UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

DISSERTAÇÃO

O problema de Júlio César em Frege

Rafael de Araujo Serra

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

O PROBLEMA DE JÚLIO CÉSAR EM FREGE

RAFAEL DE ARAUJO SERRA

Sob orientação de
Alessandro Bandeira Duarte

Dissertação submetida para obtenção do grau de **Mestre em Filosofia**, no curso de Pós-Graduação em Filosofia.

Seropédica, RJ, Brasil
Maio de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

RAFAEL DE ARAUJO SERRA

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Filosofia** no Curso de Pós-Graduação em Filosofia, área de Concentração em Filosofia.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 04/05/2021

Conforme deliberação número 001/2020 da PROPPG, de 30/06/2020, tendo em vista a implementação de trabalho remoto e durante a vigência do período de suspensão das atividades acadêmicas presenciais, em virtude das medidas adotadas para reduzir a propagação da pandemia de Covid-19, nas versões finais das teses e dissertações as assinaturas originais dos membros da banca examinadora poderão ser substituídas por documento(s) com assinaturas eletrônicas. Estas devem ser feitas na própria folha de assinaturas, através do SIPAC, ou do Sistema Eletrônico de Informações (SEI) e neste caso a folha com a assinatura deve constar como anexo ao final da tese / dissertação.

Alessandro Duarte. Doutor UFRRJ
(Orientador)

Markos Klemz. Doutor UFRRJ

André Pontes. Doutor UFAM

Luciano Vicente. Doutor UFJF

Emitido em 04/05/2021

ATA DE DEFESA DE TESE Nº 152/2021 - PPGFIL (12.28.01.00.00.00.92)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 10/06/2021 11:18)
ALESSANDRO BANDEIRA DUARTE
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptFILO (12.28.01.00.00.00.85)
Matrícula: 1764563

(Assinado digitalmente em 10/06/2021 11:48)
ANDRÉ NASCIMENTO PONTES
ASSINANTE EXTERNO
CPF: 009.438.633-17

(Assinado digitalmente em 14/06/2021 17:34)
LUCIANO VICENTE
ASSINANTE EXTERNO
CPF: 157.199.628-16

(Assinado digitalmente em 10/06/2021 12:21)
MARKOS KLEMZ GUERRERO
ASSINANTE EXTERNO
CPF: 095.059.637-00

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

de Araujo Serra, Rafael, 1993-
d487p O problema de Júlio César em Frege / Rafael de Araujo Serra. - Seropédica, 2021.
72 f.

Orientador: Alessandro Bandeira Duarte.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UFRRJ, 2021.

1. O problema de Júlio César. 2. Critério de identidade. 3. Definição. I. Bandeira Duarte, Alessandro, 1976-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UFRRJ III. Título.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais Lusênia Serra e João Osório Serra que sempre acreditaram em mim, me incentivando ao longo de toda a minha trajetória acadêmica, e por todo o esforço investido na minha educação.

Sou grato ao meu orientador Dr. Alessandro Duarte pela confiança depositada na minha proposta de pesquisa, por me manter motivado e, principalmente, por toda paciência e atenção durante todo o processo.

Por último, quero agradecer também ao curso de pós-graduação em filosofia da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro e a todo o seu corpo docente pelo ensino de excelência proporcionado aos pós-graduandos.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001"

"This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001"

RESUMO

SERRA, Rafael de Araujo. **O problema de Júlio César em Frege**. 2021. 72f. Dissertação (Mestrado em Filosofia). Instituto de Ciências Humanas e Sociais, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2021.

A busca de uma definição adequada dos números e de um critério de identidade para eles são questões quase que indissociáveis na filosofia da matemática de Frege. No presente trabalho, o tema que será examinado, o problema de Júlio César, é um problema que diz respeito tanto a uma proposta de *definição* dos números quanto ao estabelecimento de um *critério de identidade* para eles. O problema de Júlio César ocorre em três situações distintas na obra de Frege. Nas duas primeiras situações, ele atinge, respectivamente, a primeira e a segunda *definição* dos números cardinais que Frege oferece em seu segundo livro *Os Fundamentos da Aritmética*. Na terceira situação, ele atinge o *critério de identidade* para os números que Frege fornece em seu terceiro livro *As Leis Básicas da Aritmética*. Dito isso, os meus objetivos principais são dois: (1) determinar se o problema de Júlio César que ocorre nessas três situações distintas é ou não é o mesmo problema; (2.1) no caso de se tratar do mesmo problema, identificar o que é o problema de Júlio César de uma maneira geral; (2.2) no caso de não se tratar do mesmo problema, verificar qual é o problema de Júlio César em cada situação específica. Além disso, irei criticar a interpretação *lógica* de Greimann e a interpretação *semântica* de Heck do problema de Júlio César em *Os Fundamentos da Aritmética* e em *As Leis Básicas da Aritmética*. Concluirei a dissertação apresentando e rejeitando duas interpretações alternativas do problema em questão, uma interpretação metafísica e uma outra epistemológica, e argumentando a favor da minha própria interpretação *formal* do problema de Júlio César nos dois livros citados.

Palavras-chave: Problema de Júlio César; Critério de Identidade; Definição.

ABSTRACT

SERRA, Rafael de Araujo. **Julius Caesar problem in Frege**. 2021. 72p. Dissertation (Master of Philosophy). Instituto de Ciências Humanas e Sociais, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2021.

The search for an adequate *definition* of numbers and for a *criterion of identity* for them are questions almost indissociable in Frege's philosophy of mathematics. In the present work, the topic to be examined, the Julius Caesar problem, is a problem that concerns both a proposal for a *definition* of numbers and the establishment of a *criterion of identity* for them. The Julius Caesar problem takes place in three distinct situations in Frege's writings. In the first two situations, it affects, respectively, the first and the second *definition* of cardinal numbers that Frege gives in his second book *The Foundations of Arithmetic*. In the third situation, it affects the *criterion of identity* for numbers that Frege gives in his third book *Basic Laws of Arithmetic*. All that being said, my main goals are two: (1) to determine whether the Julius Caesar problem that occurs in these three distinct situations is the very same problem or not; (2.1) if the problems in question are the same, to identify in general terms what the Julius Caesar problem is; (2.2) if this is not the case, to verify what is the Julius Caesar problem in each individual situation. Furthermore, I will criticize both Greimann's *logical* approach and Heck's *semantical* approach to the Julius Caesar problem in *The Foundations of Arithmetic* and in *Basic Laws of Arithmetic*. I conclude my dissertation by presenting and rejecting two alternative approaches to the problem in question, a metaphysical approach and an epistemological one; simultaneously, I argue in favor of my own *formal* approach to the Julius Caesar problem in both books just mentioned.

Keywords: Julius Caesar Problem; Criterion of identity; Definition.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Podemos dizer que Frege é um dos maiores filósofos da matemática, se não o maior, que já existiu. *Os Fundamentos da Aritmética*, o seu segundo livro, é o maior clássico nesse tema escrito até hoje, e *As Leis Básicas da Aritmética*, o seu terceiro e último livro, expressa o pensamento maduro de Frege em relação às discussões iniciadas no segundo livro. Uma vez que Frege é um dos maiores filósofos de um campo (filosofia da matemática) tão importante para a filosofia analítica, e podemos discutir se ele não é o próprio fundador da filosofia analítica, Frege merece um posto dentre os maiores filósofos da contemporaneidade. Assim sendo, entender o desenvolvimento de seu pensamento ao longo de toda a sua obra torna-se uma tarefa muito importante. Visto que o problema de Júlio César aparece em livros tanto da juventude filosófica de Frege (*Os Fundamentos da Aritmética* de 1884) como da sua maturidade filosófica (*As Leis Básicas da Aritmética* de 1893), tal problema é um excelente ponto de partida para tentarmos entender o desenvolvimento e o amadurecimento do pensamento desse grande filósofo.

Como veremos no primeiro capítulo, Frege foi um revolucionário na história da lógica, gozando, hoje em dia, do título de pai da lógica matemática moderna. Ao discutirmos o problema de Júlio César tanto em *Os Fundamentos da Aritmética* como em *As Leis Básicas da Aritmética*, nós estaremos possibilitando a compreensão das peculiaridades do pensamento de Frege que lhe permitiram entrar para a história da lógica e, de maneira geral, para a história da filosofia. Deste modo, o problema de Júlio César é um tema de extrema importância exegética.

Além de uma importância exegética, o problema de Júlio César também possui uma importância filosófica. A execução do projeto logicista vislumbrada por Frege tem como concepção subjacente um realismo matemático. Para fundamentar logicamente a aritmética, Frege não abre mão da tese de que os números existem, ainda que como entidades abstratas. Para Frege, além do mais, não basta simplesmente que os números existam. Na condição de entidades básicas da aritmética, os números devem também possuir um critério de identidade satisfatório que, por sua vez, nos permitiria acessá-los. E é aqui que se encontra a importância filósofica do problema de Júlio César. Como veremos no segundo capítulo, o problema de Júlio César atinge a segunda definição de Frege dos números cardinais. Tal definição tem justamente a forma de um critério de identidade. Ela é um critério para a identidade numérica. No capítulo 3, além disso, veremos que o problema em questão também afeta a tentativa de Frege de introduzir percursos de valor. Frege tenta introduz tais objetos fornecendo um critério de identidade para eles. Ora, uma vez que, em *As Leis Básicas da Aritmética*, Frege define os números individuais como percursos de valor, tal critério de identidade também seria um critério para a identidade numérica. Portanto, o problema de Júlio César, longe de ser um assunto trivial, é um problema filosófico, à medida que ele afeta as tentativas de Frege de fornecer um critério de identidade para os números, impossibilitando assim o acesso a eles.

A fim de abordar o problema de Júlio César, eu dividi essa dissertação em 4 capítulos. No capítulo 1, "Frege e o projeto logicista", eu falo da importância de Frege para a história da filosofia, apresentando as suas contribuições como lógico. Além disso, faço uma introdução ao projeto logicista de Frege, apresento o objetivo geral de sua obra e os respectivos objetivos específicos de cada trabalho seu. No capítulo 2, "*Os Fundamentos da Aritmética* e o problema de Júlio César", eu discuto *Os Fundamentos da Aritmética* como um todo e, em especial, o problema de Júlio César que atinge a primeira e a segunda definição dos números cardinais. Apresento, logo em seguida, as interpretações de Dirk Greimann e Richard Kimberly Heck do problema em questão. No terceiro capítulo, "*As Leis Básicas da Aritmética* e o problema de Júlio César", eu faço uma conexão entre *Os Fundamentos da Aritmética* e *As Leis Básicas da Aritmética*, dizendo que no último se encontra a execução daquilo que no primeiro foi traçado e esboçado. Obviamente, também discuto o problema de Júlio César que ocorre na seção 10 desse terceiro livro, e que afeta a tentativa de Frege de introduzir e explicar nomes para percursos de valor. Ainda no capítulo 3, apresento novamente as interpretações de Greimann e Kimberly Heck, só que agora do problema de Júlio César que afeta a introdução dos nomes de percursos de valor. Por fim, no último capítulo, em que se encontram as minhas considerações finais, faço uma retomada de tudo que foi dito até então, e discuto a minha própria interpretação do problema de Júlio César.

1 FREGE E O PROJETO LOGICISTA

Gottlob Frege (1848-1925) foi um matemático e lógico alemão. O seu trabalho em matemática teve como principais objetos de estudo a lógica matemática e os fundamentos da aritmética. Ao investigar esses objetos, Frege deu a sua obra um caráter filosófico e, por isso, ele também é tido como um filósofo. Hoje em dia, Frege é considerado o principal personagem dentre aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a fundação da lógica matemática moderna, e é por esse motivo que ele é visto por muitos, com justiça, como um lógico muito importante. O seu primeiro livro, a *Conceitografia*, publicado em 1879 e no qual encontramos a primeira versão de seu sistema lógico, representa para a história da lógica algo semelhante aos *Analíticos* de Aristóteles. Contudo, os dois tiveram importâncias distintas: enquanto Aristóteles instituiu o estudo da lógica como disciplina filosófica, Frege foi o grande responsável por um desenvolvimento revolucionário em tal disciplina. A sua obra foi revolucionária, entre outras coisas, pelos seguintes aspectos inovadores: nela, encontramos uma formulação nítida do conceito de função lógica; encontramos, além do mais, a primeira aparição de quantificadores em lógica formal, incluindo quantificação de segunda ordem; e, por fim, ela contém o primeiro tratamento formal de quantificação múltipla. Mais impressionante ainda é que, assim como Aristóteles em seus *Analíticos*, Frege apresenta essas ideias inovadoras de uma maneira sistemática e exemplar. Na *Conceitografia*, encontramos um sistema sem lacunas no qual todos os teoremas são derivados logicamente de um pequeno conjunto de axiomas. Complementarmente ao pequeno conjunto de axiomas, o sistema de Frege também contém poucas regras de inferência, o que acaba tornando longas as provas dos mais simples teoremas.

A escolha de Frege por uma abordagem sistemática é devido a sua concepção de lógica: "O método de prova mais seguro é, obviamente, o estritamente lógico, que, desconsiderando as características particulares das coisas, baseia-se exclusivamente nas leis sobre as quais todo o conhecimento se apoia." (FREGE, 1972, p. 103)[1]. Para Frege, a lógica é uma sistematização rigorosa das leis da razão; é a ciência que descreve aquelas leis que governam o pensamento. O pensamento, por sua vez, não deve ser confundido com processos psicológicos e subjetivos que invariavelmente ocorrem em nós, e os quais Frege chama de ideias. Para Frege, a reprodução de conteúdos através das sentenças de sua linguagem lógica deve abstrair toda e qualquer subjetividade, que é completamente irrelevante para as cadeias de inferência. Aquilo que é relevante para a formulação de cadeias de inferência é chamado por Frege, na *Conceitografia*, de *conteúdo conceitual* (FREGE, 1972, §3) e, em *Sobre o Sentido e a Referência*, de *referência* (*Bedeutung*).

---

[1] "The firmest method of proof is obviously the purely logical one, which, disregarding the particular characteristics of things, is based solely upon the laws on which all knowledge rests."

Na *Conceitografia*, duas sentenças expressam o mesmo conteúdo conceitual (judicável) se delas, juntamente com um determinado conjunto de sentenças S, se seguem as mesmas consequências lógicas. Para Frege, a lógica deve lidar somente com o conteúdo conceitual das sentenças, e a sua Conceitografia foi idealizada justamente "[...] para expressar um conteúdo (conceitual) por meio de símbolos escritos de uma maneira mais precisa e perspícua do que é possível com palavras." (FREGE, 1972, p. 90-91)[2]. Quando ele fala em leis da razão, ele está se referindo àquelas leis que determinam o que é *validamente* pensável, isto é, que determinam quais inferências estamos legitimados a fazer, de maneira que o objetivo da lógica é especificar o modo como nós devemos necessariamente pensar a fim de que nossos pensamentos se encontrem dentro das leis da razão.

É também na *Conceitografia* que Frege nos diz, logo no prefácio, o seu principal objetivo: estabelecer uma fundamentação lógica da aritmética. O projeto de fundamentar logicamente a aritmética tem como condição necessária e suficiente a demonstração de que a última é redutível à lógica, ou seja, a verificação da tese logicista. De acordo com tal tese, designada por "logicismo" e defendida primeiramente por Frege[3], não há nenhuma diferença essencial ou substancial entre a aritmética e a lógica; ainda que não aparentem superficialmente, elas são, no fundo, uma e a mesma ciência. Tal maneira de conceber a relação entre essas duas ciências é exposta na seguinte passagem de *Os Fundamentos da Aritmética*:

> Não menos essencial para a matemática do que a recusa de toda a assistência por parte da psicologia é o reconhecimento de sua ligação íntima com a lógica. Eu ouso a concordar com aqueles que sustentam que é impossível separar nitidamente ambas. Todos deveriam ao menos conceder que toda investigação acerca da cogência de uma prova ou da justificação de uma definição é uma questão lógica. Mas tais questões não podem simplesmente ser eliminadas da matemática, pois é somente fornecendo uma resposta a elas que nós podemos alcançar a certeza necessária. (FREGE, 1960, p. XXI)[4]

Numa outra passagem, além disso, Frege quase que identifica as leis da aritmética (as

[2] "[...] to express a [conceptual] content through written symbols in a more precise and perspicuous way than is possible with words"

[3] Apesar de Frege ser considerado o primeiro logicista, o projeto fregeano numa forma embrionária já é encontrado em outros autores, como o próprio Frege (1960, §15) insinua ao expor brevemente as ideias de Leibniz e W. S. Jevons.

[4] "No less essential for mathematics than the refusal of all assistance from the direction of psychology, is the recognition of its close connexion with logic. I go so far as to agree with those who hold that it is impossible to effect any sharp separation of the two. This much everyone would allow, that any enquiry into the cogency of a proof or the justification of a definition must be a matter of logic. But such enquiries simply cannot be eliminated from mathematics, for it is only through answering them that we can attain to the necessary certainty."

leis dos números), que são, para ele, juízos analíticos[5], com as leis da lógica (as leis do pensamento):

> O fato de que isto é possível mostra que os axiomas da geometria são independentes um do outro e das leis primitivas da lógica, e, consequentemente, são sintéticos. O mesmo pode ser dito das proposições fundamentais da ciência dos números? Aqui, basta que tentemos negar qualquer uma delas e nos encontraríamos completamente confusos. Até mesmo pensar não mais pareceria possível. A base da aritmética é mais profunda, me parece, do que a base de qualquer das ciências empirícas, e até mais do que a base da geometria. As verdades da aritmética governam tudo que é enumerável. Este é o domínio mais amplo de todos; pois a ele pertence não apenas o efetivamente real, não apenas o intuível, mas tudo que se pode pensar. As leis dos números não deveriam, portanto, ter uma relação muito íntima com as leis do pensamento? (FREGE, 1960, §14)[6]

Os logicistas acreditam, desse modo, que podemos desenvolver toda a aritmética unicamente a partir da lógica, ao definirmos todos os termos e conceitos aritméticos por meios puramente lógicos e deduzirmos, com a ajuda de regras de inferência que preservam verdade, todos os teoremas da aritmética a partir de axiomas da lógica e definições. Não haveria, portanto, axiomas e regras de inferência de cunho exclusivamente aritmético; todos eles seriam, igualmente, teoremas e regras de inferência da lógica.

Frege considerava a lógica como um meio, ou caminho, para resolver o problema da carência de uma fundamentação satisfatória para a aritmética. Para entendermos a solução que Frege idealizava para tal problema, levemos em conta que, em seu sistema, é possível rastrearmos as cadeias de inferência de modo a chegarmos a um conjunto de pressupostos, ou princípios do pensamento, que não precisam, eles mesmos, ser justificados. Tal conjunto de princípios, para Frege, representaria o ponto de origem de todo o conhecimento aritmético, que seria derivável desse conjunto com o auxílio da

[5] Por juízo analítico, Frege entende um juízo cuja a justificação está pautada somente em definições e leis lógicas. Por outro lado, um juízo sintético é aquele cuja a justificação tem de estar pautada em leis que governam uma ciência específica. Além disso, uma verdade tem o caráter *a priori* se a sua demonstração está baseada somente em leis gerais, que em si mesmas não são demonstráveis. Por fim, uma verdade é *a posteriori* para Frege se em sua prova recorrermos necessariamente a enunciados que expressem fatos particulares. As definições do próprio Frege se encontram em Frege (1960, §3).

[6] "The fact that this is possible shows that the axioms of geometry are independent of one another and of the primitive laws of logic, and consequently are synthetic. Can the same be said of the fundamental propositions of the science of number? Here, we have only to try denying any one of them, and complete confusion ensues. Even to think at all seems no longer possible. The basis of arithmetic lies deeper, it seems, than that of any of the empirical sciences, and even than that of geometry. The truths of arithmetic govern all that is numerable. This is the widest domain of all; for to it belongs not only the actual, not only the intuitable, but everything thinkable. Should not the laws of number, then, be connected very intimately with the laws of thought?"

lógica. Assim, a solução de Frege para o problema em questão se daria por meio do rastreamento das cadeias de inferência de todos os teoremas da aritmética, com o objetivo de encontrar, ao fim desse procedimento de rastreamento, os princípios do pensamento mencionados. Ao encontrar esse conjunto de princípios, Frege analisaria a natureza de cada um deles, descobrindo, assim, que são princípios lógicos, e determinando, consequentemente, que a natureza do conhecimento aritmético também é lógica, uma vez que os teoremas da aritmética seriam derivados desse conjunto de princípios. Caso o sistema em que derivamos os teoremas da aritmética fosse um que, por um lado, está pautado em axiomas lógicos, mas no qual, por outro lado, existem provas com lacunas, não haveria razões para acreditarmos que a aritmética tem uma natureza lógica, pois não teríamos certeza se as provas dos teoremas da aritmética dependem somente de axiomas lógicos e definições em conjunção com regras de inferência que preservam verdade. A possibilidade de tal incerteza é indicada por Frege na conclusão de *Os Fundamentos da Aritmética*:

> Eu não alego ter tornado mais do que provável o caráter analítico das proposições aritméticas, uma vez que ainda podemos sempre duvidar se elas são dedutíveis unicamente a partir de leis puramente lógicas, ou se, em alguma parte, algum outro tipo de premissa não tenha se envolvido em suas provas sem que nós tenhamos percebido. Esta dúvida não será completamente dissipada nem mesmo pelas indicações que dei de como provar algumas das proposições; ela só pode ser removida pela produção de uma cadeia de deduções sem lacunas, de tal modo que nenhum passo que não esteja em conformidade com algum dos poucos princípios de inferência reconhecidos como puramente lógicos seja dado. (FREGE, 1960, §90)[7]

E é justamente para evitar essa situação que Frege (1960, §4) faz questão de que, em sua lógica, sejam construídas somente provas sem lacunas, pois, se num sistema há somente provas sem lacunas, o rastro das inferências que ocorrem dentro de uma prova nunca se perde e, desse modo, a natureza daquilo que é derivado pode sempre ser determinada com base na natureza das sentenças a partir das quais fazemos derivações.

