamente relacionadas ao desconhecimento, como será visto detalhadamente mais adiante, do princípio básico de que os juros incidem apenas sobre o saldo devedor que resta imediatamente ao pagarmos cada prestação, o que faz os alunos não perceberem a base de cálculo sobre a qual se deve calcular os juros.

Sendo assim, preliminarmente, observa-se uma desvinculação entre os conteúdos expostos em sala de aula e a aplicação prática desses conteúdos no cotidiano.

Sugere-se que tal princípio básico não é ressaltado no ensino do sistema de juros compostos e que, muito provavelmente, os alunos não percebem que neste sistema de juros, os valores acumulados a cada período de tempo formam uma progressão geométrica, como foi visto no capítulo 3.

Observa-se no quadro 19 que o único participante que respondeu não a essa pergunta não acertou nenhuma das 6 questões propostas.

2ª pergunta: Você sabe se pelo menos um de seus pais ou responsáveis já tomou algum empréstimo (pessoal, CDC, consignação em folha, etc) alguma vez?

( ) SIM ( ) NÃO

Com essa pergunta busca-se saber se o participante tem conhecimento de que alguém da sua família, e muito próximo a ele, já tenha contraído algum empréstimo, o que também inclui algum financiamento de um bem móvel ou imóvel, pois num financiamento, direta ou indiretamente, está sendo feito um empréstimo. Porém, não se sabe se os participantes levaram em consideração esse fato, pois a pergunta só se referia a empréstimo.

Dos 25 participantes, 17 responderam sim a essa pergunta, o que não significa que os outros 8 não tenham familiares próximos que tenham adquirido algum empréstimo, e sim, que apenas não tenham conhecimento do fato. Observa-se que **68%** (17 de 25) dos participantes têm conhecimento de tal fato, o que mostra a relevância do assunto financeiro, não só para a pessoa que adquiriu o empréstimo, mas para todos os integrantes da família. Numa sociedade, que é o caso do Brasil, em que as estatísticas apontam um alto grau de endividamento das famílias, faz-se necessário que esses assuntos sejam ensinados de forma mais abrangente para possibilitar um melhor entendimento, a fim de que as pessoas tenham condições de tomar decisões mais conscientes envolvendo suas dívidas e, até mesmo, a possibilidade de fazer a portabilidade destas, ou seja, a transferência de suas dívidas de uma instituição financeira para outra - um assunto muito comentado atualmente no nosso país.

4.2 Análises das Respostas das Duas Perguntas feitas aos Participantes do Ensino Superior

1ª pergunta: Durante a sua graduação você cursou a disciplina matemática financeira?

( ) SIM ( ) NÃO

Com essa pergunta procura-se saber se o participante teve contato prévio com a disciplina matemática financeira no nível superior, o que facilitaria o entendimento das questões apresentadas no questionário e suas respectivas resoluções.

Quadro 22 Desempenho dos 12 participantes que estudaram matemática financeira

Questão	Número de participantes que		
	acertou	errou	deixou em branco
1	8	3	1
2	6	5	1
3	6	6	0
4	5	7	0
5	5	7	0
6	3	7	2

Dos 29 participantes, 12 haviam estudado tal disciplina na sua graduação. Os percentuais de acertos entre os que estudaram matemática financeira e não deixaram a questão em branco foram: aproximadamente **73%** (8 de 11) na 1ª, aproximadamente **55%** (6 de 11) na 2ª, exatamente **50%** (6 de 12) na 3ª, aproximadamente **42%** (5 de 12) na 4ª e na 5ª e, exatamente **30%** (3 de 10) na 6ª.

Quadro 23 Desempenho dos 17 participantes que não estudaram matemática financeira

Questão	Número de participantes que		
	acertou	errou	deixou em branco
1	5	10	2
2	5	10	2
3	2	14	1
4	0	14	3
5	5	11	1
6	3	10	4

Dos 29 participantes, 17 não haviam estudado tal disciplina na sua graduação. Os percentuais de acertos entre os que não estudaram matemática financeira e não deixou em branco a questão foram: aproximadamente **33%** (5 de 15) na 1ª e na 2ª, exatamente **12,5%** (2 de 16) na 3ª, exatamente **0%** (0 de 14) na 4ª, aproximadamente **31%** (5 de 16) na 5ª e aproximadamente **23%** (3 de 13) na 6ª.

Há diferenças significativas de acertos nas questões 1, 3 e 4 entre os que estudaram e os que não estudaram matemática financeira em sua graduação e não deixaram a questão em branco, o que sugere que o fato de ter estudado a disciplina contribuiu para um melhor desempenho em relação ao fato de não ter estudado. Essas são as questões que mais necessitam do conhecimento do princípio básico estudado no capítulo 3. Essa diferença de acertos não é tão significativa na questão 2. Nas questões 5 e 6 observa-se que essa diferença é ainda menor, o que pode ser devido ao fato de essas questões serem ainda mais presentes em nosso cotidiano do que as outras. Nota-se também que, para entendê-las e resolvê-las, conta muito a experiência da pessoa e não apenas o fato de ter estudado ou não matemática financeira.

2ª pergunta: Você já tomou algum empréstimo (pessoal, CDC, consignação em folha, etc) alguma vez na sua vida?

( ) SIM ( ) NÃO

Com essa pergunta procura-se saber se o participante **j**á efetuou algum empréstimo em sua vida, o que também inclui algum financiamento de um bem móvel ou imóvel, pois num financiamento, direta ou indiretamente, está sendo feito um empréstimo. Porém, não se sabe se os participantes levaram em consideração esse fato, pois a pergunta só se referia a empréstimo.

Quadro 24 Desempenho dos 15 participantes que já adquiriram empréstimo

Questão	Número de participantes que		
	acertou	errou	deixou em branco
1	8	5	2
2	7	6	2
3	6	8	1
4	3	10	2
5	4	11	0
6	4	9	2

Dos 29 participantes, 15 já haviam feito algum empréstimo em sua vida. Observa-se que **mais de 50%** (15 de 29) dos participantes já adquiriram algum empréstimo, o que mostra a relevância que o assunto financeiro tem na vida das pessoas.

Observa-se no quadro 24 que, entre os que efetuaram empréstimo, houve mais acertos do que erros nas duas primeiras questões e nas demais, mais erros do que acertos.

Quadro 25 14 participantes que não adquiriram empréstimo

Questão	Número de participantes que		
	acertou	errou	deixou em branco
1	5	8	1
2	4	9	1
3	2	12	0
4	2	11	1
5	6	7	1
6	2	8	4

Observa-se no quadro 25 que, entre os que não efetuaram empréstimo, houve mais erros do que acertos em todas as questões, sendo que nas 3ª, 4ª e 6ª questões foram grandes as diferenças entre erros e acertos. Mas, essas diferenças podem ser devidas mais ao fato de não ter estudado matemática financeira do que ao fato de ter adquirido ou não empréstimos.

Um fato curioso é que entre os 12 participantes que estudaram matemática financeira: 8 adquiriram empréstimo e 4 não adquiriram. Entre os 17 que não estudaram, foram 7 e 10, respectivamente. Ou seja, entre os 15 participantes que adquiriram: 8 estudaram e 7 não estudaram e entre os 14 que não adquiriram foram 4 e 10, respectivamente. Esse fato pode dar a impressão que há relação entre as respostas obtidas nas duas perguntas, mas não se pode afirmar nada, pois as perguntas não têm uma ordem cronológica, podendo ter ocorrido de um participante ter estudado para depois efetuar o empréstimo e o contrário com outro.

4.3 Análises das Respostas das Seis Questões aplicadas aos Participantes do Ensino Médio e do Ensino Superior

Observando os quadros 22 e 23, pode-se construir os quadros 26 e 27 a seguir:

Quadro 26 Distribuição dos participantes do ensino superior que acertaram as questões

Questão	número de participantes que acertou e	
	estudou matemática financeira	não estudou matemática financeira
1	8	5
2	6	5
3	6	2
4	5	0
5	5	5
6	3	3

Os percentuais dos participantes que estudaram matemática financeira entre os que acertaram cada uma das questões são: aproximadamente **62%** (8 de 13) na 1ª, aproximadamente **55%** (6 de 11) na 2ª, exatamente **75%** (6 de 8) na 3ª, exatamente 10**0%** (5 de 5) na 4ª, exatamente **50%** (5 de 10) na 5ª e exatamente **50%** (3 de 6) na 6ª.

Esses percentuais nos mostram um melhor desempenho, dos participantes que estudaram em relação aos que não estudaram matemática financeira, nas questões 1, 2, 3 e 4 e um igual desempenho nas questões 5 e 6.

Quadro 27 Distribuição dos participantes do ensino superior que erraram as questões

Questão	número de participantes que errou e	
	estudou matemática financeira	não estudou matemática financeira
1	3	10
2	5	10
3	6	14
4	7	14
5	7	11
6	7	10

Os percentuais dos participantes que não estudaram matemática financeira entre os que erraram cada uma das questões são: aproximadamente **77%** (10 de 13) na 1ª, aproximadamente **67%** (10 de 15) na 2ª, exatamente **70%** (14 de 20) na 3ª, aproximadamente **67%** (14 de 21) na 4ª, aproximadamente **61%** (11 de 18) na 5ª e aproximadamente **59%** (10 de 17) na 6ª.

Esses percentuais nos mostram um pior desempenho, dos participantes que não estudaram em relação aos que estudaram matemática financeira, em todas as questões.

Questão 1

Uma loja vende por crediário com uma taxa de juros mensal de 20%. Uma certa mercadoria, cujo preço à vista é R$ 780,00, será vendida a prazo de acordo com o seguinte plano de pagamento : R$ 220,00 de entrada, uma prestação de R$ 412,00 a ser paga 1 mês após a entrada e outra de R$ 312,00 a ser paga 2 meses após a entrada. Essa loja está obedecendo as normas da matemática financeira?

Resolução Correta:

A **dívida não quitada** no ato da compra, ou seja, a **diferença** entre o **verdadeiro preço à vista** e a **entrada dada** é chamada de **saldo devedor** após o pagamento da entrada (1ª prestação). Dessa forma:

- Subtraindo a entrada dada do valor à vista, obtém-se o saldo devedor inicial de **R$780,00 - R$220,00** = **R$560,00;**
- Acrescentando juros de 20% ao saldo devedor**,** obtém-se: R$560,00 + 20% de R$560,00 = **R$672,00;**
- Subtraindo de R$672,00 o valor da 2ª prestação, obtém-se o novo saldo devedor de R$672,00– **R$412,00** = **R$260,00;**
- Acrescentando juros de 20% a esse saldo devedor atualizado**,** obtém-se: R$260,00 + 20% de R$260,00 = **R$312,00;**
- Subtraindo de R$312,00 o valor da 3ª prestação, obtém-se: R$312,00 – **R$312,00** = R$**0,00**.

Assim, imediatamente após o pagamento da 3ª prestação, **zerou o saldo devedor**, o que mostra que a loja está obedecendo as normas da matemática financeira.

Comentários:

Essa questão versa sobre um financiamento que, propositalmente, foi apresentado em parcelas diferentes. Não é usual essa situação, mas é útil para o entendimento do princípio básico citado anteriormente. Apesar da pergunta dessa questão ter ficado um pouco vaga para os participantes do ensino médio, foi explicado para eles que o significado de obedecerem as normas da matemática financeira era o mesmo que, se na situação descrita, as prestações eram **suficientes** para quitar o valor à vista do bem, ou seja, zerar o saldo devedor.

Como pode ser observado no quadro 19**,** 2 acertaram a questão, 22 a erraram e 1 a deixou em branco. Assim, apenas aproximadamente **8,3%** (2 de 24) dos que tentaram resolver a questão a acertaram, o que mostra o desconhecimento por parte dos participantes do ensino médio, como comentado na 1ª pergunta, do princípio básico de que os juros incidem apenas sobre o saldo devedor.

Como pode ser observado no quadro 20**,** 13 acertaram a questão, 13 a erraram e 3 a deixaram em branco, ou seja, **50%** (13 de 26) dos que tentaram resolver a questão a acertaram, o que mostra um desconhecimento parcial por parte dos participantes do ensino superior do princípio básico citado.

Como já visto anteriormente, o percentual de acertos, entre os graduados que não estudaram matemática financeira e tentaram resolver essa questão, foi de aproximadamente **33%** (5 de 15), que é bem menor do que os aproximadamente **73%** (8 de 11) de acertos entre os que estudaram matemática financeira e tentaram resolvê-la, mas é bem maior dos que os aproximadamente **8,3%** (2 de 24) de acertos entre os participantes do ensino médio que também tentaram.

A diferença de desempenho observada entre os 33% e os 8,3% provavelmente é devida ao fato de contar muito, para o entendimento e resolução da questão, a experiência da pessoa e não apenas o fato de ter estudado ou não matemática financeira. Já a diferença observada entre os 73% e os 33%, como já visto, sugere que o fato de ter estudado a disciplina contribuiu para um melhor desempenho em relação ao fato de não ter estudado.

- **Erro mais comum na questão 1 entre os participantes do ensino médio e do ensino superior:**

Muitos participantes perceberam que o juro só deveria ser calculado sobre o saldo devedor R$780,00 – R$220,00 = R$560,00, mas se perderam na resolução a partir daí.

O erro mais comum foi concluir que as prestações deveriam ser **R$220,00**, **R$336,00** e **R$392,00**, respectivamente, fazendo:

- a entrada de R$220,00 como a primeira prestação;
- dividir o saldo devedor em 2 parcelas iguais, ou seja, R$560,00/2 = R$280,00;
- acrescentar juros de 20% em R$280,00, encontrando R$336,00 para a segunda prestação.
- acrescentar juros de 40% (juros simples de 20% ao mês durante 2 meses)em R$280,00, encontrando R$392,00 para a terceira prestação.

Um fato curioso - um participante discordou afirmando que loja está desobedecendo as normas da matemática financeira, pois as prestações deveriam ser **R$220,00**, **R$336,00** (R$280,00 + 20% de R$280,00) e **R$403,20** (R$280,00 + juros compostos de 20% ao mês durante 2 meses), respectivamente. Porém, essas prestações, assim como as apresentadas na questão, são **suficientes,** mas **não necessárias** para zerar o saldo devedor, o que não faz a loja e nem a solução do participante desobedecer as normas da matemática financeira. Pode-se encontrar outra solução qualquer, que seja dada uma entrada de R$220,00, dividindo o saldo devedor (R$560,00) em duas partes quaisquer, por exemplo, R$560,00 = R$300,00+R$260,00, e aplicando juros de 20% a.m. sobre uma delas e juros compostos de 20% ao mês durante 2 meses sobre a outra. Assim, por exemplo, **R$220,00**, **R$360,00**

(R$300,00 + 20% de R$300,00) e **R$374,40** (R$260,00 + juros compostos de 20% ao mês durante 2 meses), respectivamente, também são suficientes para zerar o saldo devedor.

Questão 2

Uma loja vende seus artigos com pagamento em duas prestações iguais, “sem juros“. A primeira prestação é paga no ato da compra e a segunda, um mês após. Entretanto, um desconto de 25% é concedido se o cliente pagar à vista. Na realidade, essa loja cobra, nas vendas a prazo, juros mensais de taxa igual a:

a) 12,5% b) 25% c) 50% d) 75% e) 100%

Resolução Correta:

- Observa-se que a frase “sem juros” aparece entre aspas, o que já indica que isso não é a realidade da situação descrita. O verdadeiro preço é aquele que tem 25% de desconto, independentemente do preço de um artigo nessa loja. Assim, por exemplo, se um artigo custa R$100,00 para pagamento em duas prestações de **R$50,00**, o cliente que comprar à vista só pagará **R$75,00**. Mas, como a primeira prestação é paga no ato da compra, se esse cliente tivesse os R$75,00 para comprar à vista e optasse por pagar em duas vezes de **R$50,00**, após a entrada ficaria com **R$75,00-R$50,00=R$25,00** para pagar daí a um mês a segunda parcela de **R$50,00**.

Portanto, a loja está cobrando **100% de juros em apenas um mês**, pois a dívida não quitada no ato da compra (**R$25,00**) **dobrou** após um mês (**R$50,00**).

Comentários:

Essa questão versa sobre um financiamento que apresenta uma técnica muito utilizada no comércio - cobrar juros abusivos sem a devida compreensão por parte dos compradores. Ela mostra-nos uma **maneira disfarçada de cobrar 100% de juros**, em apenas um mês, dos clientes poucos familiarizados com cálculos simples envolvendo financiamentos. Isso se deve ao fato de os clientes, na maioria das vezes, não conhecer o **princípio básico** comentado na 1ª questão.

Como pode ser observado no quadro 19**,** nenhum participante acertou a questão e nenhum a deixou em branco, ou seja, os 25 tentaram resolvê-la e cometeram erros nessas tentativas. Assim, **0%** (0 de 25) dos que tentaram resolver a questão a acertou, o que mostra mais uma vez o desconhecimento, por parte dos participantes do ensino médio, do princípio básico já citado.

Como pode ser observado no quadro 20**,** 11 acertaram a questão, 15 a erraram e 3 a deixaram em branco, ou seja, aproximadamente **42%** (11 de 26) dos que tentaram resolver a questão a acertaram, o que mostra mais uma vez o desconhecimento parcial, por parte dos participantes do ensino superior, do princípio básico citado.

Como já visto anteriormente, o percentual de acertos, entre os graduados que não estudaram matemática financeira e tentaram resolver essa questão, foi de aproximadamente **33%** (5 de 15), que é menor do que os aproximadamente **55%** (6 de 11) de acertos entre os que estudaram matemática financeira e tentaram resolvê-la, mas é bem maior dos que os **0%** de acertos entre os participantes do ensino médio que também tentaram.

A diferença de desempenho observada entre os 33% e os 0%, provavelmente, também é devida ao fato de contar muito, para o entendimento e resolução da questão, a experiência da pessoa e não apenas o fato de ter estudado ou não matemática financeira. Já a diferença observada entre os 55% e os 33%, como já visto, sugere que o fato de ter estudado a disciplina contribuiu para um melhor desempenho em relação ao fato de não ter estudado.

- **Erro mais comum na questão 2 entre os participantes do ensino médio e do ensino superior:**

O erro mais comum foi concluir que, na realidade, essa loja cobra, nas vendas a prazo, juros mensais de taxa igual a 25%. Fazendo:

- Como é dado, se o cliente pagar à vista, um desconto de 25%, tem-se $\frac{25\%}{2} = 12{,}5\%$ de juros por mês, pois são duas prestações. Observação: esse erro foi cometido por **17** dos 54 participantes.

Questão 3

Uma geladeira custa à vista R$ 720,00, mas pode ser paga em duas prestações iguais, uma no ato da compra e outra após 30 dias, sabendo-se que a taxa de financiamento é de 25% ao mês sobre o saldo devedor. Determinando o valor dessas prestações, encontramos:

a) R$ 400,00 b) R$ 405,00 c) R$ 425,00 d) R$ 450,00 e) R$ 500,00

Resolução Correta:

A resposta correta dessa questão é **R$400,00**, pois:

- Como o preço à vista da geladeira é de **R$720,00** e a entrada (1ª prestação) é de **R$400,00**, o saldo devedor após pagar a entrada é de **R$720,00 – R$400,00** = **R$320,00**. É justo que a loja cobre 25% de juros sobre R$320,00 (25% de R$320,00 = R$80,00). Sendo assim, o saldo devedor 1 mês após a compra e antes do pagamento da 2ª prestação é de R$320,00 + R$80,00 = **R$400,00**.
- Como a 2ª prestação também é de **R$400,00**, o saldo devedor após pagá-la é de R$400,00-**R$400,00=R$0,00**.

Portanto, **é justo** que o valor das prestações seja **R$400,00**, pois imediatamente após o pagamento da 2ª prestação **o saldo devedor zerou**.

Caso o estudante compreenda o processo acima, que nos mostra que de fato o valor das prestações deve ser **R$400,00**, pois o juro só pode incidir sobre o saldo devedor, ele não teria grande dificuldade de fazer uma resolução algébrica para essa questão, por exemplo:

- 1ª prestação (**entrada**): **x** reais

Como o preço à vista é de **R$720,00** e foi dada uma entrada de **x** reais, o saldo devedor é (**720 –x**) reais.

Calculando 25% de juros sobre esse saldo devedor, obtém-se:

- 2ª prestação: $\mathbf{(720 - x) + 25\%\ de\ (720 - x) = 1{,}25\ .\ (720 - x) = 900 - 1{,}25x.}$

Como as prestações devem ser iguais, tem-se: $\mathbf{x = 900 - 1{,}25x \Rightarrow x = \frac{900}{2{,}25} = 400}$.

Portanto, o valor das duas prestações é de **R$400,00**.

A resolução apresentada acima se torna muito trabalhosa quando são 3 ou mais prestações. Assim, para quem desejar se aprofundar um pouco mais no assunto, outras resoluções são apresentadas no apêndice J.

Comentários:

Essa questão versa sobre um financiamento que apresenta, em relação às questões anteriores, maior grau de dificuldade para a sua resolução, visto que aqui se deseja encontrar o valor das prestações. As opções de (**a**) a (**e**) foram incluídas para dar ao participante a possibilidade de descobrir a resposta correta por tentativa, caso ele conhecesse o **princípio básico** já comentado em questões anteriores.

Como pode ser observado no quadro 19**,** nenhum participante deixou essa questão em branco e apenas um a acertou, resolvendo algebricamente, ou seja, 24 tentaram resolvê-la e cometeram erros nessas tentativas. Assim, exatamente **4%** (1 de 25) dos que tentaram resolver a questão a acertaram, o que mostra mais uma vez o desconhecimento, por parte dos participantes do ensino médio, do princípio básico já citado.

Como pode ser observado no quadro 20, 8 acertaram a questão, 20 a erraram e 1 a deixou em branco, ou seja, aproximadamente **29%** (8 de 28) dos que tentaram resolver a questão a acertaram, o que mostra mais uma vez o desconhecimento parcial, por parte dos participantes do ensino superior, do princípio básico citado.