Para que tudo isso seja possível, a linguagem criada por Frege, a Conceitografia, deve ser uma linguagem lógica artificial na qual possamos representar de maneira clara e precisa inferências lógicas, por meio da revelação da estrutura oculta das sentenças;

[7] "I do not claim to have made the analytic character of arithmetical propositions more than probable, because it can still always be doubted whether they are deducible solely from purely logical laws, or whether some other type of premiss is not involved at some point in their proof without our noticing it. This misgiving will not be completely allayed even by the indications I have given of the proof of some of the propositions; it can only be removed by producing a chain of deductions with no link missing, such that no step in it is taken which does not conform to some one of a small number of principles of inference recognized as purely logical."

ou seja, para que a Conceitografia torne visível o modo como sentenças estão logicamente relacionadas, nela devemos poder formular de maneira exata a forma lógica dessas sentenças. Uma tal formulação exata, segundo Frege, não é realizável na linguagem ordinária, à medida que na mesma, tradicionalmente, sentenças são analisadas em termos de sujeito e predicado. Frege (1972, §3 e §9), então, abandona a distinção sujeito/predicado e propõe, em contrapartida, uma análise em termos de função e argumento[8], que tem por objetivo justamente facilitar a representação das relações lógicas que existem entre sentenças.[9] Uma vez que a linguagem ordinária é logicamente imperfeita, pois ela não revela a estrutura lógica das sentenças, a Conceitografia representaria determinados conteúdos de modo mais preciso do que ela e, por isso, seria a mais adequada para revelarmos as relações lógicas que existem entre sentenças.

Descrevemos acima o modo como Frege concebia a lógica, a saber, como o instrumento por meio do qual poderíamos fundamentar satisfatoriamente a aritmética. Aqui, a lógica é vista como a linguagem dentro da qual seria possível levar a cabo o projeto logicista, e a qual Frege chamava de "Conceitografia". No entanto, em Frege, há ainda uma segunda concepção de lógica. Nessa concepção, a lógica não é meramente a ferramenta que ajudaria a dar fim as preocupações de Frege quanto à aritmética, mas sim é a ciência do pensar humano enquanto tal. Frege também considerava a lógica

[8] Para ilustrarmos o que Frege quer dizer com "função" e "argumento", consideremos o seguinte: suponhamos que "*a*" designe o indivíduo Arquimedes e que "*M*" designe o conceito *ser matemático*. Assim, o enunciado "*M(a)*" significará *Arquimedes é matemático*. Agora, suponhamos que "*g*" e "*p*" designem, respectivamente, os indivíduos Gauss e Pascal. Assim sendo, os enunciados "*M(g)*" e "*M(p)*" significarão, respectivamente, *Gauss é matemático* e *Pascal é matemático*. O que os três enunciados acima têm em comum, isto é, "*M( )*", é justamente aquilo que, para Frege, significa uma função. O que muda de um enunciado para o outro, a saber, "*a*", "*g*" e "*p*", são exemplos do que, para Frege, significam argumentos. Portanto, dentre as partes que compõem o significado de um enunciado, a função é aquela que sempre permanece inalterada, enquanto o argumento é a parte substituível. A parte substituível, no entanto, não precisa ser um indivíduo ou objeto em geral. Suponhamos, por exemplo, que "*F*" e "*C*" designem, respectivamente, os conceitos *ser filósofo* e *ser católico*. Deste modo, "*F(p)*" significará *Pascal é filósofo* e "*C(p)*" significará *Pascal é católico*. Ora, se analisarmos os três enunciados "*M(p)*", "*F(p)*" e "*C(p)*", aquilo que se modifica de um para o outro, isto é, "*M*", "*F*" e "*C*", não significa um objeto, mas sim um conceito de primeira ordem; ou seja, a parte substituível do significado de um enunciado também pode ser um conceito. No caso dos três enunciados em questão, a parte que permanece inalterada significa, para Frege, um conceito de segunda ordem.

[9] As distinções sujeito/predicado e função/argumento são formas de analisarmos uma sentença. Tomemos, como exemplo, a sentença "Arístóteles é discípulo de Platão". Uma análise sujeito/predicado dessa sentença nos diria que "Aristóteles" é o seu sujeito e "é discípulo de Platão" o seu predicado. Essa é a única maneira de analisarmos essa sentença de acordo com a distinção sujeito/predicado. Por outro lado, a distinção função/argumento nos oferece uma multiplicidade de análises da sentença "Aristóteles é discípulo de Platão". Numa primeira análise, "ser discípulo de Platão" e "Aristóteles" significariam, respectivamente, a função e o argumento da sentença acima. Já numa segunda, "ser mestre de Aristóteles" significaria a função e "Platão" o argumento. Ainda numa terceira análise, "ser discípulo de" significaria a função (binária) da sentença e "Aristóteles" e "Platão" significariam os seus argumentos. Por fim, numa última análise, "ser mestre de" significaria a função (binária) da sentença em questão e "Platão" e "Aristóteles" significariam os seus argumentos. Em todas as análises apresentadas acima, "Aristóteles é discípulo de Platão" significa o mesmo, isto é, expressa o mesmo conteúdo. Para Frege (1972, §9), a distinção função/argumento nunca diz respeito ao conteúdo de uma sentença, mas somente à maneira de enxergá-la.

como um campo de estudo, como um objeto a ser investigado. Isso não significa, porém, que há uma independência da lógica em relação a aritmética. Significa apenas que a lógica não é *ancilla*[10] da aritmética, que ela não existe somente para servir aos objetivos do aritmético. Enquanto ciência, a lógica também tem as suas próprias leis: as leis do pensamento (ou da razão). Como o próprio nome sugere, essas leis governam o domínio do pensável, ou do contável (para Frege, os domínios do pensável e do contável são um e o mesmo domínio), que é o domínio mais abrangente que se pode imaginar. Semelhante às ciências naturais, a lógica também descreve a realidade, mas com uma diferença: enquanto as ciências naturais tratam de porções da realidade, a lógica é a ciência que trata das características mais gerais da realidade. A lógica captura essas características em forma de leis e, deste modo, contém também um aspecto prescritivo. Assim como as leis de uma sociedade, que prescrevem como os indivíduos que nela vivem devem se comportar, as leis da lógica, igualmente, prescrevem como devemos pensar. Mas aqui também há uma diferença importante: as leis de uma sociedade têm um caráter convencional, dependendo, assim, da concordância daqueles que legislam, enquanto as leis da lógica, ao mesmo tempo que prescrevem o validamente pensável, têm compromisso apenas com a realidade que corretamente descrevem.

Infelizmente, as ideias de Frege não foram completamente compreendidas de início e, consequentemente, os seus méritos só foram tardiamente reconhecidos. Em sua época, principalmente dentro do ambiente acadêmico, Frege não foi considerado mais do que um simples professor universitário sem grandes sucessos. Somente no início do século XX, o trabalho de Frege começou a ser adequadamente reverenciado. Dentro da Alemanha, ele foi citado em textos do célebre filósofo Edmund Husserl; mas foi principalmente no exterior que Frege fez fama, ao ser mencionado, por exemplo, pelo matemático britânico Bertrand Russell ao longo de sua obra.[11] Devido ao fato de que a importância de seu trabalho não foi reconhecida de imediato, Frege resolveu, antes mesmo de aplicar o sistema lógico desenvolvido na *Conceitografia* para a demonstração do logicismo, oferecer uma introdução filosófica ao seu projeto, que foi publicada em 1884 sob o título "*Os Fundamentos da Aritmética*". A tentativa de demonstração do logicismo através de provas formais e detalhadas só foi realizada em seu livro *As Leis Básicas da Aritmética*, no qual se encontra a versão amadurecida da lógica revolucionária de Frege, e cujo os dois volumes foram publicados em 1893 e 1903, respectivamente. *Conceitografia*, *Os Fundamentos da Aritmética* e *As Leis Básicas da Aritmética* foram os únicos livros que Frege publicou ao longo de toda a sua vida, e o objetivo principal dos três é instituir o logicismo. Frege também publicou alguns artigos, dentre os quais se encontram *Função e Conceito*, de 1891, *Sobre Conceito e Objeto*, de 1892, e *Sobre o Sentido*

[10] "*ancilla*" é uma palavra latina e significa serva. Ela era o termo utilizado na Europa cristã da Idade Média para se referir ao papel da filosofia em relação à teologia.

[11] Russell faz referência a Frege em seu livro *Principles of Mathematics* (1903) e em seu artigo *On Denoting* (1905).

e a Referência, também de 1892. Os três artigos visam fornecer uma fundamentação filosófica para as distinções necessárias ao projeto logicista de Frege.

Antes de discutir *FA*[12] e, em especial, o problema de Júlio César em *FA*, gostaria de apresentar algumas definições que Frege propõe na *Conceitografia* de conceitos importantes que são utilizados nas definições fornecidas em *FA*. O primeiro conceito a ser definido é o de hereditariedade, que é uma relação de segunda ordem[13]. Para Frege (1972, §24), uma propriedade F é hereditária numa relação R se e somente se, para quaisquer objetos x e y, se x tem a propriedade F e x está na relação R com y, então y também tem a propriedade F. Simbolicamente:

- $Her_{\alpha\beta}(F(\alpha), R(\alpha, \beta)) \equiv_{def} \forall x \forall y((F(x) \land R(x, y)) \longrightarrow F(y))$

O segundo conceito a ser definido é o de ancestral forte, que é uma relação de primeira ordem. Segundo Frege (1972, §26), x é ancestral forte de y na R-sequência se e somente se, para qualquer propriedade F, se F é hereditária na relação R e para todo z, se x está na relação R com z implicar que z tem F, então y também tem a propriedade F. Simbolicamente:

- $R^*(x, y) \equiv_{def} \forall F\{[\forall x \forall y((F(x) \land R(x,y)) \longrightarrow F(y)) \land \forall z(R(x,z) \longrightarrow F(z))] \longrightarrow F(y)\}$

Em outras palavras, x é ancestral forte de y na R-sequência se e somente se y vem depois de x na R-sequência. O próximo conceito é o de ancestral fraco, outra relação de primeira ordem. De acordo com Frege (1972, §29), x é ancestral fraco de y na R-sequência se e somente se x é ancestral forte de y na R-sequência ou y é igual a x. Simbolicamente:

- $R^{**}(x, y) \equiv_{def} R^*(x, y) \lor (y = x)$

Ou seja, x é ancestral fraco de y na R-sequência se e somente se y pertencer a R-sequência iniciada por x. O conceito de ancestral fraco é muito importante na definição de Frege do conceito de número natural (cardinal finito) em *FA*. Para Frege (1960, §83), n é um número natural (cardinal finito) se e somente se 0 é ancestral fraco de n na S-sequência, que é a sequência dada pela relação *ser sucessor imediato* ($S(\, , \,)$) e iniciada por 0. Simbolicamente:

[12] Daqui em diante, ao escrever ''*FA*'', refiro-me a "*Os Fundamentos da Aritmética*" .

[13] Uma relação de segunda ordem é uma função $\Phi(F, G)$ (em que 'F' e 'G' representam os espaços de argumento da função Φ e percorrem funções de primeira ordem) cujo o valor para quaisquer argumentos é sempre um valor de verdade.

- $\mathbb{N}n \equiv_{def} S^{**}(0, n)$

Dada a definição de Frege de ancestral fraco, n será um número natural se e somente se 0 for ancestral forte de n na S-sequência ou n for igual a 0. Simbolicamente:

- $\mathbb{N}n \equiv_{def} S^{*}(0, n) \vee (n = 0)$

Por fim, Frege (1972, §31) define funcionalidade, que é um conceito de segunda ordem[14]. Uma relação R é funcional se e somente se, para todo x, y e z, se x está na relação R com y e x está na relação R com z, então y é igual a z. Simbolicamente:

- $Func_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta) \equiv_{def} \forall x \forall y \forall z((R(x, y) \wedge R(x, z)) \longrightarrow y = z)$

[14] Um conceito de segunda ordem é uma função $\Phi(F)$ (em que 'F' representa o espaço de argumento da função Φ e percorre funções de primeira ordem) cujo o valor para qualquer argumento é sempre um valor de verdade.

2 *OS FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA* E O PROBLEMA DE JÚLIO CÉSAR

Em *FA*, Frege dá prosseguimento ao programa de uma fundamentação lógica para a aritmética. Aqui, ele está preocupado com a natureza dos números cardinais e com o conceito de número natural. Frege quer definir o conceito de número por meios puramente lógicos, para que, com o auxílio de tal definição, seja possível provar logicamente as leis básicas da aritmética. Esse objetivo, no entanto, não é nada simples de ser alcançado, pois, apesar do conceito de número ser um dos conceitos aritméticos mais simples, ainda assim, de acordo com Frege (1960, p. XVI), ele é mais delicado do que a maioria dos conceitos que encontramos em outras ciências. Uma definição do conceito de número em termos estritamente lógicos, por sua vez, não é importante apenas do ponto de vista do logicismo, mas também porque Frege acredita que somente através de um tal tipo de definição podemos ser bem-sucedidos "[...] em alcançar o conhecimento de um conceito em sua forma pura, em despí-lo dos invólucros irrelevantes que o obscurecem aos olhos da mente" (FREGE, 1960, p. XIX)[15]. Portanto, as principais questões que Frege visou responder e que, assim, orientaram-no na elaboração do livro, são: O que são os números? Eles podem ser definidos? As leis básicas da aritmética podem ser provadas a partir das definições dos números por meios puramente lógicos? As sentenças da aritmética são analíticas ou sintéticas?[16]

Essas questões eram importantes para Frege porque, até a época da publicação de *FA*, nenhuma fundamentação satisfatória da aritmética havia sido fornecida, de modo que a tarefa mais urgente no que dizia respeito a essa disciplina era fundamentá-la em bases mais sólidas. Antes de ter se dirigido a essa tarefa, Frege (1960, p. XVI) considerou importante nos dizer, primeiramente, o porquê que era insatisfatório tudo o que foi dito até então sobre os fundamentos da aritmética. Assim, *FA* está dividida em duas partes. A primeira parte está direcionada a uma crítica contra teorias existentes na época sobre a fundamentação da aritmética. Nessa parte, Frege critica pensadores como Mill, Kant, Moritz Cantor, Schröder e Hankel, dentre os quais alguns são contemporâneos dele. Na segunda parte, Frege apresenta de uma maneira informal, ampla e aprofundada as suas estratégias para a construção de provas e as suas definições dos números naturais e do conceito de número cardinal, sendo a simbologia e o mecanismo introduzidos na *Conceitografia* poucos utilizados. Frege adotou uma abordagem informal porque, dentre as finalidades de *FA*, está a de motivar o projeto logicista, explicando como as definições e provas que ele pretende fornecer podem ajudar a identificar a fonte de

[15] "[...] in achieving knowledge of a concept in its pure form, in stripping off the irrelevant accretions which veil it from the eyes of the mind"

[16] Essa questão, em particular, tem para Frege uma importância antes filosófica do que matemática, e ela é formulada em Frege (1960, §3).

nosso conhecimento da aritmética.[17]

FA começa com a pergunta "O que é o número um?" (FREGE, 1960, p. XIII). Na introdução, Frege (1960, p. XIV) diz que os matemáticos de sua época não foram capazes de dar uma resposta satisfatória para essa pergunta. Segundo ele, os pontos de vista predominantes sobre a natureza dos números naturais e dos enunciados da aritmética estavam equivocados, à medida que eles faziam referência, em última instância, ou ao conteúdo da experiência ou à forma da experiência. O conteúdo da experiência diz respeito às sensações particulares que os seres humanos vivenciam ao utilizarem os seus órgãos dos sentido. Frege (1960, §7) critica, em particular, John Stuart Mill, um filósofo britânico do século XIX que sustentava que as verdades aritméticas estão fundadas, no fim das contas, em nossas experiências sensoriais. Mill dizia que expressões como "5" e "2 + 7" designam agregados de coisas, e que os enunciados da aritmética relatam fatos empíricos sobre a formação ou composição de agregados. Em oposição a Mill, Frege diz que um número não é nem um agregado de coisas, nem uma propriedade de um agregado, e que as nossas observações particulares não são nem um pouco relevantes para o caráter verdadeiro dos enunciados aritméticos.

A forma da experiência, por outro lado, diz respeito àquela estrutura à qual todas as experiências humanas devem se submeter, e que determina, em especial, que qualquer acontecimento e qualquer objeto esteja dado no tempo e localizado no espaço. Tal estrutura está na base de todas as nossas intuições, como, por exemplo, de nossas intuições espaciais. Alguns autores, dentre eles o renomado filósofo alemão Immanuel Kant, defenderam que a aritmética, em última instância, está pautada nessa estrutura. Por essa razão, Kant sustentava que as sentenças da aritmética são sintéticas, e não analíticas. Frege, em contrapartida, diz que a estrutura que constitui a forma da experiência humana não desempenha nenhum papel na justificação de sentenças da aritmética e, assim, na fundamentação da própria aritmética. Para rebater Kant, Frege (1960, §5) alega que verdades aritméticas como $263598 + 59687 = 323285$ não tem a sua fonte de justificação em tal estrutura, pois elas não são intuitivamente verdadeiras, tampouco intuitivamente evidentes, e, assim, não seriam juízos sintéticos. Para Frege, o fato de que as nossas experiências estão estruturadas de uma certa maneira pode até indicar o modo como nós chegamos a descobrir determinadas verdades, ou o porquê que nós compreendemos algumas verdades mais facilmente do que outras, mas não que a estrutura mencionada nos fornece uma base racional para a justificação da aritmética. Frege (1960, §87) defende que as leis aritméticas são juízos analíticos, e essa sua crítica

[17] A opção de Frege por utilizar a linguagem ordinária para escrever *FA* se deve, muito provavelmente, à sugestão de Stumpf de que as suas ideias seriam melhor compreendidas e, assim, gozariam de uma maior popularidade se fossem apresentadas, primeiramente, de uma maneira informal. A ideia de Frege, inicialmente, era publicar um segundo livro em que ele já tentaria demonstrar a tese logicista fazendo uso da linguagem formal da *Conceitografia*, ideia cuja a tentativa de execução foi então adiada para o seu terceiro livro *As Leis Básicas da Aritmética*. Quanto a isso, ver a carta de Frege para Anton Marty (de 29/08/1882) e de Carl Stumpf para Frege (de 09/09/1882).

a Kant tem como pano de fundo uma nova concepção de analiticidade proposta por ele. Enquanto Frege (1960, §88) aponta que a caracterização de Kant de analiticidade é limitada, uma vez que ela se aplica somente a enunciados da forma "Todo P é Q", Frege (1960, §3) propõe que entendamos por juízo analítico aquele juízo cuja a justificação está pautada somente em definições e leis lógicas. Naturalmente, essa caracterização de Frege de analiticidade pressupõe, como o próprio Frege (1960, §4) diz, que o caráter analítico ou sintético de um enunciado diz respeito não ao conteúdo que tal enunciado expressa, mas sim a maneira pela qual podemos justificá-lo.

Ao perceber que nem as sensações particulares nem a estrutura que subjaz nossas intuições são capazes de nos fornecer uma justificação das verdades aritméticas, Frege recorre à lógica, a ciência da razão, para rivalizar com a experiência na tarefa de fundamentar a aritmética, pois, para ele,

> Na aritmética nós não lidamos com objetos que conhecemos através dos sentidos como algo estranho e exterior, mas com objetos dados diretamente para a nossa razão como o que ela tem de mais familiar, e que lhe são totalmente transparentes. (FREGE, 1960, §105)[18]

É importante ressaltar que, embora a primeira parte de *FA* (de §1 a §46) apresente um caráter negativo, em que Frege fornece vários argumentos demonstrando que a experiência não cumpre nenhum papel na fundamentação da aritmética, por trás desses argumentos negativos se encontra um outro positivo, essencial para a rejeição de qualquer relevância da experiência, a saber, a exequibilidade do projeto logicista. O argumento da exequibilidade, diferentemente dos argumentos negativos, que incentivavam a rejeição da experiência na tarefa de fundamentar a aritmética, nos mostra que a experiência é simplesmente dispensável para a realização de tal tarefa, ao indicar que podemos recorrer à lógica em seu lugar. Em outras palavras, enquanto os argumentos negativos apontam os problemas com as abordagens que se reportam à experiência, a exequibilidade do projeto logicista evidencia que propor tais abordagens é algo simplesmente desnecessário.