Como já visto anteriormente, o percentual de acertos, entre os graduados que não estudaram matemática financeira e tentaram resolver essa questão, foi de **12,5%** (2 de 16), que é menor do que os **50%** (6 de 12) de acertos entre os que estudaram matemática financeira e tentaram resolvê-la, mas é maior dos que os **4%** de acertos entre os participantes do ensino médio que também tentaram.

A pequena diferença de desempenho observada entre os 12,5% e os 4%, provavelmente, também é devida ao fato de contar, para o entendimento e resolução da questão, a experiência da pessoa e não apenas o fato de ter estudado ou não matemática financeira. Já a diferença observada entre os 50% e os 12,5%, como já visto, sugere que o fato de ter estudado a disciplina contribuiu para um melhor desempenho em relação ao fato de não ter estudado.

- **Erros mais comuns na questão 3 entre os participantes do ensino médio e do ensino superior:**

(1º) Acrescentar 25% em R$720,00 e, em seguida, dividir por 2, pois são duas prestações iguais. Assim, (R$720,00 + 25% de R$720,00) / 2 = R$900,00 / 2 = **R$450,00**. Esse processo é equivalente a dividir primeiro por 2 e depois acrescentar 25% (R$360,00 + 25% de R$360,00 = **R$450,00**). Observação: esse erro foi cometido por **28** dos 54 participantes.

(2º) Dividir por 2 (R$720,00 / 2 = R$360,00) e acrescentar 25% sobre uma dessas metades (R$360,00 + 25% de R$360,00 = R$450,00) e, em seguida, fazer a média aritmética entre R$360,00 e R$450,00. Assim, (R$360,00 + R$450,00) / 2 = R$810,00 / 2 = **R$405,00**. Observação: esse erro foi cometido por **16** dos 54 participantes.

Questão 4

Um comerciante deseja vender um produto que custa à vista R$ 210,00 em duas parcelas iguais, sendo a primeira um mês após a compra e a segunda um mês após a primeira. Se os juros mensais (juros compostos) são de 10% ao mês, calculando o valor de cada parcela, encontramos:

a) R$ 109,56 b) R$ 110,00 c) R$ 121,00 d) R$126,00 e) R$ 127,05

(Adaptada do vestibular da UFRRJ de 1998 – 2º semestre)

Resolução Correta:

A resposta correta dessa questão é **R$121,00**, pois:

- Como não foi dada nenhuma entrada, iniciamos calculando R$210,00 + 10% de R$210,00 = R$231,00 (saldo devedor 1 mês após a compra e antes do pagamento da 1ª prestação). Ao pagar a 1ª prestação de **R$121,00** o saldo devedor reduz para R$231,00 – R$121,00 = **R$110,00**. É justo que a loja cobre 10% de juros sobre R$110,00 (10% de R$110,00 = R$11,00). Sendo assim, o saldo devedor 2 meses após a compra e antes do pagamento da 2ª prestação é de R$110,00 + R$11,00 = **R$121,00**.
- Como a 2ª prestação também é de **R$121,00**, o saldo devedor após pagá-la é de R$121,00-R$121,00=**R$0,00**.

Portanto, **é justo** que o valor das prestações seja **R$121,00**, pois imediatamente após o pagamento da 2ª prestação **o saldo devedor zerou**.

Caso o estudante compreenda o processo acima, que nos mostra que de fato o valor das prestações deve ser **R$121,00**, pois o juro só pode incidir sobre o saldo devedor, ele não teria grande dificuldade de fazer uma resolução algébrica para essa questão, por exemplo:

- <u>1ª prestação</u> (**um mês após a compra**): **x** reais

Como o preço à vista é de **R$210,00** e não foi dada uma entrada, tem-se que o saldo devedor após pagar a 1ª prestação é (**210+10% de 210 – x**) reais, ou seja, (**231 – x)** reais.

Calculando 10% de juros sobre esse saldo devedor, obtém-se:

- <u>2ª prestação</u>: **(231 – x) + 10% de (231 – x) = 1,1 . (231 – x) = 254,1 – 1,1x.**
- Como as prestações são iguais, tem-se: $\mathbf{x = 254{,}1 - 1{,}1x \Rightarrow x = \frac{254{,}1}{2{,}1} = 121}$.

Portanto, o valor das duas prestações é de **R$121,00**.

A resolução apresentada acima se torna muito trabalhosa quando são 3 ou mais prestações. Assim, para quem desejar se aprofundar um pouco mais no assunto, outras resoluções são apresentadas no apêndice J.

Comentários:

Essa questão versa sobre um financiamento que apresenta, em relação à questão 3, uma única diferença estrutural, que é o fato de não ter sido dada uma entrada, As opções de (**a**) a (**e**) foram incluídas para dar ao participante a possibilidade de descobrir a resposta correta por tentativa, caso ele conhecesse o **princípio básico** já comentado em questões anteriores.

Como pode ser observado no quadro 19**,** apenas um participante deixou essa questão em branco e o único que a acertou, resolvendo algebricamente, foi o único que também acertou a questão 3, ou seja, 23 tentaram resolvê-la e cometeram erros nessas tentativas. Assim, aproximadamente **4,2%** (1 de 24) dos que tentaram resolver a questão a acertaram, o que mostra mais uma vez o desconhecimento, por parte dos participantes do ensino médio, do princípio básico já citado.

Uma observação curiosa aqui é o fato de um mesmo e único participante ter acertado as 3ª e 4ª questões e ter errado as 1ª e 2ª, mas, ao olhar o questionário deste, foi observado um erro apenas nos cálculos na 1ª questão. Na 2ª questão o erro foi ao tentar generalizar.

Como pode ser observado no quadro 20, 5 acertaram a questão, 21 a erraram e 3 a deixaram em branco, ou seja, aproximadamente **19%** (5 de 26) dos que tentaram resolver a questão a acertaram, o que mostra mais uma vez o desconhecimento parcial, por parte dos participantes do ensino superior, do princípio básico citado.

Como já visto anteriormente, o percentual de acertos, entre os graduados que não estudaram matemática financeira e tentaram resolver essa questão, foi de **0%**, que é menor do que os aproximadamente **42%** (5 de 12) de acertos entre os que estudaram matemática financeira e tentaram resolvê-la e também menor dos que os **4,2%** de acertos entre os participantes do ensino médio que também tentaram.

A pequena diferença observada entre os 4,2% e os 0%, provavelmente, foi aleatória e devida a um talento individual por parte do único participante do ensino médio que acertou. Já a diferença observada entre os 42% e o 0%, como já visto, sugere que o fato de ter estudado a disciplina contribuiu para um melhor desempenho em relação ao fato de não ter estudado.

- **Erros mais comuns na questão 4 entre os participantes do ensino médio e do ensino superior:**

(1º) Dividir R\$210,00 por 2, encontrando R\$105,00 e, em seguida, acrescentar 10% a R\$105,00 (R\$105,00 + 10% de R\$105,00 = R\$115,50). Finalmente, acrescentar 10% a R\$115,50 (R\$115,50 + 10% de R\$115,50 = **R\$127,05**). Esse processo é equivalente a calcular R\$210,00 + juros compostos de 10% a.m. durante 2 meses e, em seguida, dividir por 2. Assim, (R\$210,00 . $1{,}1^2$) / 2 = **R\$ 127,05**. Observação: esse erro foi cometido por **27** dos 54 participantes.

(2º) Calcular a média aritmética entre os valores encontrados anteriormente (R\$115,50 e R\$127,05). Assim, (R\$115,50 + R\$127,05) /2 = R\$ 242,55 / 2 = R\$ 121,275 que é, por coincidência, aproximadamente igual à resposta correta (**R\$121,00**). Observação: esse erro foi cometido por **7** dos 54 participantes.

Questão 5

"Os fabricantes de papel higiênico reduziram de 40m para 30m os rolos de algumas marcas, sem diminuição de preços. Ou seja, o consumidor está pagando 25% a mais pelo produto"

(Revista Veja, 15/08/01).

Você concorda com o percentual apresentado acima? Justifique.

Resolução Correta:

Como já visto no capítulo I, o responsável pela redação desse texto da revista veja provavelmente raciocinou que o consumidor está perdendo **10m**, o que corresponde a **25%** de **40m**, concluindo que **"o consumidor está pagando 25% a mais pelo produto".** Na verdade, o consumidor **está levando para casa 25% a menos do produto**. Houve um engano na escolha da **base de cálculo (100%)**, pois para saber o percentual que o consumidor está pagando a mais pelo produto ele deveria escolher **30m** sendo a base de cálculo, ou seja, ele deveria calcular o percentual que **10m** corresponde de **30m**, que nos fornece **33,333...%**, ou seja, aproximadamente **33,33%**. Por exemplo, se um rolo de 40m custa 40 centavos, então cada metro custa **1** centavo. Como os rolos foram diminuídos para 30m e continuaram custando 40 centavos, tem-se que cada metro passou a custar **1,333...**centavo, ou seja, aproximadamente **33,33% a mais**.

Portanto, o percentual apresentado na questão está errado, sendo de aproximadamente **33,33%** o percentual correto.

Comentários:

Alguns participantes questionaram que o consumidor não está pagando nem a mais e nem a menos pelo produto, pois não houve aumento e nem diminuição de preços. Porém, subentende-se que o percentual a que o texto da revista se refere é o **percentual relativo** à nova situação, que é equivalente ao valor pago depois da diminuição em relação ao valor pago antes da diminuição, por metro do produto.

Como pode ser observado no quadro 19, nenhum participante deixou essa questão em branco e 13 a acertaram (sendo que a maioria resolveu usando o conceito de proporção), ou seja, 12 tentaram resolvê-la e cometeram erros nessas tentativas. Assim, exatamente **52%** (13 de 25) dos que tentaram resolver a questão a acertaram, o que mostra que 48% dos participantes do ensino médio têm dificuldade de identificar a base de cálculo, que de certa forma tem relação com a dificuldade de perceber o fato de que os juros incidem sobre o saldo devedor.

Como pode ser observado no quadro 20, 10 acertaram a questão, 18 a erraram e 1 a deixou em branco, ou seja, aproximadamente **36%** (10 de 28) dos que tentaram resolver a questão a acertaram, o que mostra que 64% dos participantes da pesquisa do ensino superior, têm dificuldade de identificar a base de cálculo, que de certa forma tem relação com a dificuldade de perceber o fato de que os juros incidem sobre o saldo devedor.

Como já visto anteriormente, o percentual de acertos, entre os graduados que não estudaram matemática financeira e tentaram resolver essa questão, foi de aproximadamente **31%** (5 de 16), que é menor do que os aproximadamente **42%** (5 de 12) de acertos entre os que estudaram matemática financeira e tentaram resolvê-la e também menor dos que os **52%** de acertos entre os participantes do ensino médio que também tentaram.

A pequena diferença observada entre os 42% e os 31%, sugere que o fato de ter estudado a disciplina pouco contribuiu para um melhor desempenho em relação ao fato de não ter estudado. Já as diferenças observadas entre os 52% e os 31%, ou entre os 52% e os 42%, mostram que os participantes do ensino médio tiveram uma maior percepção do erro da revista do que os do ensino superior. Isso pode ser devido ao fato dos participantes do ensino superior terem dado mais crédito à revista do que os do ensino médio.