2.1 Números como objetos independentes e o princípio de Hume

Com as críticas feitas na primeira parte de *FA*, Frege percebe que, embora os numerais frequentemente ocorram como adjetivos em enunciados, eles, diferentemente

[18] "In arithmetic we are not concerned with objects which we come to know as something alien from without through the medium of the senses, but with objects given directly to our reason and, as its nearest kin, utterly transparent to it."

de outros adjetivos como as cores, não representam propriedades de objetos, sejam esses objetos singulares ou aglomerados de objetos. Para um melhor esclarecimento, consideremos os enunciados “As páginas do livro são brancas” e “Há 100 páginas no livro”. De acordo com Frege, enquanto no primeiro caso a propriedade de ser branca está sendo atribuída a cada página do livro individualmente, não podemos dizer a mesma coisa no segundo caso, pois as páginas do livro, consideradas individualmente, não têm a propriedade de ser 100. Elas parecem possuir a propriedade de ser 100 somente quando consideradas em conjunto, ou seja, quando consideradas como um aglomerado de páginas, de modo que as propriedades representadas pelos numerais não podem ser propriedades de objetos singulares. Por outro lado, Frege sustenta que tais propriedades também não podem ser atribuídas a aglomerados de objetos, pois um mesmo aglomerado pode ser visto de diversas perspectivas e, desse modo, a um mesmo aglomerado poderiam ser atribuídos diferentes números, o que é estranho. Exemplificando, consideremos um livro qualquer. Esse livro pode ser visto como um conjunto de x páginas, digamos 100; ou como um conjunto de y palavras, digamos 10.000; ou, ainda, como um conjunto de z letras, digamos 100.000. Ou seja, a um mesmo objeto poderíamos atribuir diferentes números simultaneamente. É como se a uma mesma coisa nós pudéssemos atribuir, ao mesmo tempo, propriedades contraditórias entre si, de modo que as propriedades representadas pelos numerais também não podem ser propriedades de aglomerados de objetos.

Depois de ter sido mostrado que o domínio de aplicação dos números não é nem os objetos contados, nem os aglomerados formados por esses objetos, Frege (1960, §46) constata que, quando atribuímos um número a alguma coisa, essa coisa não é um objeto, mas sim um conceito; ou seja, que *numa atribuição numérica é predicado algo de um conceito*.[19] Isso quer dizer que, ao afirmarmos, por exemplo, que *um piano moderno é composto por 88 teclas*, estamos atribuindo o número 88 ao conceito *ser tecla de um piano moderno*. Para ser ainda mais preciso, Frege (1960, §51-53) diz que um adjetivo representado por um numeral, como o que ocorre em “Há 100 páginas no livro”, é parte de um predicado de segunda ordem que, por sua vez, exige como complemento um predicado de primeira ordem. No caso de nosso enunciado “Há 100 páginas no livro”, o predicado de segunda ordem é o predicado “Há 100 ...”, que é complementado pelo predicado de primeira ordem “ser página no livro”. Uma vez que, para Frege, o predicado de segunda ordem acima significa um conceito de segunda ordem, que é complementado pelo conceito de primeira ordem *ser página no livro*, em enunciados como “Há 100 páginas no livro” é feita uma atribuição numérica de segunda ordem a um conceito de primeira ordem.

O predicado de segunda ordem “Há 100 ...”, assim como qualquer outro predi-

[19] “[...] o conteúdo de uma atribuição numérica é uma afirmação sobre um conceito.” (“[...] the content of a statement of number is an assertion about a concept.”) (FREGE, 1960, §46).

cado que expressa uma atribuição numérica, é comumente chamado de quantificador numérico, e ele pode ser escrito, mais precisamente, da seguinte maneira: "Existem exatamente 100 x, tal que x ...". Já na segunda parte de *FA*, em sua primeira tentativa de definir os números cardinais, Frege (1960, §55) define os quantificadores numéricos "Há exatamente 0 x, tal que x é F", "Há exatamente 1 x, tal que x é F" e "Há exatamente n+1 x, tal que x é F", em que 'F' é um predicado arbitrário. A definição é como se segue:[20]

1. $\exists_0 xFx$ (Há exatamente 0 x, tal que x é F) $\equiv df\ \neg\exists xFx$

2. $\exists_1 xFx$ (Há exatamente 1 x, tal que x é F) $\equiv df\ \exists x(Fx \wedge \forall y(Fy \equiv y = x))$

3. $\exists_{n+1} xFx$ (Há exatamente n+1 x, tal que x é F) $\equiv df\ \exists x(Fx \wedge \exists_n y(Fy \wedge y \neq x))$

Essas três cláusulas, de maneira conjunta, simbolizariam uma definição recursiva dos números cardinais.[21] Ao retirarmos o predicado de primeira ordem 'F' da expressão "$\exists_0 xFx$", obtemos o predicado de segunda ordem "$\exists_0 x(\ )x$", que designa o conceito de segunda ordem sob o qual caem todos os conceitos de primeira ordem que não se aplicam a nenhum objeto. Dentro desse conceito de segunda ordem caem, por exemplo, os conceitos *ser corvo branco* e *ser cisne negro*, dentre outros. Igualmente, ao retirarmos o predicado 'F' da expressão "$\exists_1 xFx$", obtemos o predicado de segunda ordem "$\exists_1 x(\ )x$", que designa o conceito de segunda ordem sob o qual caem todos os conceitos de primeira ordem que se aplicam a exatamente um objeto. Esse conceito de segunda ordem também pode ser visto como uma propriedade, mas não uma de objetos, e sim uma de propriedades de objetos. Ele é aquela propriedade que todas as propriedades que se aplicam a exatamente um objeto possuem. De uma maneira geral, a definição recursiva acima nos permite formalizar logicamente, para todo número n, o quantificador numérico "$\exists_n x(\ )x$" ("Existem exatamente n x, tal que x ...").

---

[20] É importante mencionar que não estou usando a terminologia de Frege. Para ser preciso, as expressões que Frege define não são "Há exatamente 0 x, tal que x é F", "Há exatamente 1 x, tal que x é F" e "Há exatamente n+1 x, tal que x é F", mas sim "O número 0 pertence ao conceito F", "O número 1 pertence ao conceito F" e "O número n+1 pertence ao conceito F". Contudo, os respectivos significados das expressões "Há exatamente 0 x, tal que x é F" e "O número 0 pertence ao conceito F" são capturados pelo mesmo quantificador numérico "$\exists_0 xFx$", de maneira que elas são permutáveis entre si. O mesmo vale para os outros pares de expressões correspondentes.

[21] Uma definição recursiva é uma definição por indução a partir de casos bases. Em tal tipo de definição, uma classe de entidades é especificada ou construída ao definirmos alguns casos simples e algumas regras que permitem formular casos complexos em termos dos casos simples. Na definição em questão, a classe de entidades que está sendo especificada é a classe dos conceitos de segunda ordem que são designados pelos quantificadores numéricos definidos. O caso base, ou simples, é a cláusula 1, e a regra que permite determinarmos os casos mais complexos a partir dos casos anteriores é o passo indutivo da cláusula 3. A cláusula 2, que é desnecessária pois é o primeiro caso complexo, é obtida ao aplicarmos a regra da cláusula 3 à cláusula 1. Podemos também dizer que uma definição recursiva é uma que define certos objetos ou entidades em termos de objetos previamente definidos que, por sua vez, são do mesmo tipo que o objeto que está sendo definido.

Como vimos acima, a primeira definição de Frege dos números cardinais define logicamente os quantificadores numéricos "$\exists_0 x(\ )x$", "$\exists_1 x(\ )x$", "$\exists_{1+1} x(\ )x$" e etc. Frege percebe, no entanto, que ela não serve para uma redução logicista da aritmética à lógica, por algumas razões. Em primeiro lugar, por meio dela, não podemos expressar o conteúdo de equações aritméticas, como, por exemplo, *"O número de páginas do livro A = O número de páginas do livro B"*. Tal definição, enganosamente, parece servir aos propósitos de Frege, à medida que nela estão sendo definidas expressões complexas das quais os numerais, aparentemente, ocorrem como constituintes e, desse modo, eles também estariam sendo definidos. Contudo, ao observamos que na expressão "$\exists_1 x(\ )x$" o numeral '1' não está ocorrendo como um termo singular, mas sim como um índice do quantificador que deve ser interpretado contextualmente, constatamos que os numerais não são constituintes das expressões definidas acima e, assim, que a primeira definição de Frege dos números cardinais define apenas os conceitos de segunda ordem designados pelas expressões "$\exists_0 x(\ )x$", "$\exists_1 x(\ )x$" e etc, e não os números designados pelos numerais '0', '1' e etc.[22] O máximo que a definição recursiva de Frege pode fazer é nos dizer se dois conceitos de primeira ordem quaisquer, digamos, *ser página do livro A* e *ser página do livro B*, caem sob o mesmo conceito numérico. Uma vez que aquilo que equações aritméticas como *"O número de páginas do livro A = O número de páginas do livro B"* afirmam não é que dois conceitos de primeira ordem caem sob um mesmo quantificador numérico, mas sim que há uma identidade entre dois objetos, a saber, dois números, a definição em questão não é capaz de capturar o conteúdo de uma equação como a exemplificada acima, pois ela não define os números como objetos, como os referentes de termos singulares.

Em segundo lugar, Frege (1960, §56) reconhece que a definição recursiva também é insatisfatória pelo fato dela padecer do problema que ficou conhecido, entre os comentadores de Frege, como *o problema de Júlio César*. Esse problema, como veremos mais pra frente, afeta, igualmente, a segunda definição de Frege dos números cardinais. No caso da definição acima, o problema diz que não podemos decidir em geral, com base nela, se algo é ou não é um número cardinal. Ou seja, o problema de Júlio César na primeira definição dos números cardinais acusa tal definição de não nos fornecer um bom critério para distinguirmos os números cardinais do que não é número car-

[22] Segundo Salmon (2017, p.1636-1637), podemos comparar a ocorrência de "1" na expressão definida "$\exists_1 xFx$" com a ocorrência de "um" em "cardume", ou com a ocorrência de "sete" em "videocassete"; ou seja, para a definição recursiva de Frege, ela seria um mero "acidente ortográfico". Na minha opinião, Salmón exagera ao afirmar que as ocorrências das expressões "0" e "1" nas cláusulas da definição recursiva são meros "acidentes ortográficos". Apesar de na definição em questão tais expressões não desempenharem o papel de termos singulares, ou seja, não funcionarem como nomes de objetos, elas cumprem pelo menos uma função: indicar qual é a quantidade de objetos que caem sob um certo conceito F. Embora não possamos, a partir da definição recursiva, atribuir sentido a enunciados de identidade que envolvam números, ela ainda serve para determinar, por exemplo, se dois conceitos de primeira ordem quaisquer caem sob um mesmo quantificador numérico, e para isso as expressões mencionadas são importantes.

dinal. Se quiséssemos saber, por exemplo, se Aristóteles é o número que pertence a um dado conceito F, ou, para pegarmos o exemplo de Frege, se Júlio César é o número que pertence a F, nós não seríamos capazes de solucionar essas dúvidas a partir da definição em questão, pois nenhuma de suas três cláusulas atribui um *sentido* aos respectivos enunciados "Há exatamente Aristóteles x, tal que x é F" ("$\exists_{\text{Aristóteles}} xFx$") e "Há exatamente Júlio César x, tal que x é F" ("$\exists_{\text{Júlio César}} xFx$"). Devido a esse problema, Frege concluiu que, com a definição recursiva, nós não apreendemos de fato o que são os números.

Greimann (2003, p. 263) diz que o problema de Júlio César na primeira definição dos cardinais é que as três cláusulas da definição não legitimam uma interpretação de nomes de números[23] como termos singulares, pois, ao considerarmos o número que pertence a um dado conceito F, tais cláusulas não seriam capazes de selecionar *um único* objeto x tal que o enunciado "o número que pertence a $F = x$" *faça sentido*. Por conseguinte, ao substituirmos "x" por um nome qualquer, por exemplo, o nome "Júlio César", a definição em questão não fornecerá um sentido para o enunciado resultante "O número que pertence a F = Júlio César". Ainda que substituamos "x" por um numeral, digamos "1", tal definição, surpreendentemente, não será capaz de atribuir um sentido ao enunciado "O número que pertence a $F = 1$". Para Greimann, não estamos legitimados a tratar nomes de números como termos singulares pelo seguinte motivo: a partir da definição recursiva de Frege, não conseguimos fornecer um sentido aos enunciados de identidade que envolvem nomes de números. A interpretação de Greimann parece estar baseada na principal característica da relação de identidade, a saber, que ela é uma relação de primeira ordem, isto é, uma relação que só admite objetos como possíveis argumentos. Consequentemente, o símbolo para a relação de identidade "=", igualmente, só admite termos singulares como possíveis argumentos, uma vez que só nomeamos objetos com o auxílio de termos singulares. Em outras palavras, ao ser incapaz de atribuir sentido aos enunciados de identidade envolvendo números, a definição recursiva padeceria de duas faces do mesmo problema: de um ponto de vista ontológico, ela não capturaria os números da maneira que Frege quer capturá-los, a saber, como objetos independentes; de um ponto de vista linguístico, ela não trataria os nomes de números como termos singulares. Uma vez que, para Frege, não poderíamos contornar essas duas faces do problema de Júlio César a partir da própria definição recursiva, só restou a ele abandoná-la.

Há ainda, na verdade, um terceiro motivo pelo qual Frege rejeitou a definição recursiva: ela faz uso de uma expressão que ainda não foi definida. Na definição da expressão "$\exists_{n+1} xFx$" (Há exatamente n+1 x, tal que x é F), Frege recorreu à expressão

[23] Entendo por nomes de números quaisquer expressões que tenham a pretensão de designar números, sejam eles considerados conceitos de segunda ordem ou objetos independentes. Exemplos de tais nomes são "2", "4+3", "o número que pertence a F", "O número de Gs", entre outros.

"$\exists_n xFx$" (Há exatamente n x, tal que x é F), cujo o significado, afirma Frege (1960, §56), é tão desconhecido quanto o da expressão que se está tentando definir.

A interpretação de Kimberly Heck (2012, p. 86) do problema de Júlio César da definição recursiva é similar à interpretação de Greimann, no sentido de que, para Heck, também se trata da incapacidade de tal definição de caracterizar expressões como "0", "1" e "1+1", que ocorrem nas cláusulas, como termos singulares, como nomes de objetos. De acordo com Kimberly Heck (2012, p. 86), se a definição recursiva realmente tivesse caracterizado tais expressões como termos singulares, como partes "semanticamente significantes", isto é, que cumprem a função de referir, das expressões definidas nas cláusulas, elas seriam substituíveis por uma variável. Com isso, Heck quer dizer que, a fim de caracterizar os nomes de números como termos singulares, a definição recursiva teria que explicar, além de expressões como "$\exists_0 xFx$", "$\exists_1 xFx$" e "$\exists_{1+1} xFx$", também a expressão "$\exists_y xFx$", em que o índice "y" é uma varíavel que pode ser substituída pelo nome de qualquer objeto do domínio. Aqui, Heck parece entender que Frege não admitia que uma expressão pudesse ser substituída por uma varíavel se a mesma não possuísse um caráter autônomo, ou independente; ou seja, se tal expressão fosse meramente um constituinte de uma outra expressão que só significasse algo quando tomada como um todo. Para Kimberly Heck (2012, p. 87), o problema de Júlio César seria, portanto, que a definição recursiva não nos diz se um nome como "Júlio César" satisfaz ou não a expressão "$\exists_y xFx$", em que "F" pode ser qualquer predicado; em outras palavras, que a definição recursiva não nos fornece as condições de verdade de "$\exists_{\text{Júlio César}} xFx$". Como consequência, teríamos que a definição recursiva não caracterizou os números como objetos, que é a maneira como Frege os concebe, uma vez que ela não caracterizou, igualmente, as expressões "0", "1" e "1+1" como termos singulares, como uma classe de expressões que, supostamente, se referem aos números como objetos.

Para Frege, os números são objetos, e ele quer defini-los como tais. A sua primeira definição propôs que os números fossem conceitos de segunda ordem, e é por isso que ela não nos possibilitou expressar o conteúdo da equação *"O número de páginas do livro A = O número de páginas do livro B"*, na qual os números ocorrem como objetos "independentes", ou "auto-subsistentes" (FREGE, 1960, §56). Por um lado, a definição recursiva serviu para caracterizar enunciados em que fazemos atribuições numéricas como afirmações sobre conceitos; por outro lado, ela não caracterizou os números cardinais como objetos, e daí o seu caráter insatisfatório.

Além do mais, parecem haver pelo menos três razões para que Frege sustente que os números são objetos, que apresentarei agora acriticamente: (1) ao aplicarmos a matemática em nosso dia a dia, nós nos referimos aos números com o auxílio de nomes próprios, utilizando-se os numerais, por exemplo, ou empregando-se outros tipos de termos singulares; em particular, empregando-se descrições definidas, como

"O número de ovos na geladeira" ou "O número primo par".[24] Para apresentarmos uma segunda razão, levemos em conta a ontologia de Frege, em que existem somente dois tipos de entidades, a saber, conceitos e objetos. Se os números fossem conceitos, poderíamos, tranquilamente, falar deles no plural, isto é, expressões como "os números zeros" e "os números uns" fariam sentido, uma vez que conceitos, pelo menos os sortais, admitem plural; (2) dado que tais expressões não fazem sentido algum, os números não poderiam ser conceitos, de modo que só restou a Frege tratá-los como objetos.[25] Uma terceira razão que Frege teria para tratar os números como objetos, que já foi discutida acima e que será explorada mais abaixo, é que, (3) na aritmética, os numerais ocorrem, em geral, em enunciados de identidade, e a identidade é uma relação de primeira ordem, uma relação que só pode ser saturada por objetos.[26] Os motivos citados, para Frege, são mais do que suficientes para tratarmos os números como objetos independentes, que podem ser reconhecidos como os mesmos nos diferentes contextos em que são inseridos, de maneira que a realização do projeto logicista idealizada por ele depende de um esclarecimento do que são esses objetos.

A fim de esclarecer o que são os números, Frege propõe que, em vez de investigarmos expressões da forma "Existem exatamente 100 páginas no livro", em que o caráter objectual dos números não está em evidência, nos voltemos para o significado de enunciados como "O número de páginas no livro é 100", nos quais o "é", em vez de expressar uma atribuição de predicado, indica que se trata de uma equação, isto é, de uma identidade entre objetos. Ele diz:

> Agora, o nosso interesse aqui é chegar a um conceito de número útil para os propósitos da ciência; nós não deveríamos, portanto, ser desencorajados pelo fato de que na linguagem ordinária números ocorram também de forma atributiva. Isso pode sempre ser contornado. Por exemplo, a proposição "Júpiter tem quatro luas" pode ser convertida em "o número de luas de Júpiter

[24] "Quando nós falamos de 'o número um', nós indicamos por meio do artigo definido um objeto de investigação científica determinado e único. Não existem diferentes números um, mas somente um. Em 'I' nós temos um nome próprio, que como tal não admite plural [...]." ("When we speak of 'the number one', we indicate by means of the definite article a definite and unique object of scientific study. There are not divers numbers one, but only one. In 'I' we have a proper name, which as such does not admit of a plural [...].") (FREGE, 1960, §38).

[25] "Somente expressões conceituais podem ser colocadas no plural. Portanto, se falamos de 'unidades', nós não podemos estar utilizando a palavra como equivalente ao nome próprio 'um', mas sim como uma expressão conceitual." ("Only concept words can form a plural. If, therefore, we speak of 'units', we must be using the word not as equivalent to the proper name 'one', but as a concept word.") (FREGE, 1960, §38).

[26] "[...] nós falamos de 'o número I', em que o artigo definido serve para classificá-lo como um objeto. Na aritmética essa auto-subsistência se apresenta em todo lugar, como, por exemplo, na identidade I + I = 2. [...]. E as identidades são, dentre todas as formas de proposição, as mais típicas da aritmética." ("[...] we speak of 'the number I', where the definite article serves to class it as an object. In arithmetic this self-subsistence comes out at every turn, as for example in the identity I + I = 2. [...]. And identities are, of all forms of proposition, the most typical of arithmetic.") (FREGE, 1960, §57).