• **Erro mais comum na questão 5 entre os participantes do ensino médio e do ensino superior:**

Nessa questão, o erro mais comum foi concordar que a revista estava certa, ou seja, o consumidor está perdendo **10m**, o que corresponde a **25%** de **40m**, concluindo que **"o consumidor está pagando 25% a mais pelo produto"**. Observação: esse erro foi cometido por **29** dos 54 participantes.

Questão 6

(Trecho extraído da Revista Veja de 5/10/2011 - página 85)

(...) em 1989, chegou a produzir uma inflação anual de 1973%. O recorde mensal seria batido em março do ano seguinte, quando a taxa alcançou **82%**. (...). **Uma nota de 100 valia menos de 20 no fim do mês**. (...)

Existe um erro na conclusão do enunciado acima. Qual seria o verdadeiro valor de uma nota de R$ 100,00 (recebida no início de março) no fim do mês de março?

Resolução Correta:

Desconsiderando-se os erros comentados a seguir, o responsável pela redação desse texto da revista veja provavelmente raciocinou que - se a inflação no mês de março de 1990 foi de 82%, então uma nota de 100 passou a valer 100 – 82% de 100, ou seja, 100 – 82 = **18**, concluindo que "**uma nota de 100 valia menos de 20 no fim do mês"**. Mais uma vez houve um engano na escolha da **base de cálculo (100%)**, pois para saber quanto uma nota de 100 valia no final do mês de março em relação ao início desse mês, ele deveria calcular quanto vale 100 em relação a 100 + 82% de 100, ou seja, qual é o percentual que representa 100 em relação a 182, o que é aproximadamente **54,95%**.

Portanto, **uma nota de 100 valia 54,95 unidades monetárias no final do mês de março em relação ao início desse mês**, perdendo **45,05%** do seu poder de compra nesse mês.

Comentários:

Um participante observou um erro na unidade monetária **R$** (reais) utilizada na pergunta. Em março de 1990 a moeda brasileira passou do Cruzado novo (**NCz$**), que vigorou até o dia 15, para o Cruzeiro (**Cr$**), que passou a vigorar a partir do dia 16 (Medida Provisória nº 168, de 15/03/1990, convertida na Lei 8024, de 12/04/1990), sendo utilizada a equivalência Cr$ 1,00 = NCz$ 1,00.

O texto da revista diz "**uma nota de 100 valia menos de 20 no fim do mês"**, mas não especifica em relação a quando a nota de 100 valia menos de 20. Na pergunta foi feita a correção quando se diz **"Qual seria o verdadeiro valor de uma nota de R$ 100,00 (recebida no início de março) no fim do mês de março?"**

Alguns participantes questionaram o fato de **do início ao final do mês de março** não se ter passado um mês. Porém, o início do mês de março é às 00:00 do primeiro dia e o final às 24:00 do último dia desse mês (00:00 do primeiro dia do mês seguinte), passando assim um mês. Tiveram participantes que também questionaram que a nota de 100 continuou valendo 100, mas quando se diz **"**Qual seria o **verdadeiro valor de uma nota de R$ 100,00** (recebida no início de março) no fim do mês de março?**"**, subentende-se que é o valor da nota no final do mês em relação ao início do mês, ou seja, o seu valor relativo, que tem a ver com o seu poder de compra.

Como pode ser observado no quadro 19, 4 participantes deixaram essa questão em branco e 4 a acertaram (usando o conceito de proporção e explicando detalhadamente o que entenderam), ou seja, 17 tentaram resolvê-la e cometeram erros nessas tentativas. Assim, aproximadamente **19%** (4 de 21) dos que tentaram resolver a questão a acertaram, o que mostra 81% dos participantes da pesquisa do ensino médio, desconsiderando-se os erros comentados acima sobre o enunciado da questão, tiveram dificuldade de identificar, nessa questão, a base de cálculo, que de certa forma tem relação com a dificuldade de perceber o fato de que os juros incidem sobre o saldo devedor.

Como pode ser observado no quadro 20, 6 acertaram a questão, 17 a erraram e 6 a deixaram em branco, ou seja, aproximadamente **26%** (6 de 23) dos que tentaram resolver a questão a acertaram, o que mostra que 74% dos participantes da pesquisa do ensino superior, tiveram dificuldade de identificar, nessa questão, a base de cálculo, que de certa forma tem relação com a dificuldade de perceber o fato de que os juros incidem sobre o saldo devedor.

Como já visto anteriormente, o percentual de acertos, entre os graduados que não estudaram matemática financeira e tentaram resolver essa questão, foi de aproximadamente **23%** (3 de 13), que é menor do que os **30%** (3 de 10) de acertos entre os que estudaram matemática financeira e tentaram resolvê-la e maior do que os **19%** de acertos entre os participantes do ensino médio que também tentaram.

A pequena diferença observada entre os 30% e os 23%, sugere que o fato de ter estudado a disciplina pouco contribuiu para um melhor desempenho em relação ao fato de não ter estudado. Já as diferenças observadas entre os 30% e os 19%, ou entre os 23% e os 19%, mostram que os participantes do ensino médio tiveram uma menor percepção do erro da revista, porém muito próxima, do que os do ensino superior que estudaram ou não a disciplina. Isso pode ser devido ao fato dos participantes do ensino superior terem dado mais crédito à revista do que os do ensino médio.

- **Erro mais comum na questão 5 entre os participantes do ensino médio e do ensino superior:**

Nessa questão, o erro mais comum foi concordar que a revista estava certa, ou seja, R$100,00 – 82% de R$100,00 = **R$18,00**. **Uma nota de 100 valia menos de 20 no fim do mês**. Observação: esse erro foi cometido por **16** dos 54 participantes.

Observa-se que alguns erros possuem padrões de repetição. Dentro de uma mesma questão isso ficou evidente em todas. Quando se comparam os erros encontrados em questões que se assemelham, por exemplo, as questões 3 e 4, estes seguem lógicas muito parecidas. Com isso, o professor, no uso de sua experiência e, sabendo de tal fato, deve tomar medidas para corrigir essas distorções, elaborando atividades que mostrem a lógica que possui a resolução correta, mas não deixando de valorizar a parte correta da lógica utilizada por cada aluno em suas resoluções.

Um questionário preenchido corretamente com as resoluções de seis participantes encontra-se no apêndice C.

CONCLUSÃO

A partir do presente trabalho foi possível demonstrar o distanciamento existente entre a matemática apresentada em sala de aula e aquela exigida no cotidiano em relação aos fundamentos da matemática financeira, uma vez que ficou evidente a dificuldade da maioria em perceber erros graves existentes em publicações destinadas ao público em geral e que foram apresentados aos participantes da pesquisa.

Foi possível concluir que houve grande dificuldade por parte dos participantes da pesquisa em perceber que os juros só incidem sobre o saldo devedor, que é um princípio básico aplicado a qualquer modalidade de empréstimo e financiamento.

Observando-se os participantes do ensino superior na pesquisa foi possível perceber que ter tido contato prévio com a disciplina matemática financeira contribuiu para a resolução de algumas questões, porém de forma pouco significativa em relação aos que não tiveram contato, tendo sido mais relevante a experiência pessoal do participante. Tal fato pode estar ligado à forma de abordagem de tal conteúdo na ocasião da sua formação.

Observou-se também que ter concluído o ensino superior, independentemente de ter cursado a disciplina matemática financeira, teve influência positiva e significativa no grau de acertos na pesquisa em relação às noções básicas de financiamentos. No entanto, quando se tratava da percepção de erros nas revistas isso não foi significativo, pois ambos apresentaram aproximadamente o mesmo grau de acerto.

Espera-se que este trabalho contribua no sentido de enriquecer as discussões em relação à inserção dos conteúdos relativos à matemática financeira nos diferentes níveis de ensino, buscando a sua inclusão efetiva em sala de aula, vinculando-a às necessidades do dia a dia, dada a importância que os empréstimos e os financiamentos têm na estabilidade dos sistemas financeiros numa economia globalizada. Para que isso ocorra, tantos os futuros professores de matemática quanto aqueles que já se formaram deve ter acesso a formação necessária para transmitir tais conteúdos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CONEF. **Educação Financeira nas Escolas:** ensino médio: livro do professor. 3v. 1 ed. Brasília: CONEF, 2013.

CRESPO, Antônio Arnot. **Matemática Comercial e Financeira Fácil.** 13. ed. São Paulo: Saraiva, 1999.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto e aplicações. 1ª série: ensino médio. 1 ed. São Paulo: Ática, 2010.

FREITAS, Célio Marques de. **A base matemática aplicada para entender o sistema francês de amortização na prática.** 2013. 82 f. Monografia (Especialização em Análise Financeira), Faculdade da Academia Brasileira de Educação e Cultura, Rio de Janeiro, 2013.

GALLAS, Rafael Guilherme. **A importância da matemática financeira no ensino médio e sua contribuição para a construção da educação financeira no cidadão.** 2013. 57f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2013.

HOFMANN, Ruth Margareth. **Uma análise comparativa das iniciativas da Inglaterra e da França.** 2013. 329 f. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática:** ciência e aplicação. 3ª série: ensino médio. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. **Matemática Financeira.** 2. ed. São Paulo: Atlas S.A., 1996.

PAIVA, Manoel. **Matemática:** componente curricular. 1ª série: ensino médio. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

RIBEIRO, Evandro Conceição. **Um novo olhar sobre a matemática financeira no ensino médio.** 2013. 65 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. 2ª série: ensino médio. 1 ed. São Paulo: Scipione, 2010.

RIBEIRO, Jackson da Silva. **Matemática:** projeto radix. 9° ano: ensino fundamental. 1 ed. São Paulo: Scipione, 2009.

SÁ, Ilydio Pereira. **Matemática Financeira para Educadores Críticos.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2011.

SÁ, Ilydio Pereira de. **A educação matemática crítica e a matemática financeira na formação de professores.** 2012. 150 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

SILVA, Márcia Rebello da. **Apostila de Matemática Financeira.** Seropédica: UFRRJ, 1997.

SOUSA, José Mateus Queiroz. **Matemática financeira: uma nova proposta para o ensino médio.** 2013. 57 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática:** novo olhar. 2ª série: ensino médio. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

SOUZA, Joamir Ribeiro de; PATANO, Patrícia Rosana Moreno. **Vontade de Saber Matemática.** 9° ano: ensino fundamental. 2. ed. São Paulo: FTD, 2012.

APÊNDICES

APÊNDICE A: Questionário aplicado aos participantes que estavam no terceiro ano do ensino médio ou já haviam concluído no máximo o ensino médio ou equivalente.

Regras:

(I) Pode utilizar calculadora comum ou científica, porém não é permitido o uso de Calculadoras Financeiras;
(II) Utilizar o tempo aproximado de 60 minutos;
(III) Não é necessário se identificar.

Perguntas:

1ª) Durante o ensino fundamental ou médio você estudou progressão geométrica e/ou juros compostos?
( ) SIM ( ) NÃO
2ª) Você sabe se pelo menos um de seus pais ou responsáveis já tomou algum empréstimo (pessoal, CDC, consignação em folha, etc) alguma vez?
( ) SIM ( ) NÃO

1) Uma loja vende por crediário com uma taxa de juros mensal de 20%. Uma certa mercadoria, cujo preço à vista é R$780,00, será vendida a prazo de acordo com o seguinte plano de pagamento: R$220,00 de entrada, uma prestação de R$412,00 a ser paga 1 mês após a entrada e outra de R$312,00 a ser paga 2 meses após a entrada. Essa loja está obedecendo as normas da matemática financeira?