> é quatro". Aqui a palavra "é" não deve ser tratada como uma mera cópula, como na proposição "o céu é azul". Isso se torna evidente pelo fato de que nós podemos dizer: "o número de luas de Júpiter é o número quatro, ou 4". Aqui "é" tem o sentido de "é idêntico a" ou "é o mesmo que". De modo que o que nós temos é uma identidade, afirmando que a expressão "o número de luas de Júpiter" significa o mesmo objeto que a palavra "quatro". (FREGE, 1960, §57)[27]

Em especial, Frege está interessado no significado de expressões da forma "O número de *F*s", em que "*F*" pode ser qualquer predicado sortal[28], uma vez que tais expressões constituem termos singulares que sempre designam números cardinais[29], que são os números que Frege está tentando definir. Dito em outros termos, Frege tem interesse em expressões desse tipo porque ele enxerga "O número de ( )" como uma expressão funcional a partir da qual obtemos termos singulares que designam números cardinais como objetos sempre que a complementamos com um predicado de primeira ordem.

É interessante observar o movimento que Frege faz aqui: Frege converte uma questão sobre a natureza de certos objetos, nomeadamente, os números cardinais, numa questão sobre o significado de determinadas expressões, a saber, os nomes da forma "O número de *F*s". Tal movimento é visto, por alguns[30], como o movimento que caracte-

[27] "Now our concern here is to arrive at a concept of number usable for the purposes of science; we should not, therefore, be deterred by the fact that in the language of everyday life number appears also in attributive constructions. That can always be got round. For example, the proposition 'Jupiter has four moons' can be converted into 'the number of Jupiter's moons is four'. Here the word 'is' should not be taken as a mere copula, as in the proposition 'the sky is blue'. This is shown by the fact that we can say: 'the number of Jupiter's moons is the number four, or 4'. Here 'is' has the sense of 'is identical with' or 'is the same as'. So that what we have is an identity, stating that the expression 'the number of Jupiter's moons' signifies the same object as the word 'four'."

[28] Um predicado é sortal se e somente se ele significar um conceito que possui um critério de identidade e individualização. A principal característica de um tal conceito é que a ele pode ser atribuído um número ou artigo indefinido; ou seja, se n for um número cardinal e F um predicado sortal, digamos, o predicado "*letra na palavra 'bola'*", a expressão "$\exists_n xFx$" terá sentido. Um exemplo de um predicado não-sortal é o predicado "*ser água no Rio Amazonas*".

[29] Pois um número cardinal é sempre o número de um conceito F.

[30] Por exemplo, por Dummett: "[...] §62 é indiscutivelmente o parágrafo filosófico mais fértil de todos os tempos. [...] ele é o primeiríssimo exemplo do que veio a ser conhecido como a 'virada linguística' na filosofia. O *Grundlagen* (*Os Fundamentos da Aritmética*) de Frege pode ser chamado, com justiça, de o primeiro trabalho de filosofia analítica." ("[...] §62 is arguably the most pregnant philosophical paragraph ever written. [...] it is the very first example of what has become known as the 'linguistic turn' in philosophy. Frege's *Grundlagen* may justly be called the first work of analytical philosophy.") (DUMMETT, 1991, p. 111). Com "virada linguística", Dummett se refere, particularmente, à seguinte passagem de §62, que será discutida daqui em diante: "Como, então, os números serão dados para nós, se nós não podemos ter quaisquer ideias ou intuições deles? Uma vez que é somente no contexto de uma proposição que as palavras têm algum significado, o nosso problema se torna o seguinte: Definir o sentido de uma proposição na qual um nome de número ocorre." ("How, then, are numbers to be given to us, if we cannot have any ideas or intuitions of them? Since it is only in the context of a proposition that words have any meaning, our problem becomes this: To define the sense of a proposition in which a number word occurs.") (FREGE, 1960, §62). Dummett diz ainda: "[...] Frege foi o primeiro a colocar uma questão *não*-linguística e oferecer uma resposta linguística. Se fosse apenas com base em *Grundlagen*, §62 e a sua continuação, ele ainda mereceria o título de avô da filosofia analítica." ("[...] Frege was the first to ask a *non*-linguistic question and return a linguistic answer. If it were on the strength of *Grundlagen*,

riza a tradição analítica na filosofia. A resposta de Frege à questão acima é dada de uma maneira bem peculiar, de acordo com um princípio apresentado na introdução de *FA*, o princípio do contexto, segundo o qual não devemos indagar pelo significado de uma expressão tomada isoladamente, mas somente no contexto de uma proposição. Frege (1960, §60) sugere, portanto, que nós não investiguemos o significado de expressões, em particular, de expressões da forma "O número de *F*s", consideradas isoladamente, fora de contexto; caso contrário, correríamos o risco de confundir o significado de uma tal expressão com aquelas imagens mentais, as ideias, que ela pode eventualmente provocar em nós, e que são irrelevantes, segundo Frege, em sua investigação dos fundamentos da aritmética. Deste modo, Frege (1960, §60) entende que somente através do significado de uma proposição inteira, considerada como uma unidade de significação, podemos compreender o significado de seus elementos constitutivos. Para Frege, portanto, não podemos fazer nada para determinar o significado de uma expressão além de indicar o modo como essa expressão contribui para o significado das proposições nas quais ela ocorre. Aqui, a proposição como um todo é vista como tendo uma certa prioridade, ou antecedência, em relação aos termos que nela ocorrem.

Uma vez que Frege está interessado em nomes da forma "O número de *F*s", ele sugere que analisemos um tipo especial de enunciado em que nomes ocorrem, e que, para ele, seria o tipo mais apropriado para determinarmos contextualmente o significado de nomes. Os enunciados desse tipo são os "enunciados de reconhecimento" (FREGE, 1960, §62), que são enunciados de identidade em que de um lado do sinal de igualdade se encontra o tipo de nome cujo o significado se quer determinar. Frege tem em vista enunciados de reconhecimento da forma "O número de Fs = x", em que, de um lado, encontramos o tipo de nome que se está tentando definir, a saber, "O número de *F*s", e em que, do outro lado, há um nome 'x' qualquer, como "O número de *G*s", "Aristóteles" ou "Júlio César". A fim de descobrir o que significa "O número de *F*s", Frege pretende, portanto, especificar o conteúdo dos enunciados de reconhecimento mencionados, de modo a revelar como os nomes da forma em questão contribuem para o significado desses enunciados de identidade. Ao fazer isso, Frege estará definindo os números cardinais, que são os referentes de nomes da forma "O número de *F*s", como objetos.

Inicialmente, Frege considera somente enunciados de reconhecimento da forma "O número de Fs = O número de Gs", isto é, enunciados de identidade em que 'x' também é um nome da forma "O número de ( )". A partir de sua análise do enunciado "O número de Fs = O número de Gs", Frege (1960, §63) conclui que esse enunciado é logicamente equivalente ao enunciado "Há uma correspondência 1-1 entre os conceitos F e G". O último enunciado está afirmando que existe uma relação R, tal que R é biuní-

§62 and its sequel alone, he would still deserve to be rated the grandfather of analytical philosophy.") (DUMMETT, 1991, p. 112).

voca[31], e R associa todo objeto que é F a um objeto que é G, e vice-versa[32]. A existência dessa relação entre os respectivos conceitos F e G pode ser logicamente formalizada assim:[33]

- $\exists R((\forall x \forall y \forall z((R(x,y) \land R(x,z)) \longrightarrow y = z) \land \forall x \forall y \forall z(R((x,y) \land R(z,y)) \longrightarrow x = z)) \land \forall x(Fx \longrightarrow \exists y(Gy \land R(x,y))) \land \forall y(Gy \longrightarrow \exists x(Fx \land R(x,y))))$

Frege (1960, §68) chama de *equinuméricos* dois conceitos entre os quais há uma tal relação de correspondência 1-1.[34] De uma maneira geral, podemos dizer que, para introduzir os números como objetos, Frege define as equações entre eles e, para isso, recorre a uma relação de equivalência[35], a saber, à relação de equinumerosidade entre conceitos. Essa relação de equinumerosidade, como acabamos de ver, pode ser expressa em termos estritamente lógicos, de modo que a definição acima de "O número de Fs", através da determinação do significado do enunciado "O número de Fs = O número de Gs", é uma definição puramente lógica.

Obviamente, a definição em questão não é uma no sentido tradicional, quer dizer, não é uma definição explícita da expressão que se deseja definir. Ela não apresenta uma outra expressão que possamos utilizar no lugar de "O número de Fs", sempre que esse ocorrer num enunciado. Ao invés disso, a segunda definição de Frege dos números cardinais, também chamada, na literatura secundária, de *princípio de Hume*[36], é uma definição contextual da expressão "O número de Fs", e ela é expressa assim:

- O número de Fs = O número de Gs $\equiv_{def} F \sim G$,

em que F e G são dois conceitos quaisquer e '$\sim$' é o símbolo para a relação de correspondência 1-1 (para a relação de equinumerosidade) entre conceitos. Tal tipo de definição caracteriza uma análise do termo definido, ao mostrar que um determinado tipo de enunciado, em que o termo ocorre, pode sempre ser substituído por um outro tipo de enunciado, em que a expressão definida não mais ocorre.

No entanto, o princípio de Hume também é rejeitado por Frege, pois, por meio dele, os números não são suficientemente determinados. A definição "O número de Fs

[31] As condições que uma relação R deve satisfazer para ser biunívoca são apresentadas por Frege em Frege (1960, §72).
[32] Ou seja, R simplesmente correlaciona os Fs e Gs. Ver Frege (1960, §71).
[33] Para a maneira como Frege ilustra a existência de uma correspondência 1-1 entre dois conceitos F e G, ver o exemplo dos pratos em Frege (1960, §70).
[34] A definição de Frege de equinumerosidade se encontra em Frege (1960, §72).
[35] Uma relação de equivalência é uma relação que é reflexiva, simétrica e transitiva.
[36] Os comentadores de Frege chamam tal definição de "princípio de Hume" porque Frege (1960, §63), ao definir a identidade númerica em termos da relação de equinumerosidade, menciona Hume, dizendo que o mesmo já havia indicado esse caminho.

= O número de Gs $\equiv_{def}$ F ~ G" não nos fornece uma análise completa dos enunciados de reconhecimento que contenham uma expressão da forma "O número de Fs". Ela só pode ser aplicada, segundo Frege (1960, §66), aos enunciados de identidade em que ambos os nomes dos dois lados do sinal de igualdade são da forma "O número de Fs". Isso quer dizer que a segunda definição de Frege dos cardinais se aplica aos enunciados de reconhecimento da forma "O número de Fs = O número de Gs", mas não a todos os enunciados de reconhecimento do tipo "O número de Fs = x", uma vez que 'x' poderia ser um nome que não tem a forma "O número de ( )". Se 'x' fosse substituído, por exemplo, pelo nome "Júlio César", a definição não determinaria como o enunciado resultante "O número de Fs = Júlio César" deve ser analisado, pois "Júlio César" não é um nome da forma "O número de ( )". Isso significa que, por meio do princípio de Hume, não conseguimos saber se o objeto Júlio César, referente do nome "Júlio César", é ou não é um número cardinal. Dito de uma outra maneira, a definição em questão não estabelece o *sentido* de todos os enunciados de identidade em que um nome como "O número de Fs" ocorre, mas somente daqueles enunciados de identidade da forma "O número de Fs = O número de Gs". Esse problema com a definição contextual é a outra ocorrência do problema de Júlio César em *FA*.

Frege (1960, §66) chega ainda a dizer que nós sabemos que o enunciado "O número de Fs = Júlio César" é falso, para qualquer conceito F; ou seja, que nós conhecemos o *sentido* de um tal enunciado, de maneira que nós nunca confundiríamos Júlio César com um número. Isso, contudo, não se dá em virtude da definição contextual, mas sim intuitivamente, o que não estaria de acordo com o projeto logicista. A tese logicista não nos diz apenas que todas as verdades aritméticas (axiomas e teoremas) *podem* ser derivadas *unicamente* a partir de leis lógicas e definições, mas, também, que os respectivos *sentidos* de todos os enunciados de identidade que envolvem números podem ser determinados por meios puramente lógicos. Ora, uma vez que "O número de Fs = Júlio César" é um enunciado de identidade que envolve números, o seu sentido, de acordo com o logicismo, deveria poder ser determinado com base unicamente na lógica. No entanto, diante do problema de Júlio César, ficamos carentes de uma definição puramente lógica dos números, que forneça sentido para um enunciado como o acima, de modo que se faz necessário o recurso a um expediente extra-lógico, a intuição, para conhecermos o sentido de um tal enunciado. Portanto, enquanto não dispormos de uma definição puramente lógica dos números, o projeto logicista não poderá ser levado adiante, pois, invariavelmente, precisaremos utilizar expedientes extra-lógicos para acessarmos o sentido de um enunciado.

O problema com a segunda definição leva Frege (1960, §68) a fornecer, em *FA*, uma terceira e última definição dos números cardinais. Ela é uma definição explícita da expressão "o número de Fs", e diz:

- O número de Fs $=_{def}$ A extensão do conceito *ser equinumérico a F*

Por uma tal extensão, Frege parece entender o conjunto que contém, como os seus elementos, os conceitos que são equinuméricos a F. Para exemplificar, digamos que F é o conceito *ângulos de um triângulo*. O número de Fs será, portanto, a extensão do conceito *ser equinumérico a "ângulos de um triângulo"*. A essa extensão pertencerão todos os conceitos que são equinuméricos a *ângulos de um triângulo*, ou seja, todos aqueles sob os quais caem exatamente 3 objetos; nessa extensão encontraremos, deste modo, os conceitos *atletas no podium*, *letras na palavra "céu"* e o próprio *ângulos de um triângulo*, entre outros, uma vez que podemos correlacionar 1–1 os respectivos elementos de cada um desses conceitos com os elementos de *ângulos de um triângulo*. Apesar de ter rejeitado anteriormente o princípio de Hume como uma definição do nome "O número de Fs", Frege (1960, §73), por meio da definição explícita acima, demonstra que o enunciado "O número de Fs = O número de Gs" é logicamente equivalente ao enunciado "$F \sim G$"; ou seja, ele demonstra que o princípio de Hume é uma consequência lógica da definição explícita de "O número de Fs".

Curiosamente, depois que Frege utiliza a definição explícita para derivar o princípio de Hume, ele não mais faz uso dela. Ela serve praticamente apenas para demonstrar a equivalência entre "O número de Fs = O número de Gs" e "$F \sim G$". Para Frege, o restante do procedimento de redução da aritmética à lógica seria realizável somente com base no princípio de Hume. Na verdade, Frege diz que nós ainda precisaríamos da definição explícita para uma outra coisa, a saber, analisar enunciados de reconhecimento que contenham somente um nome da forma "O número de Fs", pois, por meio da definição contextual, nós não conseguimos estabelecer o sentido de um enunciado de identidade como "O número de páginas do livro A = Júlio César". Tal incapacidade do princípio de Hume de estabelecer o sentido do enunciado em questão parece revelar que a análise que a definição contextual faz dos números não os representa como objetos. Pois, se a definição contextual realmente caracterizasse os números como objetos, deveríamos poder, por meio dela, distinguí–los de qualquer outro objeto que resolvêssemos considerar. Em termos linguísticos, isso quer dizer que, se o princípio de Hume de fato caracterizasse expressões da forma "O número de Fs" como nomes próprios, ele deveria, igualmente, fornecer um sentido a todos os enunciados de reconhecimento em que tais expressões ocorrem.

Por outro lado, para que, por meio da definição explícita, Frege possa estabelecer o sentido do enunciado de identidade do parágrafo anterior, é preciso, antes, que ele faça algumas suposições. Em particular, uma vez que Frege define "O número de Fs" como "a extensão do conceito *ser equinumérico a F*", ele precisa supor que, com a definição explícita, nós podemos determinar o valor de verdade de enunciados de reconhecimento que contenham somente um nome da forma "A extensão de E", em que 'E' é um predicado que designa um conceito qualquer, em especial, um conceito como *ser equinumérico a F*. Se Frege não admitisse que, por meio da definição explícita, nós podemos determinar o valor de verdade do enunciado "A extensão do conceito *ser equinumérico a 'páginas do livro A'* = Júlio César", então essa definição não constituiria avanço algum relativamente à definição contextual de "O número de Fs" e, assim, não haveria nenhum motivo para ter substituído a segunda pela primeira. De fato, Frege (1960, §107) parece admitir isso, pois ele sustenta que nós já compreendemos o sentido da expressão "extensão de conceito", ou seja, o respectivo referente de qualquer nome da forma "a extensão de E" já estaria dado para nós como objeto e, portanto, nós sabemos que o enunciado de identidade acima é falso, pois sabemos, igualmente, que Júlio César não é uma extensão de conceito. No fim das contas, Frege entende que não precisamos de nenhuma explicação adicional do que são extensões de conceitos, e que uma extensão está associada a todo conceito.

É interessante notar que a relação de equinumerosidade, a qual Frege recorre tanto na segunda como na terceira definição de "O número de Fs", divide em diferentes repartições a totalidade de conceitos, de modo que, para qualquer número n, todos os conceitos sob os quais caiam exatamente n objetos pertencerão a mesma repartição. Assim, todos os conceitos que não se aplicam a nenhum objeto pertencerão a uma certa repartição; todos aqueles que se aplicam a exatamente um objeto pertencerão a uma outra repartição, diferente da anterior, e assim sucessivamente. Enquanto os conceitos da mesma repartição são equinuméricos, aqueles de repartições distintas não o são. Essa propriedade da relação de equinumerosidade de dividir os conceitos em diferentes repartições permite que nós compreendamos a terceira definição de Frege dos números cardinais como atribuindo um número n àquela repartição de conceitos que valem exatamente de n objetos, uma vez que dois ou mais conceitos têm o mesmo número se e somente se eles forem equinuméricos, isto é, se e somente se eles pertencerem a mesma repartição. Podemos dizer ainda que a definição explícita de Frege está identificando os números com tais repartições, de maneira que o número 2, por exemplo, será a repartição que contém os conceitos sob os quais caem exatamente dois objetos.

Como vimos acima, a relação de equinumerosidade é uma relação de equivalência. De um modo geral, qualquer relação que efetue uma tal divisão em repartições de nosso universo de discurso é uma relação de equivalência, e as repartições que são originadas pela relação de equivalência podem ser chamadas, igualmente, de classes de equivalência. Dito isto, podemos seguramente afirmar que, como corolário da definição dos números em termos de extensões de conceitos, a relação de equinumerosidade Φ também é definida para o conjunto de todos os conceitos Ψ, de tal maneira que, se C é um conceito e $\{C\}$ é a classe de equivalência de C relativamente à relação de equinumerosidade Φ, então, para qualquer conceito F pertencente a Ψ, C estará na relação Φ com F se e somente se $\{C\}$ e $\{F\}$ forem idênticos; ou seja, a partir da definição explícita de Frege, deduzimos que dois conceitos quaisquer são equinuméricos se e somente se as suas respectivas classes de equivalência forem idênticas. Ilustrada de uma tal maneira, a terceira definição de Frege dos números cardinais associa a todo conceito F pertencente a Ψ um objeto $\{F\}$, que é a classe de equivalência de F, isto é, o seu número, de modo que

- $\forall F \forall G(\Phi(F, G) \equiv \{F\} = \{G\})$

vale.

Após ter definido os números cardinais em termos de extensões de conceitos, Frege (1960, §72) apresenta, finalmente, a sua definição do conceito de número cardinal:

- n é um número cardinal $\equiv_{def}$ há um conceito F tal que n é igual ao número de Fs

Ao aplicarmos a definição explícita, temos que:

- n é um número cardinal $\equiv_{def}$ há um conceito F tal que n é igual a extensão do conceito *ser equinumérico a F*

É importante ressaltar que, aqui, Frege ainda não está definindo os números naturais individuais, e sim o conceito geral de número cardinal. Além disso, tanto com a definição contextual como com a definição explícita, Frege não estava tentando definir os números naturais, mas sim a expressão "O número de ( )", que é a maneira como os números cardinais são dados para nós, pois um número cardinal, como diz a definição acima e como já foi dito anteriormente, é sempre um número de um certo conceito, isto é, um número que responde à pergunta "Quantos Fs existem?". Uma vez que os números naturais também podem ser usados para responder à pergunta "Quantos Fs existem?", eles, igualmente, são considerados por Frege números cardinais.

Há uma diferença importante, no entanto, entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números cardinais: enquanto o primeiro contém somente números finitos, ao segundo pertencem também números infinitos. Isso porque, assim como com os números finitos, os números infinitos também podem ser usados para responder à pergunta acima. Consideremos, por exemplo, a pergunta "Quantos *números naturais* existem?". O número que responde a essa pergunta é designado, por Frege (1960, §84), pelo símbolo "∞_1". ∞_1 é o número que indica a cardinalidade do conjunto dos números naturais, isto é, ∞_1 = O número do conceito *ser número natural*. Como ∞_1 é usado para contar os elementos de um determinado conjunto, ou seja, ele é o número de um certo conceito, ∞_1 também é um número cardinal, embora não seja um número natural. ∞_1 é um número infinito, ou, para seguir a terminologia habitual, *transfinito*.