2) Uma loja vende seus artigos com pagamento em duas prestações iguais, **"**sem juros**"**. A primeira prestação é paga no ato da compra e a segunda, um mês após. Entretanto, um desconto de 25% é concedido se o cliente pagar à vista. Na realidade, essa loja cobra, nas vendas a prazo, juros mensais de taxa igual a:
a) 12,5% b) 25% c) 50% d) 75% e) 100%

3) Uma geladeira custa à vista R$720,00, mas pode ser paga em duas prestações iguais, uma no ato da compra e outra após 30 dias, sabendo-se que a taxa de financiamento é de 25% ao mês sobre o saldo devedor. Determinando o valor dessas prestações, encontramos:
a) R$400,00 b) R$405,00 c) R$425,00 d) R$450,00 e) R$500,00

4) Um comerciante deseja vender um produto que custa à vista R$210,00 em duas parcelas iguais, sendo a primeira um mês após a compra e a segunda um mês após a primeira. Se os juros mensais (juros compostos) são de 10% ao mês, calculando o valor de cada parcela, encontramos:
a) R$109,56 b) R$110,00 c) R$121,00 d) R$126,00 e) R$127,05

5) **"**Os fabricantes de papel higiênico reduziram de 40m para 30m os rolos de algumas marcas, sem diminuição de preços. Ou seja, o consumidor está pagando 25% a mais pelo produto**"** (Revista Veja, 15/08/01).
Você concorda com o percentual apresentado acima? Justifique.

6) (Trecho extraído da Revista Veja de 5/10/2011 - página 85)
(...) em 1989, chegou a produzir uma inflação anual de 1973%. O recorde mensal seria batido em março do ano seguinte, quando a taxa alcançou **82%**. (...). **Uma nota de 100 valia menos de 20 no fim do mês**. (...)
Existe um erro na conclusão do enunciado acima. Qual seria o verdadeiro valor de uma nota de R$100,00 (recebida no início de março) no fim do mês de março?

APÊNDICE B: Questionário aplicado aos participantes que já haviam concluído pelo menos o ensino superior.

Regras:

(I) Pode utilizar calculadora comum ou científica, porém não é permitido o uso de Calculadoras Financeiras;
(II) Utilizar o tempo aproximado de 60 minutos;
(III) Não é necessário se identificar.

Perguntas:

1ª) Durante a sua graduação você cursou a disciplina matemática financeira?
( ) SIM ( ) NÃO

2ª) Você já tomou algum empréstimo (pessoal, CDC, consignação em folha, etc) alguma vez na sua vida?
( ) SIM ( ) NÃO

1) Uma loja vende por crediário com uma taxa de juros mensal de 20%. Uma certa mercadoria, cujo preço à vista é R$780,00, será vendida a prazo de acordo com o seguinte plano de pagamento: R$220,00 de entrada, uma prestação de R$412,00 a ser paga 1 mês após a entrada e outra de R$312,00 a ser paga 2 meses após a entrada. Essa loja está obedecendo as normas da matemática financeira?

2) Uma loja vende seus artigos com pagamento em duas prestações iguais, **"**sem juros**"**. A primeira prestação é paga no ato da compra e a segunda, um mês após. Entretanto, um desconto de 25% é concedido se o cliente pagar à vista. Na realidade, essa loja cobra, nas vendas a prazo, juros mensais, de taxa igual a :
a) 12,5% b) 25% c) 50% d) 75% e) 100%

3) Uma geladeira custa à vista R$720,00, mas pode ser paga em duas prestações iguais, uma no ato da compra e outra após 30 dias, sabendo-se que a taxa de financiamento é de 25% ao mês sobre o saldo devedor. Determinando o valor dessas prestações, encontramos:
a) R$400,00 b) R$405,00 c) R$425,00 d) R$450,00 e) R$500,00

4) Um comerciante deseja vender um produto que custa à vista R$210,00 em duas parcelas iguais, sendo a primeira um mês após a compra e a segunda um mês após a primeira. Se os juros mensais (juros compostos) são de 10% ao mês, calculando o valor de cada parcela, encontramos:
a) R$109,56 b) R$110,00 c) R$121,00 d) R$126,00 e) R$127,05

5) "Os fabricantes de papel higiênico reduziram de 40m para 30m os rolos de algumas marcas, sem diminuição de preços. Ou seja, o consumidor está pagando 25% a mais pelo produto**"** (Revista Veja, 15/08/01).
Você concorda com o percentual apresentado acima? Justifique.

6) (Trecho extraído da Revista Veja de 5/10/2011 - página 85)
(...) em 1989, chegou a produzir uma inflação anual de 1973%. O recorde mensal seria batido em março do ano seguinte, quando a taxa alcançou **82%**. (...). **Uma nota de 100 valia menos de 20 no fim do mês**. (...)
Existe um erro na conclusão do enunciado acima. Qual seria o verdadeiro valor de uma nota de R$100,00 (recebida no início de março) no fim do mês de março?

APÊNDICE C: Um questionário preenchido corretamente com as resoluções nas letras de seis participantes

1) Uma loja vende por crediário com uma taxa de juros mensal de 20%. Uma certa mercadoria, cujo preço à vista é R$780,00, será vendida a prazo de acordo com o seguinte plano de pagamento: R$220,00 de entrada, uma prestação de R$412,00 a ser paga 1 mês após a entrada e outra de R$312,00 a ser paga 2 meses após a entrada. Essa loja está obedecendo as normas da matemática financeira?

Explicação do participante M15

Explicação: ESTA OBEDECENDO Sim

PRODUTO. 780.00
-ENTRADA 220.00
= 560.00 (Saldo Devedor)
20 % (Juros)
112.00 (Correção)

112.00 (Correção)
\+ 560.00 (Saldo devedor)
672.00 (" ")
412.00 1ª Prestação
Saldo 260.00 (Saldo devedor)
\+ 20 % Juros
52.00
\+ 260.00 (Saldo devedor)
312.00 2ª Parcela

2) Uma loja vende seus artigos com pagamento em duas prestações iguais, "sem juros". A primeira prestação é paga no ato da compra e a segunda, um mês após. Entretanto, um desconto de 25% é concedido se o cliente pagar à vista. Na realidade, essa loja cobra, nas vendas a prazo, juros mensais de taxa igual a:

Explicação do participante G20

Ex: · x = R$100,00
· 2 x R$ 50,00
· à vista = R$75,00
\- Se eu pagasse a primeira de R$50,00, a segunda sairia no mesmo valor. A vista eu pagaria a primeira, ficando um Resíduo de R$ 25,00. Logo, aplicando 1 mês de juros, seria 100%.

3) Uma geladeira custa à vista R$720,00, mas pode ser paga em duas prestações iguais, uma no ato da compra e outra após 30 dias, sabendo-se que a taxa de financiamento é de 25% ao mês sobre o saldo devedor. Determinando o valor dessas prestações, encontramos:

a) R$400,00 b) R$405,00 c) R$425,00
d) R$450,00 e) R$500,00

Explicação do participante M6

V -> valor total
P_1 -> 1º prestação 720
i -> juros

$P_1 = (V - P_1) . 1,25$
$P_1 = (720 - P_1) . 1,25$
$P_1 = (900 - P_1 \cdot 1,25)$
$2,25 . P_1 = 900$
$P_1 = 400$

4) Um comerciante deseja vender um produto que custa à vista R$210,00 em duas parcelas iguais, sendo a primeira um mês após a compra e a segunda um mês após a primeira. Se os juros mensais (juros compostos) são de 10% ao mês, calculando o valor de cada parcela, encontramos:

a) R$109,56 b) R$110,00 c) R$121,00
d) R$126,00 e) R$127,05

Explicação do participante G23

Considerando
i = taxa de juros
x = valor de cada parcela
teremos:

$$210 = \frac{x}{(1+i)} + \frac{x}{(1+i)^2}$$

$$210 = \frac{x}{1,1} + \frac{x}{1,21}$$

$$254,10 = 1,1x + x$$

x = R$ 121,00

5) **"**Os fabricantes de papel higiênico reduziram de 40m para 30m os rolos de algumas marcas, sem diminuição de preços. Ou seja, o consumidor está pagando 25% a mais pelo produto**"** (Revista Veja, 15/08/01).

Você concorda com o percentual apresentado acima? Justifique.

Explicação do participante M21

Não, pois:

40m = 100%, logo: 30m = 7

Se 30m, que deveriam cu

75% custam 100%, o acrésc

foi de:

$\frac{25}{75} = \frac{x}{100} \Rightarrow \boxed{33,33\%}$

33,33% foi o acréscimo

6) (Trecho extraído da Revista Veja de 5/10/2011 - página 85)

(...) em 1989, chegou a produzir uma inflação anual de 1973%. O recorde mensal seria batido em março do ano seguinte, quando a taxa alcançou **82%**. (...). **Uma nota de 100 valia menos de 20 no fim do mês**. (...)

Existe um erro na conclusão do enunciado acima. Qual seria o verdadeiro valor de uma nota de R$100,00 (recebida no início de março) no fim do mês de março?

Explicação do participante G9

Considerando que a

pessoa, no final do mês d

ge, de acordo com o enun

do da questão precisava

R$182,00 para fazer a

ma compra no iníci

te mês, pois a taxa d

flação foi de 82%. Po

-se mostrar o erro

cálculo na conclus

do referido enunci

usando a razão ou

porção entre R$100,00

R$182,00, na qual o

meiro valor represen

54,94% da quantia

R$182,00. Por dedu

lógica, a nota

R$100,00 perdeu 45

do seu poder de

valendo no final do

de março apenas R$54,

não menos de R$2

conforme o enun

do da questão nº

APÊNDICE D: Fórmula do Termo Geral (a_n) de uma Progressão Geométrica

Definição de Progressão Geométrica É uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é obtido **multiplicando-se** o termo imediatamente anterior a ele por uma constante.

Essa constante é representada pela letra **q** e é denominada **razão da P.G.** Numa progressão geométrica, a razão **q** pode ser um número real qualquer, mas no presente trabalho são estudadas aplicações desse assunto no desenvolvimento de alguns tópicos de matemática financeira de interesse, sendo assim, o estudo restringe-se a progressões geométricas nas quais $\mathbf{q} > \mathbf{1}$, que são chamadas de progressões geométricas crescentes.

De um modo geral, os valores dos termos de uma P.G. são representados por:

$$\begin{cases} a_1 : \text{ valor do primeiro termo} \\ a_2 : \text{ valor do segundo termo} \\ a_3 : \text{ valor do terceiro termo} \\ \vdots \\ a_n : \text{valor do n - ésimo termo, ou seja, valor do termo que está numa posição n qualquer,} \\ \quad \text{sendo n um número natural positivo.} \end{cases}$$

Representa-se a P.G. da seguinte forma:

$$\mathbf{P.G.}\left(\mathbf{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n, \cdots}\right)$$

De acordo com a definição e substituindo a expressão de um termo na expressão do termo imediatamente posterior a ele, obtém-se:

$$\bullet\, \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}$$

$$\bullet\, \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{q} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{a_1} \times \mathbf{q} \times \mathbf{q} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a_3} = \mathbf{a_1} \times \mathbf{q}^2$$

$$\bullet\, \mathbf{a_4} = \mathbf{a_3} \times \mathbf{q} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a_4} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}^2 \times \mathbf{q} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a_4} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}^3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Para determinar o valor de um termo qualquer, a partir do segundo, basta multiplicar o primeiro termo $\mathbf{a_1}$ pela razão $\mathbf{q}$, um número de vezes igual a uma unidade a menos do que a posição do termo que se quer determinar. Assim, tem-se:

$$\bullet\, \mathbf{a_n} = \mathbf{a_1} \times \underbrace{\mathbf{q} \times \mathbf{q} \times \ldots \times \mathbf{q}}_{\textbf{n-1 fatores iguais a q}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a_n} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}^{\mathbf{n-1}}$$

Destacando a fórmula, tem-se:

$$\boxed{a_n = a_1 \times q^{n-1}}$$

APÊNDICE E: Fórmula da Soma dos n primeiros Termos (S_n) de uma Progressão Geométrica

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação acima pela razão $\mathbf{q}$, obtém-se:

$$S_n \times q = \underbrace{a_1 \times q}_{a_2} + \underbrace{a_2 \times q}_{a_3} + \underbrace{a_3 \times q}_{a_4} + \cdots + \underbrace{a_{n-1} \times q}_{a_n} + a_n \times q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S_n \times q = \underbrace{a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n}_{S_n - a_1} + a_n \times q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S_n \times q - S_n = -a_1 + a_n \times q$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação anterior por -1, obtém-se:

$$S_n - S_n \times q = a_1 - a_n \times q$$

Colocando-se $\mathbf{S_n}$ em evidência, substituindo-se $\mathbf{a_n}$ por $\mathbf{a_1 \times q^{n-1}}$ e colocando-se $\mathbf{a_1}$ também em evidência, obtém-se:

$$(1 - q) \times S_n = a_1 - a_1 \times \underbrace{q^{n-1} \times q}_{q^n} \quad \Rightarrow \quad (1 - q) \times S_n = a_1 \times \left(1 - q^n\right)$$

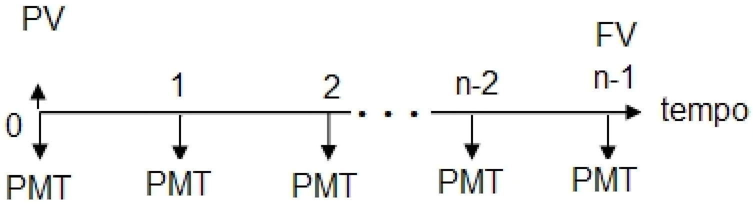
Passando-se dividindo $\mathbf{1 - q}$ para o segundo membro da equação, finalmente obtém-se:

$$S_n = \frac{a_1 \times \left(1 - q^n\right)}{1 - q}$$

Destacando a fórmula, tem-se:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 \times \left(1 - q^n\right)}{1 - q}}$$, ($\mathbf{q} \neq \mathbf{1}$, porém será utilizado $\mathbf{q} > \mathbf{1}$)

APÊNDICE F: Financiamentos com n prestações iguais e periódicas (sendo uma de entrada)



- Como são n prestações iguais e periódicas (igualmente espaçadas), sendo uma de entrada, pode-se escrever $PV = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_{n-1} + C_n$, sendo $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_{n-1}$ e C_n, respectivamente, os valores equivalentes das **n** prestações na **data zero**.
- Assim,

$$C_1 = PMT\ ,\ C_2 \times (1+i)^1 = PMT \Rightarrow C_2 = \frac{PMT}{(1+i)^1}\ ,\ C_3 \times (1+i)^2 = PMT \Rightarrow C_3 = \frac{PMT}{(1+i)^2}\ , \ldots ,$$

$$C_{n-1} \times (1+i)^{n-2} = PMT \Rightarrow C_{n-1} = \frac{PMT}{(1+i)^{n-2}} \text{ e } C_n \times (1+i)^{n-1} = PMT \Rightarrow C_n = \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}}.$$

- Assim:

$$PV = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_{n-1} + C_n \Rightarrow PV = PMT + \frac{PMT}{(1+i)^1} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{PMT}{(1+i)^{n-2}} + \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}}$$

.

(DATA FOCAL 0)

- Multiplicando-se ambos os membros por $(1+i)^{n-1}$, tem-se:

$$PV \times (1+i)^{n-1} = PMT \times (1+i)^{n-1} + \frac{PMT}{(1+i)^1} \times (1+i)^{n-1} + \frac{PMT}{(1+i)^2} \times (1+i)^{n-1} + \cdots + \frac{PMT}{(1+i)^{n-2}} \times (1+i)^{n-1} + \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}} \times (1+i)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\underbrace{PV \times (1+i)^{n-1}}_{S_n} = \underbrace{\underbrace{PMT \times (1+i)^{n-1}}_{a_n} + \underbrace{PMT \times (1+i)^{n-2}}_{a_{n-1}} + \underbrace{PMT \times (1+i)^{n-3}}_{a_{n-2}} + \cdots + \underbrace{PMT \times (1+i)^1}_{a_2} + \underbrace{PMT}_{a_1}}_{\text{Progressão Geométrica com n termos,: } a_1 = PMT \text{ e razão } q=(1+i)}$$

(DATA FOCAL n-1)

Aplicando a fórmula desenvolvida no apêndice E, da soma dos **n** primeiros termos ($\mathbf{S_n}$) de uma progressão geométrica, tem-se:

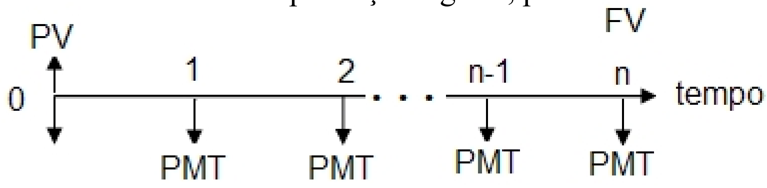
$$S_n = \frac{a_1 \times (1-q^n)}{1-q} \Rightarrow PV \times (1+i)^{n-1} = \frac{PMT \times [1-(1+i)^n]}{1-(1+i)} = \frac{PMT \times [1-(1+i)^n]}{-i} = \frac{PMT \times [(1+i)^n - 1]}{i}.$$

Assim, $PV \times (1+i)^{n-1} = \dfrac{PMT \times [(1+i)^n - 1]}{i} \Rightarrow PMT = \dfrac{(1+i)^{n-1} \times i}{(1+i)^n - 1} \times PV$

Destacando a fórmula, tem-se:

$$\boxed{PMT = \frac{(1+i)^{n-1} \times i}{(1+i)^n - 1} \times PV}$$

APÊNDICE G: Financiamentos com n prestações iguais, periódicas e sem entrada



- Como são n prestações iguais sem entrada e periódicas (igualmente espaçadas), pode-se escrever $PV = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_{n-1} + C_n$, sendo $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_{n-1}$ e C_n, respectivamente, os valores equivalentes das **n** prestações na **data zero**.
- Assim,

$$C_1 \times (1+i) = PMT \Rightarrow C_1 = \frac{PMT}{(1+i)},\ C_2 \times (1+i)^2 = PMT \Rightarrow C_2 = \frac{PMT}{(1+i)^2},\ C_3 \times (1+i)^3 = PMT \Rightarrow C_3 = \frac{PMT}{(1+i)^3}, \ldots,$$

$$C_{n-1} \times (1+i)^{n-1} = PMT \Rightarrow C_{n-1} = \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}} \text{ e } C_n \times (1+i)^n = PMT \Rightarrow C_n = \frac{PMT}{(1+i)^n}.$$

- Assim: $PV = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_{n-1} + C_n \Rightarrow PV = \dfrac{PMT}{(1+i)} + \dfrac{PMT}{(1+i)^2} + \dfrac{PMT}{(1+i)^3} + \cdots + \dfrac{PMT}{(1+i)^{n-1}} + \dfrac{PMT}{(1+i)^n}$.
- Multiplicando-se ambos os membros por $(1+i)^n$, tem-se:

$$PV \times (1+i)^n = \frac{PMT}{(1+i)} \times (1+i)^n + \frac{PMT}{(1+i)^2} \times (1+i)^n + \frac{PMT}{(1+i)^3} \times (1+i)^n + \cdots + \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}} \times (1+i)^n + \frac{PMT}{(1+i)^n} \times (1+i)^n$$

$$\underbrace{PV \times (1+i)^n}_{S_n} = \underbrace{\underbrace{PMT \times (1+i)^{n-1}}_{a_n} + \underbrace{PMT \times (1+i)^{n-2}}_{a_{n-1}} + \underbrace{PMT \times (1+i)^{n-3}}_{a_{n-2}} + \cdots + \underbrace{PMT \times (1+i)^1}_{a_2} + \underbrace{PMT}_{a_1}}_{\text{Progressão Geométrica com n termos,: } a_1 = PMT \text{ e razão } q=(1+i)}$$

Aplicando a fórmula desenvolvida no apêndice E, da soma dos **n** primeiros termos ($\mathbf{S_n}$) de uma progressão geométrica, tem-se:

$$S_n = \frac{a_1 \times (1-q^n)}{1-q} \Rightarrow PV \times (1+i)^n = \frac{PMT \times [1-(1+i)^n]}{1-(1+i)} = \frac{PMT \times [1-(1+i)^n]}{-i} = \frac{PMT \times [(1+i)^n - 1]}{i}.$$

Assim, $PV \times (1+i)^n = \dfrac{PMT \times [(1+i)^n - 1]}{i} \Rightarrow PMT = \dfrac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \times PV$

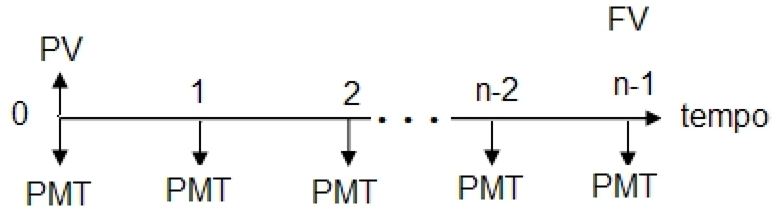
Destacando a fórmula, tem-se:

$$\boxed{PMT = \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \times PV}$$

Observação: Para demonstrar essa fórmula, já tendo demonstrada a fórmula com entrada, basta substituir PV por PV×(1+i). Assim: $PMT = \dfrac{(1+i)^{n-1} \times i}{(1+i)^n - 1} \times PV \times (1+i) = \dfrac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \times PV$

APÊNDICE H: Valor acumulado após n depósitos iguais, periódicos e à mesma taxa de juros