2.2 Heck e Greimann sobre o problema de Júlio César em *FA*

A formulação de Frege do problema de Júlio Ceśar diz que o princípio de Hume não nos permite decidir de um objeto qualquer, que não nos é dado como um número, se ele é ou não é um número. Tal formulação pode nos dar a entender que Frege esperava que, por meio do princípio de Hume, pudéssemos adquirir conhecimento, pois, ao falar em "decidir", Frege parece estar exigindo do princípio de Hume que ele nos diga quais objetos são números e quais objetos não o são. Kimberly Heck (2012, p. 84-85) nos diz, no entanto, que a questão em pauta não é epistemológica, ou seja, que a objeção de Frege ao princípio de Hume não diz respeito ao que podemos ou não vir a saber por meio dele. De acordo com Kimberly Heck (2012, p. 85), Frege não está exigindo do princípio de Hume que ele resolva, ou responda, questões relativas a equações aritméticas no geral. Não seria o papel do princípio de Hume, por exemplo, nos dizer quais equações aritméticas são verdadeiras e quais são falsas. Ele não nos dirá o valor de verdade nem de equações cuja a verdade ou falsidade nós conhecemos, como "o número de corvos brancos = o número de cisnes negros", nem o valor de verdade de equações cuja a verdade ou falsidade nós desconhecemos, como "o número de números pares que não são a soma de dois primos = o número de objetos diferentes de si mesmo". O papel do princípio de Hume é outro: explicar o que são os números. Para isso, ele deveria explicar o que significam as expressões como "o número de Fs", estabelecendo, para qualquer x, o significado de enunciados de identidade da forma "O número de Fs = x".

Uma vez que estabelecer os significados de tais enunciados é fixar as condições de verdade deles, o que o princípio de Hume pode fazer, segundo Kimberly Heck (2012, p. 85), é auxiliar na determinação da verdade desses enunciados, fixando, para isso, as condições de verdade deles. Antes, contudo, duas condições precisam ser satisfeitas: (1) o enunciado de identidade é da forma "O número de Fs = O número de Gs"; e (2) o mundo satisfaz as condições de verdade do enunciado de identidade em questão. No fundo, o que determina, e o que deve determinar, o valor de verdade de um enunciado de identidade é o mundo, sendo a objeção de Frege ao princípio de Hume não a sua incapacidade de determinar, por si só, o valor de verdade de um enunciado como "o número de Fs = Júlio César", mas sim a sua incapacidade de estabelecer as condições de verdade de todos os enunciados de identidade que envolvam uma expressão da forma "o número de Fs".

De acordo com Greimann (2003, p. 270), as duas ocorrências do problema de Júlio César em *FA* colocam para Frege, no fundo, o mesmo problema: os respectivos critérios fornecidos pelas definições para que algo seja o número de um certo conceito F não determinam completamente a referência de nomes de números. Segundo Greimann (2003, p. 270), as definições em questão não fixam completamente a referência de um nome como "o número de *Fs*" porque elas não demarcam nitidamente o campo de aplicação do conceito *ser o número que pertence a F*. Aqui, o problema de Júlio César é visto como um problema lógico, cuja a origem está na exigência de Frege (1960, §74) de que a referência de todas as expressões, sejam essas expressões funcionais ou termos singulares, esteja completamente determinada. Só assim poderíamos usar uma expressão na linguagem logicamente perfeita de Frege, a Conceitografia. Para Frege, uma definição dos números cardinais determinaria completamente a referência de um termo singular como "o número de *Fs*" se e somente se ela estabelecesse as condições de verdade de "o número de $Fs = x$", em que x percorre não somente os números cardinais, mas todos os objetos do domínio. Em outras palavras, uma tal definição determinaria a referência de "o número de *Fs*" se e somente se ela traçasse precisamente o campo de aplicação do conceito *ser idêntico ao número de Fs*. Ao tomarmos "n" como sendo um nome de número qualquer, o problema de Júlio César seria, portanto, que as tentativas apresentadas de definição dos cardinais não traçam precisamente o campo de aplicação do conceito *ser idêntico a n*, uma vez que elas não estabelecem, para todo x, as condições de verdade de "$n = x$". Ou seja, por meio dessas definições, nós não sabemos se o conceito *ser idêntico a n* se aplica a um x qualquer como Júlio César, pois elas não nos fornecem as condições de verdade de "n = Júlio César".

Para Greimann (2003, p. 270), tal exigência de Frege, que chamaremos de *princípio da determinação completa*, é resultado de sua busca por um sistema que garanta a validade de todas as leis lógicas. A lei lógica que Frege estaria procurando validar ao adotar esse princípio é, por sua vez, a lei do terceiro exclúido, que seria apenas uma outra formulação do princípio da determinação completa. Deste modo, para Greimann, o problema de Júlio César em *FA* é apenas uma consequência da validação da lei do terceiro excluído no sistema de Frege. Contudo, não é ponto pacífico entre os comentadores de Frege que ele já havia adotado o princípio da determinação completa em *FA*. Por um lado, existe o próprio Greimann (2003, p. 270-271), que defende que Frege já havia adotado tal princípio. Greimann fundamenta o seu posicionamento na seguinte passagem de *FA*, em que Frege estaria, segundo ele, expressando o princípio da determinação completa:

> Tudo que pode ser exigido de um conceito do ponto de vista da lógica e tendo em vista o rigor de prova é somente que os limites para a sua aplicação estejam nítidos, que nós sejamos capazes de decidir com segurança sobre todo objeto se ele cai sob esse conceito ou não. (FREGE, 1960, §74)[37]

[37] "All that can be demanded of a concept from the point of view of logic and with an eye to rigour of proof is only that the limits to its application should be sharp, that we should be able to decide definitely about every object whether it falls under that concept or not."

Por outro lado, existe o Kimberly Heck (1997, p. 279-280), que sustenta que não há indícios de que Frege já havia aderido ao princípio da determinação completa em *FA*. De acordo com Heck, afirmar que a genêsis do problema de Júlio César se encontra na adoção de tal princípio por parte de Frege é atribuir a Frege, sem justificação alguma, um princípio que ele só viria a adotar explicitamente a partir de 1891.

Kimberly Heck (2012, p. 87) entende que o problema de Júlio César que atinge a segunda definição dos cardinais é o mesmo que aquele que atinge a definição recursiva dos cardinais, só que colocado de uma maneira diferente. No caso em questão, o problema é que a definição contextual não caracterizou as expressões da forma "o número de *F*s" como termos singulares, como nomes de objetos, uma vez que a mesma não estabeleceu o significado de todos os enunciados de identidade que envolvem nomes de números. De acordo com Kimberly Heck (2012, p. 87), se a definição contextual tivesse de fato sido bem sucedida em caracterizar as expressões da forma "o número de *F*s" como termos singulares, então num enunciado de identidade como "o número de *F*s = o número de *G*s" a expressão "o número de *F*s" poderia ser substituída por uma varíavel. Com isso, Heck está afirmando que se o princípio de Hume realmente tivesse cumprido o papel para o qual ele foi desenvolvido, por meio dele deveria ser possível apreendermos não só o sentido de identidades da forma "o número de *F*s = o número de *G*s", mas também o sentido da identidade "x = o número de *G*s", em que "x" é uma variável que percorre os nomes de todos os objetos do domínio. Para Heck, o problema de Júlio César na segunda definição dos cardinais é, portanto, que tal definição não nos diz nada sobre se um nome como "Júlio César", que não possui a forma "o número de *F*s", satisfaz ou não o enunciado de identidade "x = o número de *G*s"; ou seja, que tal definição não nos fornece as condições de verdade de "Júlio César = o número de *G*s". Uma vez que a abordagem de Heck caracteriza o problema de Júlio César em *FA* como um problema quanto ao *significado*, ou *sentido*, de enunciados de identidade que envolvem nomes de números, o problema de Júlio César em *FA* é, para Heck, um problema semântico.

Um outro motivo pelo qual Heck caracteriza o problema de Júlio César em *FA* como um problema semântico diz respeito ao tipo de questão que Frege estava tentando responder ao formular o princípio de Hume, e que, no fim das contas, o levou ao problema de Júlio César. Como vimos, Frege propôs o princípio de Hume para responder a questão de como os números são dados para nós, uma vez que eles não são objetos que podemos acessar espaço-temporalmente. De acordo com Kimberly Heck (2012, p. 115), Frege entendia essa questão como uma questão semântica, que poderia ser colocada também do seguinte modo: como podemos estabelecer o *significado*, ou *sentido*, de expressões que, supostamente, se referem aos números como objetos? Essas expressões eram, para Frege, os nomes de números, em particular, as expressões da forma "o número de *F*s", que designam os números cardinais como objetos. Uma vez que a questão que Frege estava tentando responder, e que cuja a tentativa de resposta o levou ao problema de Júlio César, era uma questão semântica, Kimberly Heck (2012, p. 115) sustenta que o problema de Júlio César em *FA* é um problema semântico, ou seja, um problema que diz respeito ao *significado* de expressões de determinada forma.

Ao contrário de Frege, Kimberly Heck (2012, p. 87-88) nos diz que a partir do princípio de Hume nós podemos entender sim o que significa a identidade "x = o número de *G*s". No entanto, esse entendimento, segundo Heck, é *substitucional*, ou seja, nós compreendemos a variável "x" em "x = o número de *G*s" de tal modo que nós só admitimos como possíveis substituições para "x" um determinado tipo de expressão, a saber, os nomes da forma "o número de *F*s". Em outras palavras, nós tratamos "x" no enunciado de identidade "x = o número de *G*s" substitucionalmente, como se a sua classe de substituição contivesse somente nomes da forma "o número de *F*s". Consequentemente, o princípio de Hume, para Heck, captura a nossa compreensão de tal enunciado de identidade e, deste modo, captura também a nossa compreensão dos números. Uma vez que Frege levantou o problema de Júlio César contra a sua segunda definição dos cardinais, ou seja, uma vez que ele se perguntou, dada a definição contextual, qual seria o significado de um enunciado de identidade como "o número de *F*s = Júlio César", o seu entendimento das variáveis de seu sistema *parece* ser *objectual*, o que significaria que, para Frege, uma variável pode a princípio ser substituída pelo nome de qualquer objeto do domínio, e não somente pelos nomes de determinado tipo ou forma.

Para fundamentar a sua posição de que o nosso entendimento da identidade "x = o número de *G*s" é substitucional, Kimberly Heck (2012, p. 88) pede que suponhamos que Júlio César é o número do conceito *F*, de maneira que ao dizermos que Júlio César é igual ao número do conceito *G*, também estamos dizendo que o número do conceito *F* é igual ao número do conceito G. Com essa suposição, Heck quer ressaltar que, ainda que uma identidade seja entre dois números cardinais, no caso em questão o número de *F*s e o número de *G*s, é possível que nós não compreendamos o que significa dizer que tais números estão numa relação de identidade, pois dada a suposição, Júlio César é o número de *F*s, de modo que a sentença que expressa a identidade entre esses dois números é "Júlio César = o número de *G*s", que é uma sentença de identidade que nós não compreendemos. Em outras palavras, Heck está defendendo que a nossa compreensão de uma identidade entre dois números depende de como esses números estão dados. No exemplo acima, nós não apreendemos o significado da identidade entre o número de *F*s e o número de *G*s porque o número de *F*s estava dado como "Júlio César", e não como "o número de *F*s". A constatação de que nós só apreendemos o significado de uma tal identidade se ambos os números estiverem dados na forma "o número de *F*s" confirma, de acordo com Heck, que o nosso entendimento do enunciado de identidade "x = o número de *G*s" é substitucional.

Eu discordo tanto da interpretação de Greimann do problema de Júlio César em *FA*, segundo a qual o problema tem raízes lógicas, como da interpretação de Heck do mesmo problema, que diz que ele tem raízes semânticas. Com a minha discordância, eu não estou negando que o problema de Júlio César coloque tanto um problema lógico como um problema semântico para Frege. O que quero discutir não é quais tipos de problemas o problema de Júlio César coloca para Frege, mas sim como o mesmo entendia esse problema. A meu ver, Frege não entendia o problema de Júlio César em *FA* nem como um problema lógico e nem como um problema semântico, mas como um problema primordialmente *formal*. Ou seja, a principal preocupação de Frege não era que o princípio de Hume não satisfaz o princípio da determinação completa e, assim, não garante a validação da lei do terceiro excluído, e nem que o princípio de Hume não estabelece o significado de *todos* os enunciados de identidade que envolvem nomes de números. A sua principal preocupação era que o princípio de Hume não dá conta de todos os enunciados de identidade *bem-formados* do sistema lógico subjacente.

Apesar de, em *Os Fundamentos da Aritmética*, Frege ter adotado uma abordagem informal, o que torna difícil a identificação do sistema lógico subjacente, a minha interpretação tem como suposição que tal sistema é o mesmo que aquele apresentado em 1879 na *Conceitografia*, só que com alguns acréscimos importantes. Entre esses acréscimos, os mais relevantes para a discussão em questão são os seguintes: (1) a introdução dos números cardinais no domínio de objetos, atráves da definição de nomes (da forma "o número de *F*s") que designam esses números como objetos; (2) a introdução dos números naturais no domínio, por meio da definição explicíta dos mesmos em termos de percursos de valor; e (3) o estabelecimento do princípio de Hume como o critério de identidade numérica. Contudo, tais acréscimos, que já significam uma expansão significativa do sistema lógico da *Conceitografia*, ainda não pareciam ser suficientes para satisfazer as pretensões logicistas de Frege, pelo seguinte motivo: Frege não ambicionava reduzir apenas a aritmética dos números naturais à lógica, mas também fundamentar as outras aritméticas, como a aritmética dos números inteiros e a dos números reais, em bases puramente lógicas. Tal ambição de Frege não pode ser alcançada com base no princípio de Hume, de modo que foi ela que o levou a objetar a ideia de que tal princípio seria um bom critério de identidade numérica.

A ideia de que Frege pretendia expandir o sistema lógico de *FA* de modo a englobar não só os números naturais, mas também outros tipos de números, é sugerida nas seções finais de *FA*, entre §92 e §104. Frege diz: "Até o momento nós restringimos a nossa atenção aos Números [naturais]. Vamos agora dar uma olhada nos outros tipos de números, e tentar fazer algum uso neste campo mais amplo daquilo que nós aprendemos no campo anterior.” (FREGE, 1960, §92)[38]. Aqui, Frege visa claramente estender as discussões relacionadas aos números naturais para outros tipos de números. Além do mais, Frege se faz a seguinte pergunta: “Como então os números complexos serão dados para nós, e as frações e os números irracionais?” (FREGE, 1960, §104)[39]. Ao se fazer essa pergunta, Frege parece querer estender o seu domínio de objetos, que até então engloba só os números cardinais (e entre eles os números naturais), para um domínio que contenha também outros tipos de números, de modo que uma redução de outras aritméticas à lógica seja possível.

Contudo, ao longo de sua obra, Frege diversas vezes sustentou que qualquer expansão do domínio de objetos exige novas atribuições de significado às funções que foram anteriormente definidas, de maneira que essas redefinições das funções englobassem também os objetos recentemente introduzidos. No caso particular das funções de soma e multiplicação, Frege diz:

> Se nós abandonarmos este método de tratamento puramente formal, nós podemos nos ater a circunstância de que, simultaneamente à introdução de novos números, os significados das palavras “soma” e “produto” são estendidos. [...]. Então vamos escolher, ao invés disso, como a nossa raiz quadrada de –1 o intervalo de tempo de um segundo, e que este seja simbolizado por *i*. Deste modo, 3*i* significará o intervalo de tempo de 3 segundos, e assim por diante. Qual objeto devemos então simbolizar por, digamos, 2 + 3*i*? Qual significado deveria ser atribuído ao símbolo da soma neste caso? Agora, isto deve ser estabelecido de maneira geral para todos os casos semelhantes, o que claramente não será fácil. (FREGE, 1960, §100)[40]

Num artigo de 1891, Frege continua sustentando essa exigência quanto às funções anteriormente definidas, dizendo, de novo a respeito da função da soma, que ela precisa ser redefinida toda vez que houver uma expansão do domínio de objetos:

> [...] Contanto que os únicos objetos que a aritmética trate sejam os [números] inteiros, as letras *a* e *b* em ‘*a* + *b*’ indicam somentes os inteiros; o símbolo da

[38] “Up to now we have restricted our treatment to the [natural] Numbers. Let us now take a look at the other kinds of numbers, and try to make some use in this wider field of what we have learned in the narrower.”

[39] “How are complex numbers to be given to us then, and fractions and irrational numbers?”

[40] “If we abandon this purely formal method of treatment, we may fasten instead on the circumstance that, simultaneously with the introduction of new numbers, the meanings of the words ‘sum’ and ‘product’ are extended. [...]. So let us choose instead as our square root of –1 the time-interval of one second, and let this be symbolized by *i*. Thus 3*i* will mean the time-interval of 3 seconds, and so on. What object shall we then symbolize by, say, 2 + 3*i*? What meaning should be assigned to the plus symbol in this case? Now this must be laid down generally for all such cases, which clearly is not going to be easy.”

> soma precisa ser definido apenas entre os inteiros. Toda expansão do campo ao qual os objetos indicados por a e b pertençam nos obriga a fornecer uma nova definição do símbolo da soma. Parece ser exigido pelo rigor científico que nós asseguremos que uma expressão nunca se torne *bedeutungslos*; nós devemos cuidar para que nós nunca calculemos com símbolos vazios na crença de que estamos lidando com objetos. (FREGE, 1997, p. 141)[41]

Ainda numa terceira passagem, encontrada em seu livro *As Leis Básicas da Aritmética*, mais especificamente, no segundo volume datado de 1903, Frege diz:

> [...] Contudo, o símbolo de adição foi explicado apenas se a referência de toda combinação de símbolos possível da forma '$a + b$' foi determinada, independentemente dos nomes próprios referenciais que possam ser inseridos para 'a' e 'b'. Porém, se explicarmos tais combinações de símbolos apenas para o caso em que para 'a' e 'b', por exemplo, símbolos para números reais inteiros forem considerados, então na verdade explicamos somente essas combinações de símbolos, ao invés do símbolo de adição, violando assim um outro princípio básico de definição que ainda será discutido. E nós ainda imaginamos, de forma inconsciente, que a referência do símbolo de adição é conhecida, e o tratamos assim também naqueles casos para os quais nenhuma explicação foi dada. (FREGE, 2013, §65, Vol.2)[42]

Dadas as passagens citadas, podemos dizer que, com tal exigência, Frege está apenas demandando que o princípio da determinação completa seja respeitado, pois, ao introduzirmos novos objetos no domínio, as funções anteriormente definidas deixam de estar *completamente determinadas* para todos os objetos que estamos legitimados a considerar, de maneira que uma redefinição de cada uma delas se faria necessária. E é justamente tendo essa exigência em mente que Frege compreende o problema de Júlio César em *FA*.

Para entendermos de que modo Frege o compreende, relembremos como Frege

[41] "[...] So long as the only objects dealt with in arithmetic are the integers, the letters a and b in '$a + b$' indicate only integers; the plus sign need be defined only between integers. Every widening of the field to which the objects indicated by a and b belong obliges us to give a new definition of the plus sign. It seems to be demanded by scientific rigour that we ensure that an expression never becomes *bedeutungslos*; we must see to it that we never perform calculations with empty signs in the belief that we are dealing with objects."

[42] "[...] However, the addition-sign has been explained only if the reference of every possible combination of signs of the form '$a + b$' has been determined, whatever referential proper names might be inserted for 'a' and 'b'. Yet if one explains such combinations of signs just for the case, for example, where signs of whole real numbers are to be taken for 'a' and 'b', then one has indeed only explained those combinations, rather than the addition-sign, thereby violating a second basic principle of definition which remains to be discussed. And still one unwittingly imagines that the reference of the addition-sign is known and treats it accordingly also in those cases for which no explanation has been given."

chegou à formulação do princípio de Hume em *FA*. Frege procurava definir a expressão "o número de *F*s", que se definida adequadamente de acordo com as exigências fregeanas quanto a definições, nos concederia acesso aos números naturais e aos cardinais transfinitos. Para defini-lá, Frege julgou necessário um enunciado que pudesse ser convertido numa identidade entre nomes da forma "o número de *F*s", ou seja, um enunciado cujo o conteúdo fosse o mesmo que aquele expresso por "o número de *F*s = o número de *G*s". Frege percebeu então que o enunciado que expressa tal conteúdo é o enunciado "o conceito *F* é equinumérico ao conceito *G*", e assim estabeleceu o princípio de Hume, o que caracterizou uma definição contextual de "o número de *F*s". Se o domínio de objetos do sistema lógico de *FA* contivesse somente os números naturais e os cardinais transfinitos, isto é, se os únicos nomes que Frege pretendesse introduzir em *FA* fossem aqueles da forma "o número de *F*s", então ele consideraria o princípio de Hume como um bom critério de identidade para os objetos que compõem o seu domínio, pois, para todas as identidades que envolvem somente números naturais e cardinais transfinitos, para todos os enunciados de identidade da forma "o número de *F*s = o número de *G*s", que seriam os únicos enunciados de identidade possíveis, podemos, a partir do princípio de Hume, estabelecer as suas respectivas condições de verdade. Deste modo, a função de identidade estaria completamente determinada, definida para todos os objetos que se encontravam até então no domínio, e portanto o princípio de Hume, utilizado para definir tal função, estaria totalmente de acordo com as exigências fregeanas quanto a definições.

Contudo, Frege diz em *FA*:

> Do mesmo modo com as definições de frações, números complexos e do resto, tudo no final irá se resumir a procura de um conteúdo judicável que possa ser transformado numa identidade cujos lados sejam precisamente os novos números. Em outras palavras, o que nós precisamos fazer é fixar o sentido de um enunciado de reconhecimento para o caso destes números. Ao fazermos isso, nós não podemos esquecer as dúvidas geradas por tais transformações, que nós discutimos em §63-68. Se nós seguirmos o mesmo procedimento que nós adotamos lá, então os novos números são dados para nós como extensões de conceitos. (FREGE, 1960, §104)[43]

Nessa passagem, Frege está dizendo como colocar em prática o que ele havia dito em

[43] "In the same way with the definitions of fractions, complex numbers and the rest, everything will in the end come down to the search for a judgement-content which can be transformed into an identity whose sides precisely are the new numbers. In other words, what we must do is fix the sense of a recognition-judgement for the case of these numbers. In doing so, we must not forget the doubts raised by such transformations, which we discussed in §63-68. If we follow the same procedure as we did there, then the new numbers are given to us as extensions of concepts"

§92, a saber, estender as discussões relacionadas aos números naturais para outros tipos de números. O procedimento aqui é exatamente o mesmo que o descrito acima para a formulação do princípio de Hume. Só que, no caso em questão, Frege não está preocupado apenas com os números naturais, isto é, com os nomes da forma "o número de *F*s", mas também com outros tipos de números. Frege parece estar buscando uma definição dos outros tipos de números que nos permita acessá-los como objetos, que nos permita introduzí-los no domínio de objetos. Para essa definição, Frege também julga necessário um enunciado, um *conteúdo judicável*, que possa ser convertido numa identidade entre esses outros tipos números, ou seja, um enunciado que expresse o mesmo conteúdo que uma tal identidade. Claramente o princípio de Hume não será de utilidade nesse contexto, pois o princípio de Hume só define a identidade para o caso dos números naturais e cardinais transfinitos, isso se supormos que o domínio de objetos contém somente esses números. Em outras palavras, o princípio de Hume só fornece as condições de verdade de identidades da forma "o número de *F*s = o número de *G*s", em que nomes como "o número de *F*s" só nomeiam os naturais e os cardinais transfinitos. Além do mais, se o princípio de Hume fosse útil para definir os outros tipos de números, Frege não diria que é necessário um novo *conteúdo judicável* para a definição de tais números, uma vez que, quando ele diz isso, o princípio de Hume já havia sido proposto como o critério de identidade numérica. Podemos concluir, portanto, que o princípio de Hume não serve como critério de identidade para os objetos do domínio se ao domínio em questão pertencem outros objetos além dos números naturais e cardinais transfinitos, e em especial, se a tal domínio pertencem outros tipos de números, como os números inteiros e reais.

E foi justamente por esse motivo que Frege rejeitou o princípio de Hume em *FA*. Ele incluia no domínio de seu sistema lógico outros objetos além dos números naturais e cardinais transfinitos. Esses objetos, por sua vez, não eram quaisquer tipos de objetos. A formulação de Frege do problema de Júlio César pode dar a entender que ele incluia "não-números" no domínio de seu sistema lógico. Ao falar de Júlio César, Frege parece estar considerando os humanos como pertencendo ao seu domínio de objetos. Contudo, Frege não compreende que o seu domínio contém objetos como Júlio César ou Aristóteles, e nem que ele contém quaisquer outros tipos de objetos, como países ou planetas. Isto é, Frege não entende que nomes próprios como "Júlio César" e "Inglaterra" pertençam ao grupo de nomes que compõem o vocabulário de sua Conceitografia, até porque ele não fez nada para introduzí-los como tais. Ao falar de Júlio César, Frege está apenas indicando que o critério de identidade proposto não funciona para um domínio que contenha objetos além dos números naturais e cardinais transfinitos; ou seja, que o princípio de Hume não estabelece as condições de verdade de todos os enunciados de identidade de um sistema cujo o vocabulário contém nomes que não são da forma "o número de *F*s".

Os outros objetos que Frege pretendia incluir no domínio de seu sistema lógico eram os números inteiros, os números reais, os números racionais e etc; ou seja, os outros tipos de números além dos naturais e cardinais transfinitos. Uma vez que as expressões da forma "o número de *F*s" não nomeiam tais números, para introduzí-los como objetos no domínio da Conceitografia, Frege precisa de um novo tipo de nome próprio que designe esses números como objetos, e em seguida de um novo "princípio de Hume" a partir do qual seja possível definir esse tipo de nome próprio. Em outras palavras, Frege precisa de um novo critério de identidade para os objetos que ele está considerando como pertencendo ao seu domínio; de um critério que funcione para todos os tipos de números que ele pretende considerar, e não somente para os números naturais e cardinais transfinitos. Não bastaria para Frege, por exemplo, formular um critério de identidade para cada tipo de número que pertença ao domínio de *FA*, de tal modo que o conjunto do números naturais, o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números reais tenham, respectivamente, um critério de identidade próprio. Se Frege assim procedesse, ele não seria capaz de distinguir os números que pertencem a conjuntos distintos e, deste modo, a função de identidade não estaria determinada para todos os objetos do domínio, de acordo com o princípio da determinação completa.

Uma vez que o princípio de Hume constitui um critério de identidade somente para os números naturais e cardinais transfinitos, podemos dizer que o problema de Júlio César em *FA*, de um ponto de vista ontológico, é o seguinte: a partir do princípio de Hume, não podemos distinguir números de diferentes tipos. Se ao domínio de objetos pertencem somente os números naturais e cardinais transfinitos, é possível, por um lado, distinguir o número natural 0 do número natural 1. Por outro lado, o domínio de objetos do sistema de Frege contém tanto os números naturais como, por exemplo, os números inteiros, de modo que não é possível distinguir o número natural 0 do número inteiro 1. Não podemos nem mesmo distinguir o número natural 0 do número inteiro 0, uma vez que o princípio de Hume não constitui um critério de identidade comum para ambos os objetos. Agora, de um ponto de vista formal, isto é, levando-se em conta a linguagem lógica de *FA* e as fórmulas bem-formadas que a partir dela podem ser construídas, o problema de Júlio César é o seguinte: o princípio de Hume não é capaz de estabelecer as condições de verdade de todos os enunciados de identidade bem-formados da linguagem lógica. A partir do princípio de Hume, não somos capazes de estabelecer, por exemplo, as condições de verdade de um enunciado de identidade em que, de um lado, temos o nome de um número natural, e em que, do outro lado, temos o nome de um número inteiro. Suponhamos que a expressão "o número de *G*s" nomeia o número natural 0. Suponhamos também que, na Conceitografia de Frege, a expressão que nomeia o número inteiro 0 é "I<0,0>". O enunciado de identidade "o número de *G*s = I<0,0>" seria, portanto, um enunciado de identidade bem-formado da Conceitografia cujas condições de verdade não são estabelecidas pelo princípio de

Hume, uma vez que a expressão “I<0,0>” não possui a forma “o número de *F*s”.

Essa é a minha interpretação do problema de Júlio César em *FA*. Frege entendia o problema de Júlio César como um problema *formal*, como um problema quanto à formação de enunciados de identidade bem–formados de sua linguagem lógica. A partir das passagens citadas, podemos dizer que ele tinha em mente introduzir no vocabulário da Conceitografia nomes próprios para os outros tipos de números. Contudo, ele se deparou com o problema de Júlio César; ou seja, ele percebeu que os enunciados de identidade bem–formados construídos a partir desses novos nomes a serem introduzidos não são abarcados pelo princípio de Hume. Obviamente, Frege não precisaria introduzir um mesmo tipo de nome para todos os números que pertencem ao seu domínio de objetos. Ele poderia, se assim lhe fosse conveniente, continuar nomeando os números naturais pelos nomes da forma “o número de Fs” e para os outros tipos de números introduzir, respectivamente, nomes que possuem outras formas. O importante é que todos os objetos, todos os números nomeados por essas expressões de formas distintas possuam um critério de identidade em comum, de modo que todos os enunciados de identidade bem-formados da linguagem lógica possam ter suas respectivas condições de verdade determinadas. Ao fornecer tal critério de identidade, Frege poderia, como ele mesmo sugere na última citação acima, reduzir todos esses números à extensões de conceitos, assim como ele fez com os números naturais.

É importante dizer que, mesmo que Frege fornecesse um tal critério de identidade, ele, muito provavelmente, ainda definiria todos esses números em termos de extensões de conceitos, assim como ele fez com os números cardinais (naturais e cardinais transfinitos). Lembremos que, assim que Frege define os números cardinais explicitamente em termos de extensões de conceitos, ele deriva o princípio de Hume de tal definição, de modo que o princípio de Hume, embora não constitua mais uma definição dos cardinais, permanece sendo, para Frege, o critério de identidade deles. Ou seja, uma definição dos números em termos de extensões de conceitos não é, para Frege, incompatível com um critério de identidade numérico como o princípio de Hume. As razões pelas quais Frege rejeita o princípio de Hume como uma *definição*, e não como um *critério de identidade*, dos números cardinais parecem ser duas: além do problema de Júlio César que atinge tal princípio, Frege parece estar determinado a identificar os números cardinais com determinados objetos lógicos, conhecidos de antemão, que vem a ser as extensões de conceitos (os percursos de valor). Ora, se Frege “aceitava” o princípio de Hume como um critério de identidade *para os números cardinais* e se, mesmo assim, ele forneceu uma definição dos cardinais em termos de percursos de valor, é muito provável que ele, ainda que tendo a sua disposição um critério de identidade para todos os tipos de números, definisse esses números em termos de percursos de valor, porque ele queria identificá-los com um determinado tipo de objeto. O próprio Frege sugere isso, como vimos na última citação: “[...] Se nós seguirmos o mesmo procedimento que nós adotados lá, então *os novos números* são dados para nós *como extensões de conceitos*." (FREGE, 1960, §104, grifo meu)[44]. Portanto, Frege não entendia que um critério de identidade geral para todos os tipos de números fosse incompatível com uma definição desses números em termos de percursos de valor.

2.3 Os números naturais e a impredicatividade da definição de número natural

Logo após ter definido o conceito de número cardinal, Frege define os números naturais individuais e a relação *ser sucessor imediato*. Uma vez que todo objeto é idêntico a si mesmo e que, logicamente, nada cai sob o conceito *diferente de si mesmo*, Frege (1960, §74) estabelece que 0 é o número desse conceito e, portanto, define:[45]

- $0 =_{def}$ a extensão do conceito *ser equinumérico ao conceito 'diferente de si mesmo'*

Em seguida, Frege define a relação *ser sucessor imediato*. Tal definição será importante para entendermos como ele define os outros números naturais, e ela é como se segue (FREGE, 1960, §76):

- $S(n, m) \equiv_{def} \exists F \exists y (Fy \wedge (n = NxFx \wedge m = Nx(Fx \wedge \sim (x = y))))$

Ou seja, n é o sucessor imediato de m se e somente se houver um conceito F e um objeto y, tal que y é F, n é o número de Fs, e m é o número do conceito *ser F e diferente de y* (o número de objetos que caem sob F que são diferentes de y).

44 "[...] If we follow the same procedure as we did there, then the new numbers are given to us as extensions of concepts"

45 Lembremos, novamente, que o principal objetivo de Frege é demonstrar a tese de que a aritmética é redutível à lógica. As definições dos números naturais individuais devem, deste modo, estar baseadas somente em noções lógicas. Agora, consideremos os conceitos *cisne negro* e *corvo branco*. Sob cada um desses conceitos não cai absolutamente nenhum objeto, e qualquer conceito F que seja equinumérico a algum deles é equinumérico a ambos. Por conseguinte, os conceitos *ser equinumérico ao conceito "cisne negro"* e *ser equinumérico ao conceito "corvo branco"* compartilham a mesma extensão (por conveniência, chamemos esses dois conceitos de "N" e "B", respectivamente), a saber, aquela extensão cujo os membros são todos os conceitos que não se aplicam a nenhum objeto. A princípio, tanto a extensão de N como a extensão de B poderiam ser utilizadas para definir o número zero. Contudo, tal definição não seria útil para os propósitos de Frege, uma vez que está longe de ser uma verdade lógica que não existem cisnes negros, ou que não existem corvos brancos. Para definir o número zero, Frege precisou, portanto, identificar um conceito do qual possamos demonstrar por meios puramente lógicos não se aplicar a nenhum objeto. Dado que não é necessário nenhum recurso a qualquer tipo de intuição para sabermos que um dado objeto, seja ele qual for, é idêntico a si mesmo, "todo objeto é idêntico a si mesmo" ("$\forall x(x = x)$") expressa uma verdade lógica. Por conseguinte, "nenhum objeto é diferente de si mesmo" ("$\sim \exists x \sim (x = x)$") também expressa uma verdade lógica, ou seja, é logicamente verdadeiro que na extensão do conceito *diferente de si mesmo* não se encontra nenhum objeto. Assim sendo, a definição de Frege do número zero está de acordo com o projeto logicista.

Tendo definido 0 e a relação *ser sucessor imediato*, Frege está pronto para definir os outros números naturais. Para definir o sucessor imediato de 0, Frege precisa de um conceito sob o qual caia exatamente um objeto a mais do que sob o conceito ao qual 0 se aplica, isto é, do que sob o conceito *diferente de si mesmo*. Ele escolhe o conceito *idêntico a 0*, e estabelece que 1 é o número desse conceito. Observemos que sob o conceito *idêntico a 0* cai exatamente um objeto a mais do que sob o conceito *diferente de si mesmo*, a saber, o próprio 0. Assim sendo, Frege (1960, §77) define o 1:

- 1 $=_{def}$ a extensão do conceito *ser equinumérico ao conceito 'idêntico a 0'*

De acordo com a definição de *ser sucessor imediato*, para definir o sucessor de 1, Frege precisa de um conceito sob o qual caia exatamente um objeto a mais do que sob o conceito ao qual 1 se aplica, ou seja, do que sob o conceito *idêntico a 0*. Frege determina que 2 é o número do conceito *idêntico a 0 ou 1*, sob o qual caem os números 0 e 1 (que já foram definidos) e nenhum objeto a mais, ou seja, sob o qual cai exatamente um objeto a mais do que sob o conceito *idêntico a 0*. Deste modo, Frege define:

- 2 $=_{def}$ a extensão do conceito *ser equinumérico ao conceito 'idêntico a 0 ou 1'*

O procedimento geral para a definição de todos os números naturais, com a exceção de 0, é: a partir do último número definido (digamos, 2) e dos números definidos anteriormente (0 e 1), nós obtemos um novo conceito *F* (*idêntico a 0 ou 1 ou 2*), e definimos o sucessor imediato (3) do último número definido como a extensão do conceito *ser equinumérico ao conceito 'F' ('idêntico a 0 ou 1 ou 2')*. É curioso que Frege (1960, §107) chega ainda a dizer que ele não julga essencial para a definição dos números e, assim, para a concretização do projeto logicista o recurso a extensões de conceitos, mesmo após ter considerado as soluções definicionais que tal recurso proporciona.

Naturalmente, o procedimento de Frege acima para a definição de todos os números naturais só funciona sob o pressuposto de que os números são objetos. Para percebermos isso, observemos que, se todos os números até um número n (digamos, 4) já foram definidos, o próximo a ser definido, o sucessor de n (5), será definido como o número de um certo conceito *F* (*idêntico a 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4*), de tal modo que sob *F* devem cair exatamente n+1 (5) objetos. Uma vez que a estratégia de Frege é determinar *F* indicando precisamente os n+1 objetos (0, 1, 2, 3 e 4) que caem sob esse conceito, ele precisará ter acesso a n+1 objetos para que ele possa utilizá-los na determinação de tal conceito (*F*). E é justamente a tese de que os números são objetos que permite que a Frege sejam dados n+1 objetos, pois tendo já definido os números de 0 a n (4), e sendo esses números objetos, Frege tem a sua disposição n+1 (5) objetos, obtidos ao contarmos de 0 a n (0, 1, 2, 3 e 4), e pode utilizá-los na determinação do conceito F (*idêntico a 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4*). Após ter determinado o conceito F, Frege pode finalmente definir o sucessor (5) de n, e assim enxergamos o porquê da definição de Frege dos números naturais exigir que os números sejam tratados como objetos.

Depois de ter definido os números naturais individuais, Frege se volta para o conceito geral de número natural. Nesse momento, é importante destacarmos de antemão uma característica da lógica de Frege que se tornará evidente ao apresentarmos a sua definição de número natural. A característica em questão é a seguinte: na lógica de Frege, os respectivos escopos dos quantificadores contêm *somente* as entidades *introduzidas* da ordem correspondente ao quantificador. Com "entidades introduzidas", eu me refiro às entidades que por meio de definições ou estipulações foram incorporadas ao domínio, seja esse o domínio de objetos ou de funções; ou seja, são aquelas entidades que mediante uma definição ou uma estipulação receberam um nome (um termo singular ou uma expressão funcional) que, por sua vez, foi inserido no vocabulário da Conceitografia. Os quantificadores *de primeira ordem* de Frege devem percorrer, portanto, todos os *objetos* introduzidos, e não somente os números naturais, de modo que, para Frege, os números naturais somente serão dados para nós se a sua definição do conceito *número natural* decidir sobre *todos* os objetos do domínio, isto é, se ela determinar, para qualquer objeto percorrido pelos quantificadores se ele é ou não é um número natural. Igualmente, os quantificadores *de segunda ordem* devem percorrer todas as *funções de primeira ordem* (incluindo os conceitos) introduzidas. Os de terceira ordem devem percorrer todas as funções de segunda ordem introduzidas, e assim por diante.

Vimos que o procedimento de Frege para a geração de todos os números naturais tem como base a relação *ser sucessor imediato*, e que, portanto, tal relação é aquela que caracteriza a construção do conjunto dos números naturais. Assim como para a definição dos números naturais individuais, a relação *ser sucessor imediato* também é essencial para a definição de Frege de *número natural*. Dada a relevância dessa relação para as definições de Frege, antes de apresentarmos a sua definição do conceito de número natural, é importante ressaltarmos rapidamente as propriedades que constituem a relação *ser sucessor imediato*. Em particular, destacaremos aquela propriedade que é indicada pelo artigo definido 'o' ao falarmos *do* sucessor imediato de um número x. Como é ponto pacífico em filosofia da linguagem, ao utilizarmos artigos definidos, estamos pressupondo a existência e a unicidade do objeto que satisfaz a propriedade em questão, no nosso caso, a propriedade *ser sucessor imediato de x*, de maneira que o artigo definido 'o' da expressão '*o* sucessor imediato de x' está indicando que a relação *ser sucessor imediato* é unívoca, ou funcional. Uma relação funcional é uma função que liga cada objeto de nosso domínio a no máximo um objeto de nosso contradomínio.[46] Deste modo, podemos expressar a funcionalidade da relação *ser sucessor imediato* da seguinte maneira: sejam quaisquer x, y e z, se tanto y como z são sucessores imediatos de x, disso se segue que y tem de ser igual a z. Ao utilizarmos o símbolo "$S(\ ,\ )$" para denotarmos a relação *ser sucessor imediato*, a sua funcionalidade pode ser representada formalmente nos seguintes termos:

- $\forall x \forall y \forall z((S(y,x) \wedge S(z,x)) \longrightarrow y = z)$

Depois de termos salientado a funcionalidade da relação *ser sucessor imediato*, podemos dizer que, para Frege, os números naturais são simplesmente 0, *o* sucessor imediato de 0, *o* sucessor imediato do sucessor imediato de 0, e assim sucessivamente. Ora, uma vez que Frege concebe os números naturais de tal maneira, a fim de definir o conceito geral de número natural, ele deverá indicar como essa cadeia de sucessores, partindo do 0, pode ser dada por meios puramente lógicos. Para isso, Frege pede que levemos em consideração todo conceito F que satisfaz conjuntamente as seguintes condições:

- (1) 0 é F
- (2) Para todo x e y, se x é F e y é sucessor imediato de x, então y também é F

A segunda condição pode ser abreviada ao dizermos que F é hereditária na relação *ser sucessor imediato*.[47] O que Frege está querendo, portanto, é que consideremos todas as propriedades que são passadas de número para número a partir de 0 através da relação *ser sucessor imediato*.