1º caso: com entrada

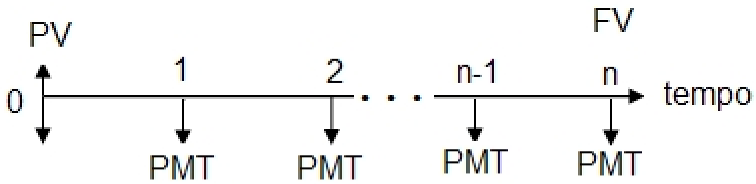


$$\bullet\ \text{PMT} = \frac{(1+i)^{n-1} \times i}{(1+i)^{n} - 1} \times \text{PV} \Leftrightarrow \text{PV} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{(1+i)^{n-1} \times i} \times \text{PMT} \Rightarrow$$

Multiplicando ambos os membros por $(1+i)^{n-1}$, tem-se:

$$\underbrace{\text{PV} \times (1+i)^{n-1}}_{\text{FV}} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{(1+i)^{n-1} \times i} \times \text{PMT} \times (1+i)^{n-1} \Rightarrow \text{FV} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{i} \times \text{PMT}.$$

2º caso: sem entrada



$$\bullet\ \text{PMT} = \frac{(1+i)^{n} \times i}{(1+i)^{n} - 1} \times \text{PV} \Leftrightarrow \text{PV} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{(1+i)^{n} \times i} \times \text{PMT} \Rightarrow$$

Multiplicando ambos os membros por $(1+i)^{n}$, tem-se:

$$\underbrace{\text{PV} \times (1+i)^{n}}_{\text{FV}} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{(1+i)^{n} \times i} \times \text{PMT} \times (1+i)^{n} \Rightarrow \text{FV} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{i} \times \text{PMT}.$$

Destacando a fórmula (com ou sem entrada), tem-se:

$$\boxed{\text{FV} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{i} \times \text{PMT}}$$

Esse valor acumulado conta do momento que foi feito o primeiro depósito (não importa se é com entrada ou não) até o do último. Portanto, como foi demonstrado acima, utilizando-se qualquer das fórmulas (com entrada ou sem entrada) tem-se a mesma fórmula. Não foi feito nenhum saque durante todo o período da aplicação. Caso sejam feitos n depósitos, mas o problema desejar o valor acumulado um período após o último depósito, deve-se ao final multiplicar por (1+i) o valor encontrado por essa fórmula.

$$\text{FV} \times (1+i) = \frac{[(1+i)^{n} - 1] \times (1+i)}{i} \times \text{PMT} = \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \times \text{PMT}$$

APÊNDICE I: Resolução das Atividades Sugeridas na seção 3.8

1ª Parte:

Ex.1: alternativa **(e)** **Ex.2**: 25%a.m **Ex.3:** a) R$500,00

Ex.3: b)

VALOR À VISTA: R$900,00	VALOR DAS PRESTAÇÕES (em R$)	SALDO DEVEDOR NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO (em R$)	
PRESTAÇÃO N°		ANTES DO PGT° DA PRESTAÇAO	DEPOIS DO PGT° DA PRESTAÇÃO
1	500,00	900,00	400,00
2	500,00	500,00	0

Ex.4: a) R$121,00

Ex.4: b)

VALOR À VISTA: R$331,00	VALOR DAS PRESTAÇÕES (em R$)	SALDO DEVEDOR NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO (em R$)	
PRESTAÇÃO N°		ANTES DO PGT° DA PRESTAÇAO	DEPOIS DO PGT° DA PRESTAÇÃO
1	121,00	331,00	210,00
2	121,00	231,00	110,00
3	121,00	121,00	0

Ex.5: a) R$500,00

Ex.5: b)

VALOR À VISTA: R$500,00	VALOR DAS PRESTAÇÕES (em R$)	SALDO DEVEDOR NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO (em R$)	
PRESTAÇÃO N°		ANTES DO PGT° DA PRESTAÇAO	DEPOIS DO PGT° DA PRESTAÇÃO
1	100,00	500,00	400,00
2	240,00	440,00	200,00
3	220,00	220,00	0

2ª Parte:

Atividades:

1) a) R$780,00

b)

VALOR À VISTA: R$780,00	VALOR DAS PRESTAÇÕES (em R$)	SALDO DEVEDOR NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO (em R$)	
PRESTAÇÃO N°		ANTES DO PGT° DA PRESTAÇAO	DEPOIS DO PGT° DA PRESTAÇÃO
1	220,00	780,00	560,00
2	412,00	672,00	260,00
3	312,00	312,00	0

2) Demonstrações nos apêndices **F e G**

3) a) R$128,94 b) R$236,42

Como foi estipulada uma taxa para cada aluno

Deve-se escolher um exemplo: **5%**a.m.

n	coeficientes (com entrada)	coeficientes (sem entrada)
1	1,000000	1,050000
2	0,512195	0,537805
3	0,349722	0,367209
4	0,268583	0,282012
5	0,219976	0,230975
6	0,187636	0,197017
7	0,164590	0,172820
8	0,147354	0,154722
9	0,133991	0,140690
10	0,123338	0,129505
11	0,114656	0,120389
12	0,107453	0,112825

4) Observacão: Esse quadro é parte da **TABELA PRICE,** já vista anteriormente.

VALOR À VISTA: R$	VALOR DA PRESTAÇÃO (em R$)	SALDO DEVEDOR NO DIA DO VENCIMENTO DA PRESTAÇÃO (em R$)	
PRESTAÇÃO N°		ANTES DO PGT° DA PRESTAÇÃO	DEPOIS DO PGT° DA PRESTAÇÃO
1	128,94	1200	1071,06
2	128,94	1124,61	995,67
3	128,94	1045,45	916,51
4	128,94	962,33	833,39
5	128,94	875,06	746,11
6	128,94	783,42	654,48
7	128,94	687,20	558,26
8	128,94	586,17	457,23
9	128,94	480,09	351,14
10	128,94	368,70	239,76
11	128,94	251,75	122,80
12	128,94	128,94	0,00

Obs.: Na atividade 4 o professor pode incluir para o aluno fazer um quadro para o item (b), que é com 6 prestações sem entrada

5) Suponha o anúncio fictício a seguir:

> "Compre um fogão da marca Fogo Quente e pague em **12** prestações mensais de **R$25,94** sem entrada ou compre à vista por **R$229,90**"
> (Observação: suponha que a taxa de juros não foi informada no anúncio)

Resolução: $\mathrm{PMT}=\dfrac{(1+i)^{n}.i}{(1+i)^{n}-1}.\mathrm{PV}\Rightarrow 25{,}94=\dfrac{(1+i)^{12}.i}{(1+i)^{12}-1}.229{,}90$. Para encontrar **i** o aluno teria de resolver uma equação polinomial de grau 13, ou seja, ele depara-se com uma equação de grau acima do que ele já está familiarizado a resolver e de difícil resolução.

- Continuando a resolução anterior tem-se:

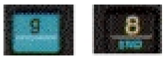
$$25{,}94.(1+i)^{12}-25{,}94=229{,}90.i.(1+i)^{12}\Rightarrow(229{,}90.i-25{,}94).(1+i)^{12}+25{,}94=0\,.$$

Substituindo-se **1 + i** por **x** (1+ i = x $\Rightarrow$ i = x – 1), obtém-se:

$[229{,}90.(x-1)-25{,}94].x^{12}+25{,}94=0\Rightarrow 229{,}90.x^{13}-255{,}84.x^{12}+25{,}94=0$. Para encontrar a taxa centesimal de juros cobrada pela loja, o estudante deveria resolver essa equação, escolher o valor de **x** conveniente, fazer **i = x – 1** para encontrar a taxa unitária e multiplicar **i** por 100 para encontrar a taxa centesimal, porém, essa equação é de difícil solução e as regras envolvidas não fazem parte da série a qual essas atividades são destinadas. Dessa forma, para encontrar a taxa de juros, utiliza-se uma calculadora HP12C, que está programada para resolvê-la usando um método baseado em iterações (método de convergência). A seguir uma resolução usando a HP12C.

Resolução da atividade 5 da 2ª parte das atividades apresentadas na seção 3.8, utilizando-se uma calculadora HP12C:

Usando uma calculadora HP12C, encontra-se o valor de **i = 5**, que indica que a loja cobra **5%** de juros ao mês. Basta fazer:

Observação: Ao pressionar as teclas  indica que a calculadora está no modo de prestações **sem entrada**. Ao fazer isso, a palavra BEGIN desaparece do visor caso ela já esteja nele e não aparece caso ela já não esteja no visor.

Esse é um ótimo momento, para o professor que tem os conhecimentos básicos para operar essa calculadora, de mostrar aos alunos uma situação em que é quase obrigatório utilizar uma calculadora programada para tal propósito.

Em seguida, o professor pode supor que a taxa de juros foi informada no anúncio e, em vez de pedir para calculá-la, ele pode pedir para os alunos comprovarem, utilizando uma calculadora científica, que a taxa de **5%** a.m. está realmente correta. Para isso, basta substituir **i = 0,05** (nesse caso **i** é a taxa unitária) no segundo membro da equação acima para comprovar que a prestação é R$25,94:

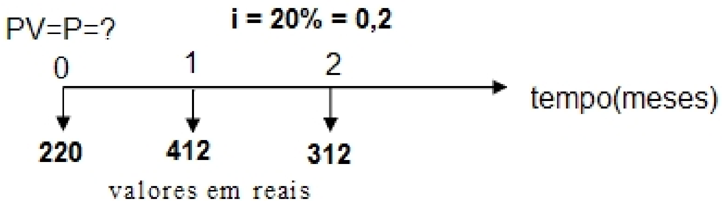
$\bullet\, 229{,}90.1{,}05^{13} - 255{,}84.1{,}05^{12} + 25{,}94$, encontrando o valor aproximado de **0**, o que comprova o que se deseja.

APÊNDICE J: Resoluções das quatro primeiras questões vistas na pesquisa do capítulo 4 da dissertação pelas fórmulas e com as calculadoras científicas e HP12C

Observação: **PV** é a sigla de Present Value no idioma inglês, que no idioma português é o Valor Presente (valor à vista) e PMT_k são os valores das prestações.

• Resolução da <u>questão 1</u> da pesquisa:

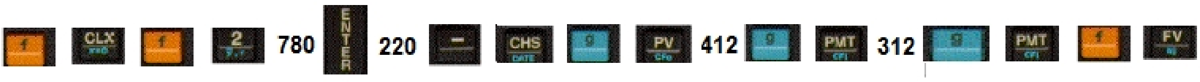
(**1°**) Utilizando a fórmula:



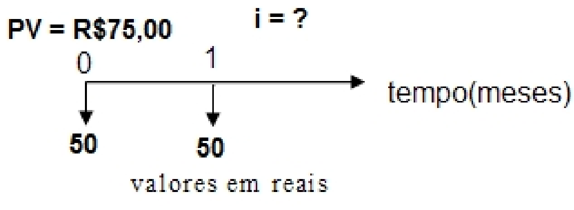
$$PV = PMT_1 + \frac{PMT_2}{(1+i)} + \frac{PMT_3}{(1+i)^2} = 220 + \frac{412}{1,2} + \frac{312}{1,2^2} \Rightarrow PV = R\$780,00.$$

(**2°**) Na pesquisa não era permitido utilizar calculadora científica, mas usando uma do modelo *Casio fx-82MS*, encontra-se facilmente o valor presente PV, que é de PV = R$780,00. Basta apertar as teclas na ordem indicada a seguir:

(**3°**) Na pesquisa não era permitido utilizar calculadora financeira, mas usando uma calculadora financeira HP12C, encontra-se facilmente o valor da taxa de juros, que é de **20% ao mês**. Basta apertar as teclas na ordem indicada a seguir:



• Resolução da <u>questão 2</u> da pesquisa:



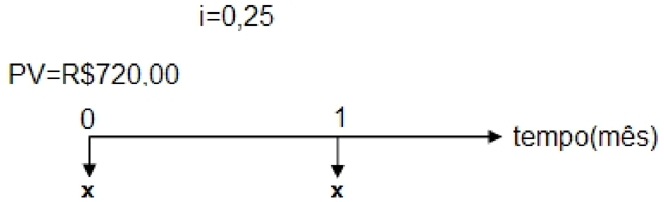
(**1°**) Utilizando a fórmula para comprovar que a taxa é de 100% (i = 1) fornece duas prestações de R$50,00:

$$PMT = \frac{(1+i)^{n-1}.\ i}{(1+i)^n - 1}.PV = \frac{(1+1)^{2-1}.\ 1}{(1+1)^2 - 1}.75 = \frac{2}{2^2 - 1}.75 = \frac{2}{3}.75 = 50 \Rightarrow PMT = R\$50,00.$$

(2°) Não precisa utilizar calculadora científica neste caso, pois os cálculos são simples.

(3°) Na pesquisa não era permitido utilizar calculadora financeira, mas usando uma calculadora financeira HP12C, encontra-se facilmente a taxa de juros mensal, que é de **100%**. Basta apertar as teclas na ordem indicada a seguir:

- **Resolução da <u>questão 3</u> da pesquisa:**

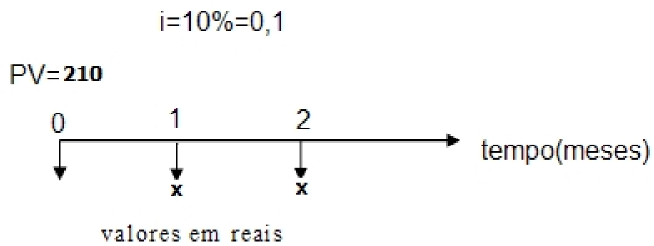


(**1°**) Utilizando a fórmula $PMT = \frac{(1+i)^{n-1}.\ i}{(1+i)^n - 1}.PV = \frac{1{,}25^1.0{,}25}{1{,}25^2 - 1}.720 = 400 \Rightarrow PMT = R\$400{,}00.$.

(**2°**) Na pesquisa não era permitido utilizar calculadora científica, mas usando uma calculadora científica *Casio fx-82MS*, encontra-se facilmente o valor das prestações, que é de **PMT = R$400,00**. Basta apertar as teclas na ordem indicada a seguir:

(3°) Na pesquisa não era permitido utilizar calculadora financeira, mas usando uma calculadora financeira HP12C, encontra-se facilmente o valor das prestações, que é de **PMT = R$400,00**. Basta apertar as teclas na ordem indicada a seguir:

- **Resolução da <u>questão 4</u> da pesquisa:**



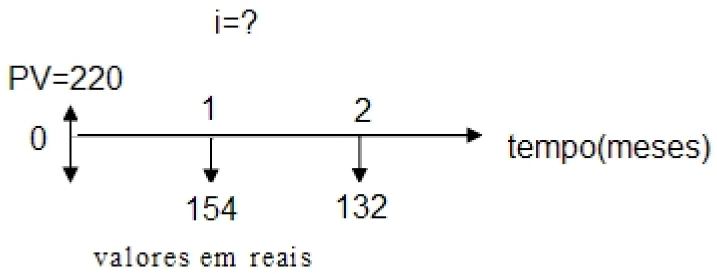
(**1°**) Utilizando a fórmula: $\text{PMT} = \frac{(1+i)^n \,.\, i}{(1+i)^n - 1} \,.\, \text{PV} = \frac{1{,}1^2 . 0{,}1}{1{,}1^2 - 1} . 210 = 121 \Rightarrow \text{PMT} = \text{R\$}121{,}00.$

(**2°**) Na pesquisa não era permitido utilizar calculadora científica, mas usando uma calculadora científica *Casio fx-82MS*, encontra-se facilmente o valor das prestações, que é de **PMT = R$121,00**. Basta apertar as teclas na ordem indicada a seguir:

(3°) Na pesquisa não era permitido utilizar calculadora financeira, mas usando uma calculadora financeira HP12C, encontra-se facilmente o valor das prestações, que é de **PMT = R$121,00**. Basta apertar as teclas na ordem indicada a seguir:

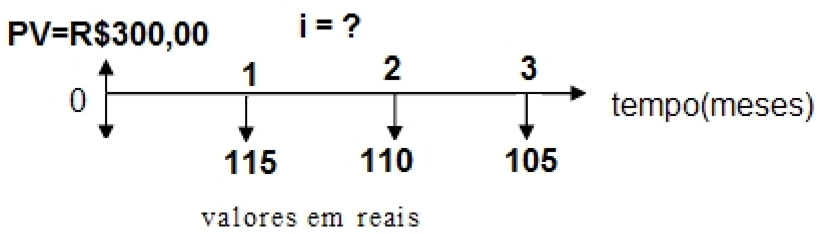
APÊNDICE K: Resoluções dos exemplos 28 e 29, do capítulo 3, para calcular as taxas de juros utilizando-se a calculadora financeira HP12C

- **Resolução do <u>exemplo 28</u> do capítulo <u>3</u>:**



Portanto, a taxa de juros mensal é de **20%**.

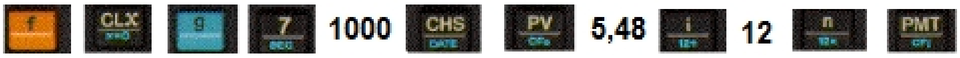
- **Resolução do <u>exemplo 29</u> do capítulo <u>3</u>:**



Portanto, a taxa de juros mensal é de **5%.**

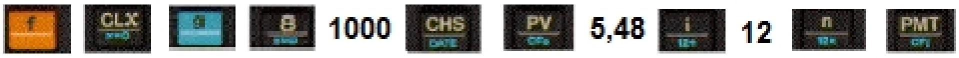
APÊNDICE L: Resoluções dos exemplos 24 e 25 do capítulo 3, utilizando-se a calculadora financeira HP12C

• **Resolução do <u>exemplo 24</u> do capítulo <u>3</u>:**



$\Rightarrow$ PMT = R$109,88.

• **Resolução do <u>exemplo 25</u> do capítulo <u>3</u>:**



$\Rightarrow$ PMT = R$115,90.

APÊNDICE M: Um exemplo de utilização da fórmula $M(t) = C.e^{i.t}$ e sua demonstração

Exemplo: Uma pessoa aplica R$100,00 a 12% ao ano. Determinar, utilizando-se uma calculadora científica, quanto ela terá após 1 ano nos casos em que esses R$100,00 forem acumulados:

(**1°**) anualmente (**2°**) semestralmente (**3°**) quadrimestralmente (**4°**) trimestralmente (**5°**) bimestralmente (**6°**) mensalmente (**7°**) continuamente

Resolução: Têm-se: C = R$100,00 e i = 12% = 0,12. Utilizando a fórmula $M(t) = C.(1+i)^t$, obtém-se:

(**1°**) $M_{1\,\text{ano}} = 100.(1+0{,}12)^{1\,\text{ano}} = 100.1{,}12 = 112$.

(**2°**) $M_{2\,\text{semestres}} = 100.\left(1+\dfrac{0{,}12}{2}\right)^{2\,\text{semestres}} = 100.1{,}06^2 \cong 112{,}36$.

(**3°**) $M_{3\,\text{quadrimestres}} = 100.\left(1+\dfrac{0{,}12}{3}\right)^{3\,\text{quadrimestres}} = 100.1{,}04^3 \cong 112{,}49$.

(**4°**) $M_{4\,\text{trimestres}} = 100.\left(1+\dfrac{0{,}12}{4}\right)^{4\,\text{trimestres}} = 100.1{,}03^4 \cong 112{,}55.$

(**5°**) $M_{6\,\text{bimestres}} = 100.\left(1+\dfrac{0{,}12}{6}\right)^{6\,\text{bimestres}} = 100.1{,}02^6 \cong 112{,}62$.

(**6°**) $M_{12\,\text{meses}} = 100.\left(1+\dfrac{0{,}12}{12}\right)^{12\,\text{meses}} = 100.1{,}01^{12} \cong 112{,}68$.

Nesse momento os próprios estudantes percebem que os montantes estão aumentando. Ao continuar o processo, ou seja, se o intervalo de tempo de acumulação dos R$100,00 for cada vez menor, também podem perceber (mas não é tão óbvio!) que se chegará a um valor máximo (limite) para esse montante após 1 ano.

Sendo **i** a taxa unitária nominal (na mesma unidade do tempo de aplicação **t**), para que um capital **C** seja **acumulado continuamente**, deve-se dividir **i** em **k** partes iguais (**k** tendendo ao infinito). Como em cada unidade de tempo tem-se **k** capitalizações, o total de capitalizações é **k.t**.

Dessa forma, tem-se $M(t) = C.\left(1+\dfrac{i}{k}\right)^{k.t}$, ou de forma equivalente, $M(t) = C.\left(1+\dfrac{1}{\frac{k}{i}}\right)^{k.t}$.

Substituindo-se $\dfrac{k}{i}$ por n ($\dfrac{k}{i} = n \Leftrightarrow k = i.n$), obtém-se $M(t) = C.\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{i.n.t} = C.\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right]^{i.t}$.

Observa-se que **n** tende ao infinito, pois **k** tende ao infinito e **i** é fixo.

Nesse momento os estudantes podem utilizar uma calculadora científica para calcularem o valor de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para valores crescentes de n. Por exemplo, n = 1, n = 2, n = 3, ... , n = 10, ... , n = 50, ... , n = 100, ... e assim sucessivamente. A tabela a seguir apresenta alguns exemplos:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	**2**
2	**2**,25
3	**2**,37037037037037...
10	**2**,59374246010000...
50	**2**,69158802907360...
100	**2,7**0481382942153...
1000	**2,71**692393223552...
10000	**2,718**14592682436...
100000	**2,7182**6823719753...
1000000	**2,71828**046915643...
10000000	**2,718281**69398037...
$n \to \infty$	**e**

Não será demonstrado aqui, com rigor matemático, que existe o limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ = **e** (em que **e** é a base do sistema de logaritmos naturais), mas o que foi feito acima já é uma grande forma de conquistar o estudante do ensino médio para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Conclui-se que para um capital **C** ser **acumulado continuamente** $M(t) = C.\left[\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e}\right]^{i.t}$. Assim, $M(t) = C.e^{i.t}$, sendo **i** a taxa unitária nominal (na mesma unidade do tempo de aplicação **t**).

(**7°**) Se uma pessoa aplicar R$100,00 a 12% ao ano, acumulados continuamente ela terá após 1 ano $100.e^{0,12\,.\,1}$ reais, ou seja, R$112,75.