Frege então constata duas coisas: em primeiro lugar, que os números naturais caem sob todo conceito F que satisfaz as condições (1) e (2); em segundo lugar, que os objetos que caem sob todo conceito F que satisfaz (1) e (2) são números naturais. Para entendermos o porquê da primeira constatação, suponhamos que n é um número natural e que G é um conceito qualquer que satisfaz as condições (1) e (2). Pela condição (1), 0 é G; pela condição (2), o sucessor imediato de 0 é G; novamente pela condição (2), o sucessor imediato do sucessor imediato de 0 também é G, e assim por diante. Ora, podemos perceber que, se n é de fato um número natural, ou seja, se n é um número que nós obtemos ao, começando do 0, aplicarmos repetidamente a relação *ser sucessor*

[46] Ver a definição de funcionalidade do capítulo 1.
[47] Ver a definição de hereditariedade do capítulo 1.

imediato, então n também será G, pois n terá a forma "o sucessor imediato do ... do sucessor imediato de 0". Quanto a segunda constatação, suponhamos que m é um objeto qualquer que cai sob todo conceito F que satisfaz (1) e (2). De acordo com Frege, entre os conceitos que satisfazem (1) e (2) encontramos o conceito de número natural. Ora, uma vez que *número natural* é um dos conceitos F que satisfazem (1) e (2) e que m é um objeto que cai sob todo conceito F que satisfaz tais condições, então m também cai sob o conceito *número natural*, sendo assim um número natural. No fundo, o que essas duas constatações conjuntamente expressam é que, para ser número natural, é condição necessária e suficiente cair sob todo conceito F que satisfaz as condições (1) e (2) e, tendo isso em mente, Frege (1960, §83) define o conceito de número natural:

- n é um número natural $\equiv_{def}$ n cai sob todo conceito F que satisfaz (1) e (2)

Formalmente, tal definição pode ser expressa do seguinte modo:

- $\mathbb{N}n \equiv_{def} \forall F((F0 \wedge \forall x \forall y((Fx \wedge S(y,x) \longrightarrow Fy)) \longrightarrow Fn)$

É isso que Frege (1960, §83) quer dizer com "n é um membro da sequência dos números naturais que começa com 0"[48], isto é, que n tem toda a propriedade que vale de 0 e que é hereditária na relação *ser sucessor imediato*.

Por outro lado, uma vez que Frege concebe a sequência dos números naturais como a S-sequência (a sequência dada pela relação *ser sucessor imediato*) que começa com 0, podemos dizer que, para ele, a expressão "n é um membro da sequência dos números naturais que começa com 0" tem o mesmo significado que "n pertence à S-sequência que começa com 0". Ora, mas de acordo com o próprio Frege (1972, §29), a expressão "n pertence à S-sequência que começa com 0" pode ser traduzida pela expressão "0 é ancestral fraco de n na S-sequência", de modo que "n é um membro da sequência dos números naturais que começa com 0" também significa o mesmo que "0 é ancestral fraco de n na S-sequência" . Em outras palavras, a expressão "n é um número natural" pode igualmente ser definida por meio do conceito de ancestral fraco e, sendo assim, podemos ver a definição de Frege de número natural da seguinte maneira:

- $\mathbb{N}n \equiv_{def} S^{**}(0, n)$,

[48] "n is a member of the series of natural numbers beginning with 0"

como já havíamos antecipado no capítulo 1. Também no capítulo 1, vimos que Frege define o conceito de ancestral fraco deste modo:

- $R^{**}(x, y) \equiv_{def} R^{*}(x, y) \vee (y = x)$

e, por conseguinte, a sua definição do conceito de número natural diz que:

- $\mathbb{N}n \equiv_{def} S^{*}(0, n) \vee (n = 0)$;

ou seja, para Frege, n é um número natural se e somente se 0 é ancestral forte de n na S-sequência ou n é igual a 0. Como o conceito de ancestral forte é definido logicamente[49], podemos dizer que a definição de Frege de número natural é feita em termos puramente lógicos, uma vez que ela faz uso somente do conceito de ancestral forte, da relação de identidade e de 0.

Vimos com a segunda constatação acima que, para Frege, o conceito de número natural está entre os conceitos F que satisfazem as condições (1) e (2). Isso só acontece, por sua vez, porque a definição de Frege de número natural possui a seguinte característica: o escopo do quantificador de segunda ordem que nela ocorre contém o próprio conceito *número natural*. A razão pela qual o quantificador de segunda ordem da definição também percorre o conceito definido, isto é, o conceito *número natural*, é que os escopos dos quantificadores da lógica de Frege, como já vimos, contêm todas as entidades introduzidas da ordem correspondente ao quantificador. Os quantificadores de segunda ordem, portanto, percorrem todos os conceitos de primeira ordem introduzidos, em especial, o conceito de número natural, que foi introduzido pela própria definição. Dado que a definição de Frege contém um quantificador que percorre o próprio conceito definido, poderíamos facilmente pensar que ela é circular. Contudo, em seu *definiens*, o predicado "número natural", que designa o conceito em questão, não ocorre. Ao invés disso, Frege simplesmente supõe que o conceito *número natural* se encontra no escopo do quantificador de segunda ordem da definição.

Tal característica da definição de número natural, embora não implique uma circularidade, a torna impredicativa. Uma definição é impredicativa se ela menciona ou, como é o caso da definição de Frege, quantifica sobre o conceito definido. Esse tipo de definição pode nos causar algum estranhamento, uma vez que, ao tentarmos aplicá-la para descobrirmos se um determinado objeto cai ou não sob o conceito definido, parece que estamos pressupondo que já temos uma certa familiaridade com o conceito em questão, de maneira que nós já saberíamos quais objetos caem sob ele. Frege, no entanto, não se incomoda com esse caráter impredicativo da definição. Isso porque ele

[49] Ver a definição do capítulo 1.

não está preocupado com aspectos psicológicos, ou seja, ele não faz questão que uma definição seja tal que ela constitua, para aquele que a apreende, a melhor maneira de explicar um conceito. Basta que a definição represente logicamente o conceito definido, de modo que, por meio de uma análise dos enunciados da aritmética em termos dos conceitos definidos, seja possível uma redução da aritmética à lógica.

3 *AS LEIS BÁSICAS DA ARITMÉTICA* E O PROBLEMA DE JÚLIO CÉSAR

Como foi dito no primeiro capítulo, o grande objetivo de Frege era demonstrar o logicismo, isto é, a tese de que a aritmética é redutível à lógica. Ao longo do capítulo anterior, vimos que, em *FA*, Frege pretendeu definir logicamente conceitos, relações e objetos aritméticos, de maneira que tal objetivo pudesse ser alcançado. Para que Frege conseguisse reduzir a aritmética à lógica, ele precisava provar todo o conhecimento aritmético em bases puramente lógicas, ou seja, nos mostrar que todas as verdades da aritmética são, no fundo, teoremas da lógica. Contudo, ele não conseguiria atingir o seu objetivo se ele tentasse derivar logicamente, uma por uma, cada verdade da aritmética, uma vez que existem infinitos teoremas aritméticos. Portanto, para executar o seu programa, Frege precisou, em primeiro lugar, descobrir quais são *as verdades básicas e fundamentais da aritmética*, nas quais todas as outras estão baseadas, e em seguida provar que essas verdades podem ser derivadas por meio das definições de seu sistema. Deste modo, Frege teria demonstrado, ainda que indiretamente, que todos os teoremas da aritmética se seguem logicamente de suas definições.

3.1 Os axiomas de Dedekind-Peano

Ainda que Frege não tenha falado que essas verdades básicas da aritmética são *os axiomas de Dedekind-Peano*, podemos certamente dizer que ele tinha em mente esses axiomas, que são mencionados por ele em *FA* (com exceção dos axiomas II e VI) e que podem ser formulados como se segue:[50]

1. Axioma I: $\mathbb{N}0$ (FREGE, 1960, §83)

2. Axioma II: $\forall x \forall y((\mathbb{N}x \land S(y,x)) \longrightarrow \mathbb{N}y)$

3. Axioma III: $\forall x \forall y \forall z((S(y,x) \land S(z,x)) \longrightarrow y = z)$ (FREGE, 1960, §78)

[50] O axioma I se segue imediatamente da definição de número natural do capítulo anterior, de modo que ele é indiretamente mencionado em *FA* ao Frege definir o conceito de número natural. Para percebermos isso, consideremos que "$\mathbb{N}0$" será verdadeiro se e somente se "$\forall F((F0 \land \forall x \forall y((Fx \land S(y,x) \longrightarrow Fy)) \longrightarrow F0)$" também for verdadeiro. Ora, mas "$\forall F((F0 \land \forall x \forall y((Fx \land S(y,x) \longrightarrow Fy)) \longrightarrow F0)$" expressa uma verdade lógica, ou seja, é sempre verdadeiro, uma vez que "$\forall F((F0 \land B) \longrightarrow F0)$" é logicamente verdadeiro independentemente do que "*B*" seja. Portanto, "$\mathbb{N}0$" será sempre verdadeiro e, assim, 0 satisfaz trivialmente a definição de número natural. Dada a definição de número natural em termos do conceito de ancestral fraco, podemos perceber a mesma coisa, ao considerarmos que "$\mathbb{N}0$" será verdadeiro se e somente se "$S^*(0, 0) \lor (0 = 0)$" for igualmente verdadeiro. Uma vez que "$(0 = 0)$" é uma verdade lógica e que, deste modo, "$A \lor (0 = 0)$" é logicamente verdadeiro independentemente do que "*A*" seja, "$S^*(0, 0) \lor (0 = 0)$" também expressará uma verdade lógica, de maneira que "$\mathbb{N}0$" será sempre verdadeiro, e, assim, percebemos novamente que 0 satisfaz trivialmente a definição de número natural.

4. Axioma IV: $\forall x \sim S(0,x)$ (FREGE, 1960, §78)

5. Axioma V: $\forall x \forall y \forall z((S(z,x) \wedge S(z,y)) \longrightarrow x = y)$ (FREGE, 1960, §78)

6. Axioma VI: $\forall F((F0 \wedge \forall x \forall y((Fx \wedge S(y,x) \longrightarrow Fy)) \longrightarrow \forall x(\mathbb{N}x \longrightarrow Fx))$

7. Axioma VII: $\forall x(\mathbb{N}x \longrightarrow \exists y S(y,x))$ (FREGE, 1960, §79 e §82-83)

No que diz respeito especificamente a esses axiomas, se "0", "*número natural*" e "*ser sucessor imediato*" são definidos de tal forma que tais axiomas resultam verdadeiros, então o conjunto dessas definições satisfaz os axiomas de Dedekind-Peano. O principal objetivo de Frege, deste modo, era nos mostrar que, partindo apenas de suas definições e da lógica, nós conseguimos derivar os axiomas acima, ou seja, que tais definições tornam esses axiomas verdadeiros, de maneira que elas satisfazem os axiomas de Dedekind-Peano.

Apesar de Frege ter apresentado alguns esboços de prova para ilustrar como as suas definições funcionariam a serviço da tese logicista[51], ele não provou efetivamente em *FA* os axiomas de Dedekind–Peano a partir das definições fornecidas. Frege reservou a execução dessa tarefa para o seu último livro *As Leis Básicas da Aritmética*. Que Frege tenha adiado a tarefa em questão para um livro posterior não é nenhuma surpresa, uma vez que o objetivo traçado em *FA* não era o de estabelecer de uma vez por todas o logicismo, mas sim dar uma maior plausibilidade à tese de que os enunciados da aritmética são analíticos, isto é, de que eles podem ser provados partindo-se somente de definições e leis lógicas. Frege, de fato, esperou ter alcançado tal objetivo, pois ele disse na conclusão de *FA*: "Eu espero poder afirmar no presente trabalho ter tornado provável que as leis da aritmética são juízos analíticos e, consequentemente, a priori. Assim, a aritmética se torna simplesmente um desenvolvimento da lógica, ainda que um desenvolvimento derivativo." (FREGE, 1960, §87)[52]. *FA*, portanto, deveria ter um caráter introdutório, em que Frege motivaria o logicismo, sendo a verdadeira demonstração da tese logicista postergada para *As Leis Básicas da Aritmética*.

Uma vez que o objetivo do presente trabalho não é realizar uma análise das provas que Frege forneceu dos axiomas de Dedekind-Peano, apenas indicarei onde, em *LB*[53], estão as respectivas provas dos axiomas em questão. Todas elas, com exceção da prova do axioma II, se encontram no volume I do livro, e foram feitas, obviamente, na linguagem formal de Frege, a Conceitografia.

O axioma I, que diz que 0 é um número natural, e que se segue diretamente da definição de Frege de número natural, é o teorema 140 de *LB*, demonstrado em Frege

[51] O esboço de prova do axioma VII, por exemplo, se encontra em Frege (1960, §82 e §83).
[52] "I hope I may claim in the present work to have made it probable that the laws of arithmetic are analytic judgements and consequently a priori. Arithmetic thus becomes simply a development of logic, albeit a derivative one."
[53] Daqui em diante, ao escrever ''*LB*", refiro-me a "*As Leis Básicas da Aritmética*".

(2013, §113, p. 143). O axioma II, que diz que o sucessor imediato de todo número natural também é um número natural, é o teorema 108 da *Conceitografia*, obtido em Frege (1972, §30, p. 189). O axioma III, que expressa que a relação *ser sucessor imediato* é uma relação funcional, é o teorema 71 de *LB*, demonstrado pela prova B de Frege (2013, §66 - §87). O axioma que diz que 0 não é o sucessor imediato de nenhum número natural, o axioma IV, é o teorema 108 de *LB*, obtido em Frege (2013, §103, p. 131). O axioma V, que afirma que a relação inversa da relação *ser sucessor imediato* também é funcional, é o teorema 89 de *LB*, cujo a prova é a prova Γ de Frege (2013, §88 - §95). O princípio de indução matemática, o axioma VI, que diz que os números naturais possuem todas as propriedades que valem de 0 e que são hereditárias na relação *ser sucessor imediato*, é o teorema 128 de *LB*, demonstrado em Frege (2013, §111, p. 139). Por fim, o axioma VII, que expressa que todo número natural tem um sucessor imediato, é o teorema 155 de *LB*, cujo a prova é a prova H de Frege (2013, §114 - §119).

3.2 A indeterminação de percursos de valor

Como vimos no capítulo 2, a solução de Frege para o problema de Júlio César na definição contextual dos cardinais foi definir os números explicitamente, da seguinte maneira:

- O número de Fs $=_{def}$ a extensão do conceito *ser equinumérico a F*

Como também vimos, essa solução pressupõe que o sentido de identidades como "Júlio César = a extensão do conceito *ser equinumérico ao conceito 'número primo par'*", em que somente um nome da forma "a extensão de E" ocorre, pode ser fornecido pela definição em questão. Uma vez que Frege, em *LB*, interpreta as extensões de conceitos como percursos de valor[54] de funções específicas, a saber, daquelas funções cujo respectivo valor, quando saturadas, é um valor de verdade, a solução acima pressupõe que o sentido de todas as sentenças da forma "$x = \dot{\varepsilon}F(\varepsilon)$", em que "$x$" pode ser qualquer nome e "$\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)$" é um termo singular que designa o percurso de valor da função F, está determinado.

Frege percebeu, contudo, que o problema de Júlio César também afeta sentenças da forma "$x = \dot{\varepsilon}F(\varepsilon)$". Consideremos como Frege (2013, §3, Vol.1) introduziu a noção de percurso de valor em *LB*: a expressão "a função F tem o mesmo percurso de valor que a função G" é correferencial à expressão "as funções F e G sempre têm o mesmo valor para os mesmos argumentos". O que Frege quer assegurar ao introduzir percursos de valor desse modo é a transformação da generalidade de uma equação numa equação

[54] Assim como com as extensões de conceitos, Frege não deixa claro o que seriam percursos de valor. Podemos interpretá-los, no entanto, como objetos que estariam associados a todos os tipos de funções, sejam essas conceitos ou funções em geral de qualquer ordem.

entre percursos de valor, e vice-versa. Esse, por sua vez, é justamente o conteúdo do axioma V de *LB*, que diz:

$$\vdash (\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$$ (FREGE, 2013, §20, Vol.1)

O que a expressão "$(\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$" significa é que as funções f e g têm *o mesmo* valor para *qualquer* argumento. O conteúdo da expressão "$(\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha))$", por sua vez, é que *os percursos de valor* das funções f e g são *o mesmo*. O que o Axioma V afirma, portanto, é que a generalidade de uma equação entre os valores de funções para o mesmo argumento *significa o mesmo que* a igualdade entre os respectivos percursos de valor dessas funções. Tendo já introduzido uma notação para percursos de valor, Frege entendia que o axioma V é aquele que permite que transformemos, no sistema de *LB*, qualquer expressão funcional no nome do percurso de valor da função correspondente.

Frege (2013, §10, Vol.1) observou que o axioma V, no entanto, não determina completamente a referência de um nome da forma "$\grave{\varepsilon}\mathrm{F}(\varepsilon)$". Para ele, o axioma V nos permite reconhecer um percurso de valor somente se tal objeto nos é dado por um nome da forma "$\grave{\varepsilon}\mathrm{F}(\varepsilon)$"; ou seja, nós não conseguiríamos saber, com base no axioma V, se um certo objeto, que não é designado por um nome da forma acima, é ou não é um percurso de valor. Esse problema também poderia ser colocado da seguinte maneira: o axioma V não estabelece o sentido de todos os enunciados de identidade da forma "$x = \grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$". Ele somente fornece sentido a enunciados de identidade como "$\grave{\varepsilon}G(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$", em que, no lugar de "$x$", encontramos um outro nome da forma "$\grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$". Ao substituirmos "$x$" por "Aristóteles", por exemplo, ou por "$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$", que, para Frege, é um nome que designa o *Verdadeiro*, o axioma V não fornece sentido aos enunciados de identidade resultantes "Aristóteles = $\grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$" e "$(\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}) = \grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$", pois nem "Aristóteles" nem "$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$" são nomes da forma "$\grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$". Aqui, Frege se deparou novamente com o problema de Júlio César, que, dessa vez, não diz respeito a uma *definição* dos números cardinais, mas sim à introdução de, ou à *estipulação* do que seriam percursos de valor, em termos dos quais, em seções posteriores de *LB*, os cardinais são definidos.

Embora Frege tenha, em *FA*, abandonado a definição contextual dos cardinais por causa do problema de Júlio César, em *LB*, ele não abre mão do axioma V. Dada a concepção de Frege (2013, §33, Vol.1; §146, Vol.2) de definição e do seu papel, o axioma V não é propriamente uma definição, uma vez que aquilo que seria o seu *definiendum*, a expressão do lado esquerdo do segundo símbolo de identidade, já contém um símbolo completamente conhecido, a saber, o próprio símbolo de identidade "=" e, portanto, se Frege considerasse o axioma V como uma definição, ele violaria totalmente os seus princípios de definição em §33 de *LB*. Além do mais, o axioma V não é uma definição também pelo fato dele nem ter um caráter abreviativo, nem ser dispensável, características que qualquer definição deve possuir, de acordo com Frege (2013, p.

VI, Vol.1). O fato de Frege ter considerado o axioma V não como uma estipulação *dispensável* (uma definição), mas sim como algo *essencial* para os nomes de percursos de valor, o obrigou a permanecer com esse axioma, e a eliminar a indeterminação gerada pelo problema de Júlio César pouco a pouco. O procedimento que eliminava paulatinamente tal indeterminação era estabelecer, para cada nova função F introduzida no sistema de LB, o valor que F deveria ter para percursos de valor como argumento.

Uma vez que, no momento em que Frege se deparou com o problema de Júlio Ceśar em §10, as únicas funções introduzidas tinham sido todas reduzidas à função de identidade[55], Frege só precisou estabelecer qual valor tal função tem para percursos de valor como argumentos. Além disso, dado que os únicos objetos introduzidos até então eram os percursos de valor e os valores de verdade, bastava que Frege fizesse estipulações adicionais que identificassem os valores de verdade com percursos de valor específicos.[56] Para tanto, Frege identificou o *Verdadeiro* com o percurso de valor $\dot{\varepsilon}\!-\!\!-(\varepsilon)$, que corresponde à função $-\!\!-\xi$ (a função *horizontal*), cujo o valor é o Verdadeiro somente quando o seu argumento for o Verdadeiro, e cujo o valor é o Falso para qualquer outro argumento. Em seguida, Frege identificou o valor de verdade *Falso* com o percurso de valor $\dot{\varepsilon}(\varepsilon = (-\!\!\top\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\,(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a})))$, que corresponde à função $\xi = (-\!\!\top\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\,(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}))$, cujo o valor é o Verdadeiro somente quando o seu argumento for o Falso, e cujo o valor é o Falso para qualquer outro argumento. Ou seja, para resolver o problema de Júlio César que atinge o axioma V, Frege estipulou duas coisas: em primeiro lugar, que a

---

[55] Na verdade, Frege reduz *as condições de verdade* das funções até então introduzidas às condições de verdade da identidade. As funções em questão são: (1) o horizontal "$-\!\!-\xi$", (2) a negação "$-\!\!\top\!\!-\,\xi$" e (3) o condicional "$\begin{array}{l}-\!\!\top\!\!-\,\zeta\\ \;\lfloor\!-\,\xi\end{array}$". Em primeiro lugar, Frege reduz as condições de verdade da negação e do condicional às condições de verdade do horizontal. Para entendermos como isso funciona, consideremos as condições de verdade do horizontal. O valor da função "$-\!\!-\xi$" é o Verdadeiro somente quando o seu argumento for o Verdadeiro, e é o Falso para qualquer outro argumento diferente do Verdadeiro. O valor da função "$-\!\!\top\!\!-\,\xi$", por outro lado, é o Verdadeiro quando o valor da função "$-\!\!-\xi$" for o Falso, e é o Falso quando o valor da função "$-\!\!-\xi$" for o Verdadeiro. Também podemos compreender a função "$-\!\!\top\!\!-\,\xi$" como a função "$-\!\!\top\!\!-\,(-\!\!-\xi)$", de maneira que o seu valor sempre dependerá do valor da função "$-\!\!-\xi$" para o argumento inserido em "ξ". O valor da função "$\begin{array}{l}-\!\!\top\!\!-\,\zeta\\ \;\lfloor\!-\,\xi\end{array}$" é o Falso somente quando o valor de "$-\!\!-\xi$" for o Verdadeiro e o valor de "$-\!\!-\zeta$" for o Falso, e é o Verdadeiro em todos os outros casos, de maneira que o valor de "$\begin{array}{l}-\!\!\top\!\!-\,\zeta\\ \;\lfloor\!-\,\xi\end{array}$" dependerá, igualmente, do valor do horizontal para os argumentos inseridos em "ξ" e "ζ". Em segundo lugar, Frege reduz as condições de verdade do horizontal às condições de verdade da identidade. Ele considera a função de identidade "$\xi = (\xi = \xi)$", cujo valor é o Verdadeiro somente quando o argumento "ξ" for o Verdadeiro, e cujo valor é o Falso para qualquer outro argumento. Ou seja, as condições de verdade das funções "$-\!\!-\xi$" e "$\xi = (\xi = \xi)$" são as mesmas e, consequentemente, as condições de verdade da negação e do condicional também são reduzidas às condições de verdade da identidade. Também podemos compreender essa redução do seguinte modo: para sabermos o valor da função "$-\!\!-\xi$" para o objeto inserido em "ξ", precisamos saber, primeiramente, se esse objeto é ou não é *idêntico* ao Verdadeiro, ou seja, precisamos saber o valor da *função de identidade* para o objeto em questão e o Verdadeiro.

[56] Pois qualquer outra identidade possível no sistema é uma identidade entre percursos de valor, que tem o seu sentido estabelecido pelo axioma V.

função de identidade tem o Verdadeiro como valor para os argumentos Verdadeiro e $\dot{\varepsilon}$—(ε), ou seja, que o enunciado de identidade "Verdadeiro = $\dot{\varepsilon}$—(ε)" é verdadeiro; em segundo lugar, que a função de identidade também tem o Verdadeiro como valor para os argumentos Falso e $\dot{\varepsilon}(\varepsilon = (\neg\forall\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a})))$, ou seja, que o enunciado de identidade "Falso = $\dot{\varepsilon}(\varepsilon = (\neg\forall\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a})))$" também é verdadeiro. Portanto, a solução acima prevê que se, ao introduzirmos uma nova função no sistema, tal introdução for sempre acompanhada por uma estipulação adicional do valor dessa função para percursos de valor como argumento, a indeterminação causada pelo problema de Júlio César jamais ocorrerá novamente.

Como vimos acima, para acabar com a indeterminação dos percursos de valor causada pelo problema de Júlio César que afetou o axioma V, Frege identificou o Verdadeiro e o Falso com os seus respectivos conjuntos unitários. Na solução desse problema, Frege se sentiu livre para ignorar qualquer outro objeto que pudéssemos identificar com percursos de valor e focou somente nos valores de verdade, realizando estipulações adicionais que identificaram esses com percursos de valor específicos. Para justificar essa atenção especial aos valores de verdade, isto é, para explicar a sua preocupação apenas com a questão de se os valores de verdade são percursos de valor, Frege disse o seguinte: "Uma vez que até aqui nós introduzimos apenas os valores de verdade e os percursos de valor como objetos, só poderíamos colocar a questão de se um dos valores de verdade poderia ser um percurso de valor." (FREGE, 2013, §10, Vol.1)[57]. De acordo com tal passagem, a justificativa de Frege foi que apenas os valores de verdade e os percursos de valor tinham sido introduzidos até então como objetos. A questão que devemos nos perguntar agora, portanto, é o que Frege quis expressar com tal justificativa.

De acordo com Kimberly Heck (2012, p. 94), o que Frege quis dizer com "Uma vez que até aqui nós introduzimos apenas os valores de verdade e os percursos de valor como objetos" é que o escopo dos quantificadores de sua linguagem formal contém somente os objetos introduzidos no sistema de *LB*, a saber, até §10, os percursos de valor e os valores de verdade. Se o que Heck está dizendo é o que Frege realmente quis expressar com tal passagem, então temos em *LB* uma concepção dos quantificadores similar àquela que Frege tinha em *FA*, pois, como vimos ao abordarmos a impredicatividade da definição de número natural, o escopo dos quantificadores de Frege continha, em *FA*, somente as entidades introduzidas da ordem correspondente ao quantificador. A abordagem de Heck apresentada equivale a dizer, portanto, que Frege, em *LB*, limitou o escopo de seus quantificadores de *primeira ordem* apenas aos *objetos* introduzidos, que ele *restringiu o* domínio de sua linguagem formal apenas às entidades introduzidas.[58]

[57] "Since so far we have only introduced the truth-values and value-ranges as objects, the question can only be whether one of the truth-values might be a value-range."

[58] Kimberly Heck (2012, p. 96) fala em "limitação" dos escopos dos quantificadores, em "restrição" do domínio da linguagem formal, porque ele *parece* sustentar que, no sistema lógico de *FA*, o escopo dos

Por isso que Frege, deste modo, não teria se preocupado em realizar estipulações adicionais que identificassem outros objetos, além dos valores de verdade, com percursos de valor específicos, uma vez que tais objetos não se encontravam dentro do domínio da Conceitografia. Sendo assim, se tornou irrelevante para Frege a questão de se o objeto Júlio César satisfaz ou não a expressão "$x = \grave{\varepsilon}G(\varepsilon)$", pois "$x$" só percorreria os objetos do domínio, a saber, os percursos de valor e os valores de verdade.

A interpretação de Kimberly Heck (2012, p. 115) do problema de Júlio César que atinge o axioma V é paralela a sua interpretação do problema de Júlio César que afetou o princípio de Hume em *FA*, só que com uma diferença, a saber, que Kimberly Heck (2012, p. 94) está assumindo que Frege trabalhou, em *LB*, com um domínio restrito de quantificação. No capítulo anterior, vimos que Frege se deparou com o problema de Júlio César em *FA* ao tentar responder a questão de como os números são dados para nós. De acordo com Kimberly Heck (2012, p. 115), Frege entendia essa questão como a questão semântica: como podemos estabelecer o *significado*, ou *sentido*, de expressões que, supostamente, se referem aos números como objetos? Frege respondeu tal questão em *FA* contextualmente, postulando o princípio de Hume, ou seja, considerando uma identidade entre números cardinais como expressando o mesmo conteúdo que a relação de equinumerosidade entre os respectivos conceitos aos quais esses números correspondem. Ao se deparar com o problema de Júlio César, Frege mudou a sua resposta, e disse que os números são dados para nós como extensões de conceitos, como percursos de valor de funções específicas. Uma vez que a questão que Frege estava tentando responder era uma questão semântica, Heck sustenta que o problema de Júlio César em *FA* é um problema semântico.

No entanto, a questão acima, respondida por Frege em *FA*, reaparece em *LB* com uma outra forma. Dado que os números cardinais foram definidos por Frege como percursos de valor de conceitos, a questão em *LB* é: como os percursos de valor são dados para nós? Segundo Kimberly Heck (2012, p. 115), Frege entendia tal questão, assim como em *FA*, como uma questão semântica, ou seja, a questão na verdade é: como podemos estabelecer o *significado* de expressões que, supostamente, se referem a percursos de valor como objetos? ou, em outras palavras: como podemos determinar a *referência* de nomes de percursos de valor, de nomes da forma "$\grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$"? Em *LB*, a resposta de Frege a essa questão é o axioma V, ou seja, é considerar uma equação entre percursos de valor "$\grave{\varepsilon}F(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}G(\varepsilon)$" como sendo correferencial ao enunciado "$-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\, F(\mathfrak{a}) = G(\mathfrak{a})$", que expressa a generalidade de uma equação. A análise de Heck do problema de Júlio

quantificadores de Frege contém *todas* as entidades *existentes* da ordem correspondente ao quantificador, e não somente as entidades *introduzidas* como eu defendo. Deste modo, ao falar em "limitação" e "restrição", Heck está indicando que há uma mudança no sistema lógico de *LB* em relação àquele de *FA* no que diz respeito ao escopo dos quantificadores e ao domínio de entidades. Para Heck, em *LB*, os quantificadores de Frege passam a percorrer *somente* as entidades *introduzidas* no sistema, e não mais todas as entidades existentes; ou seja, o domínio da Conceitografia passa a conter somente as entidades introduzidas, uma posição que eu defendo quanto ao sistema de *FA*.

César que afeta o axioma V, diferentemente de sua análise do problema correspondente que atingiu o princípio de Hume, leva em consideração tanto o caráter da pergunta que levou ao problema como o caráter da solução que foi oferecida, isto é, das estipulações adicionais que foram postuladas para resolvê-lo. Tais estipulações adicionais, de acordo com Kimberly Heck (2012, p. 117), são estipulações semânticas, pois elas só teriam sido feitas para garantir que a todos os enunciados de identidade possíveis na linguagem fosse fornecido um *significado*, e que, deste modo, todos os nomes de percursos de valor possuíssem uma *referência*. Uma vez que a questão que levou Frege ao problema de Júlio César em *LB* é uma questão semântica e que, além disso, as estipulações adicionais feitas para resolvê-lo também têm um caráter semântico, Kimberly Heck (2012, p. 115) sustenta que o problema de Júlio César em *LB* é, assim como em *FA*, um problema semântico.

Eu não concordo com a interpretação de Heck da passagem "Uma vez que até aqui nós introduzimos apenas os valores de verdade e os percursos de valor como objetos", e tampouco com a sua intepretação do problema de Júlio César em *LB*. Frege, ao longo de sua obra, diversas vezes argumenta contra a possibilidade de se trabalhar com uma restrição no domínio de objetos.[59] Eu entendo que, ao Frege restringir a sua atenção aos valores de verdade no que diz respeito às estipulações adicionais, ele não está se referindo aos valores de verdade e percursos de valor como objetos, mas sim a quais tipos de nomes foram introduzidos até então. Para compreendermos a minha interpretação da passagem em questão, levemos em conta que, até §10, os únicos tipos de nomes que estão disponíveis na linguagem lógica de *LB* são os nomes de percursos de valor e os nomes de valores de verdade. Os nomes de percursos de valor têm a forma "$\grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$", e foram introduzidos pelo axioma V; já os nomes de valores de verdade são todas as sentenças de *LB*.[60] Uma vez que esses são os únicos nomes de objetos à disposição de Frege, só existem, até §10, três tipos de enunciados de identidade possíveis na Conceitografia:

1. Enunciados de identidade em que em ambos os lados do sinal de identidade temos nomes de percursos de valor;

2. Enunciados de identidade em que em ambos os lados do sinal de identidade temos nomes de valores de verdade;

3. Enunciados de identidade em que, de um lado, temos um nome de percurso de

[59] Ver, por exemplo, (FREGE, 1997, p.141) e (FREGE, 2013, §65, Vol.2).

[60] Aqui, deve ser levada em consideração a distinção entre o sentido e a referência de uma expressão que Frege faz em seu artigo *Sobre o Sentido e a Referência*. Nesse artigo, Frege diz que o objeto ao qual as sentenças verdadeiras se referem é o valor de verdade Verdadeiro. Por outro lado, o objeto ao qual as sentenças falsas se referem é o valor de verdade Falso. Se "*S*" é uma sentença verdadeira de *LB*, "*S*" designará, portanto, o Verdadeiro, e a sua respectiva negação designará, consequentemente, o Falso.

valor, e em que, do outro lado do sinal de identidade, temos um nome de valor de verdade.

Consequentemente, um enunciado de identidade como "$\grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$ = Júlio César" não é bem-formado na linguagem lógica de Frege, uma vez que "Júlio César" não é nem um nome da forma "$\grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$", nem alguma sentença verdadeira ou falsa de *LB*. Frege, portanto, não precisa se preocupar com a questão de se o axioma V estabelece ou não as condições de verdade de um tal enunciado, pois, e essa é a minha interpretação da passagem acima, os únicos nomes que devem ser levados em consideração são os nomes de percursos de valor e os nomes de valores de verdade. Em outras palavras, para Frege, as únicas questões relevantes são aquelas que podem ser formuladas dentro de sua linguagem artificial, ou seja, dentro de seu formalismo e, por esse motivo, eu vejo o problema de Júlio César em *LB* como um problema *formal*.

Vimos no capítulo anterior que Frege lidou com o problema de Júlio César em *FA* definindo os números cardinais como percursos de valor de conceitos. Tal estratégia para superar o problema pressupõe que não é preciso nenhuma explicação adicional sobre o que são percursos de valor, que os nomes de percursos de valor, os nomes da forma "$\grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$", não requerem nenhum tipo de definição ou estipulação que fixe as suas referências, pois elas já estariam dadas pra nós como objetos. Em síntese, em *FA*, Frege trata a noção de percurso de valor como uma noção primitiva de seu sistema.

Em *As Leis Básicas da Aritmética*, as coisas são um pouco diferentes. Frege ainda trata a noção de percurso de valor como uma noção primitiva, mas com uma diferença: os enunciados de identidade da forma "A extensão de $E = x$", isto é, "$\grave{\varepsilon}E(\varepsilon) = x$", em que "$x$" não é um nome da forma "$\grave{\varepsilon}E(\varepsilon)$", se tornam, diferentemente do que ocorre em *FA*, problemáticos para Frege. Segundo Greimann, "A estratégia de Frege [em *FA*] para superar o problema de Júlio César definindo os números em termos de percursos de valor pressupõe que as regras semânticas de seu sistema determinam a referência dos nomes de percursos de valor completamente." (GREIMANN, 2003, p. 271)[61]. Quanto a essas regras semânticas que governam os nomes de percursos de valor, a única à disposição em *FA* é o princípio de Hume, dado que a expressão "o número de *F*s", que significa um objeto cujo critério de identidade é o princípio de Hume, foi definida explicitamente como "o percurso de valor do conceito *ser equinumérico a 'F'*". No entanto, uma vez que o princípio de Hume fornece um critério de identidade para o objeto significado por "o número de *F*s" em termos da relação de equinumerosidade entre conceitos, ele só governa os nomes de percursos de valor em que o "*E*" de "$\grave{\varepsilon}E(\varepsilon)$" for um predicado de segunda ordem da forma "*ser equinumérico a 'F'*". Ou seja,

[61] "Frege's strategy to overcome the Caesar problem by defining numbers in terms of value-courses presupposes that the semantic rules of his system determine the reference of the value-course terms completely."

o princípio de Hume não constitui uma regra semântica geral que governa todos os nomes de percursos de valor.

Tal regra semântica encontramos somente em *LB*, nomeadamente, o axioma V:

$$\vdash (\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})),$$

que diz que dois termos singulares "$\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$" e "$\grave{\alpha}g(\alpha)$)" têm a mesma *referência* se e somente se o enunciado "$\forall x(f(x) = g(x))$" for verdadeiro. O axioma V é uma regra semântica geral que governa todos os nomes de percursos de valor. Até §10 de *LB*, ele é a única regra semântica fornecida por Frege que cumpre tal função. Mesmo constituindo uma regra semântica geral para nomes da forma "$\grave{\varepsilon}E(\varepsilon)$", o axioma V não é suficiente para fixar a referência dessas expressões, dado os casos problemáticos em que o "x" de "$\grave{\varepsilon}E(\varepsilon) = x$" não é um nome da forma "$\grave{\varepsilon}E(\varepsilon)$".

A ideia de que Frege, ainda que tratando a noção de percurso de valor como primitiva, entende esses casos como problemáticos é reforçada pela sua crença de que são necessárias, além do axioma V, regras semânticas adicionais para estabelecer as referências de nomes de percursos de valor. Tais regras semânticas são aquelas que nos dizem se os valores de verdade são ou não são percursos de valor e, caso sejam, quais percursos de valor eles seriam. A primeira regra adicional estabeleceu qual é a referência do nome de percurso de valor "$\grave{\varepsilon}—(\varepsilon)$", a saber, o Verdadeiro. A segunda regra adicional estabeleceu qual é a referência do nome de percurso de valor "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon = (\neg\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a})))$", a saber, o Falso. De acordo com Greimann (2003, p. 272), essas regras semânticas adicionais são elaboradas por Frege para complementar o axioma V, no seu papel de fixar as referências de nomes da forma "$\grave{\varepsilon}E(\varepsilon)$", de modo que o problema de Júlio César em *LB* deveria ser visto como o problema de que a regra *semântica* expressa pelo axioma V não é suficiente para estabelecer as *referências* de nomes da forma "$\grave{\varepsilon}E(\varepsilon)$". Greimann diz: "Esse problema [...] consiste na indeterminação referencial dos nomes de percursos de valor: o problema é que a regra semântica [axioma V] não determina sobre o que nós estamos falando quando estamos falando sobre percursos de valor." (GREIMANN, 2003, p. 272)[62]. Ainda que Greimann represente o problema de Júlio César em *LB* de diferentes maneiras, todas elas têm algo em comum, a saber, que o problema é representado, assim como em Heck, como um problema *semântico*.

Contudo, a abordagem de Greimann é diferente da de Heck quando a questão é o porquê que Frege acha que o axioma V, sozinho, é incapaz de estabelecer a referência de nomes de percursos de valor. A sua abordagem está baseada nos critérios fornecidos por Frege em *LB* que determinam quando uma expressão, seja ela o nome

[62] "This problem [...] consists in the referential indeterminacy of the value-course terms: the problem is that the semantic rul[e] do[es] not fix what we are talking about when we are talking about value-courses."

de uma função ou um termo singular, tem uma referência. Dentre esses critérios, os mais relevantes para a discussão são:

> [1] Uma expressão funcional de primeira ordem com um argumento tem uma *referência* (*se refere a* algo, é *referencial*) se o nome próprio que resulta desta expressão funcional quando os espaços de argumento são preenchidos por um nome próprio sempre tem uma referência, contanto que o nome inserido se refira a algo.[63]
>
> [2] Um nome próprio [termo singular] tem uma *referência* se, sempre que ele preencher os espaços de argumento de uma expressão funcional referencial de primeira ordem com um argumento, o nome próprio resultante tiver uma referência [...].[64] (FREGE, 2013, §29, Vol.1)

Greimann reformula esses critérios da seguinte maneira:

> [...] De acordo com [1], por exemplo, o predicado "$\varphi(\xi)$" tem um *Bedeutung* próprio somente se a sua interpretação semântica fixar o valor de verdade de "$\varphi(a)$" para todo termo singular "a" que tenha um *Bedeutung* próprio, e de acordo com [2] um termo singular "a" tem um *Bedeutung* próprio somente se a sua interpretação semântica fixar o valor de verdade de "$\varphi(a)$" para todo predicado "$\varphi(\xi)$" que tenha um *Bedeutung* próprio. (GREIMANN, 2003, p. 274)[65]

"*Bedeutung*" é o termo alemão utilizado por Frege para se referir à entidade que uma expressão representa, e que foi traduzido para o português como "*referência*" na citação anterior. Para Greimann (2003, p. 275), esses critérios têm simplesmente o papel de reforçar o princípio da determinação completa, que em *FA* foi formulado do seguinte modo: toda função *F* deve ter os limites de sua aplicação nitidamente marcados; o que significa que, para todo objeto *a*, o valor de *F(a)* tem de estar estabelecido. Se *F* for um conceito, esse valor é um valor de verdade; isto é, tem de estar estabelecido, para todo *a*, se *a* cai ou não cai sob *F*. Em outras palavras, tais critérios são, para Greimann (2003, p. 273), uma reformulação em *LB* do princípio da determinação completa, que,

[63] "A name of a first-level function with one argument has a *reference* (*refers to* something, is *referential*) if the proper name which results from this function-name when the argument places are filled by a proper name always has a reference provided the inserted name refers to something."

[64] "A proper name has a *reference* if, whenever it fills the argument places of a referential name of a first-level function with one argument, the resulting proper name has a reference [...]."

[65] "[...] According to [1], for instance, the predicate '$\varphi(\xi)$' has a proper *Bedeutung* only if its semantic interpretation fixes the truth-value of '$\varphi(a)$' for any singular term 'a' that has a proper *Bedeutung*, and according to [2] a singular term 'a' has a proper *Bedeutung* only if its semantic interpretation fixes the truth-value of '$\varphi(a)$' for any predicate '$\varphi(\xi)$' having a proper *Bedeutung*."

dada a noção de *Bedeutung*, pode ser expresso assim: uma expressão, seja ela o nome de uma função (incluindo nomes de conceitos) ou um termo singular, só é legítima na Conceitografia se o seu respectivo *Bedeutung* estiver totalmente estabelecido.

De acordo com o segundo critério acima, só podemos considerar o *Bedeutung* de um termo singular "*a*" como estabelecido se, para toda função *F*, "*F(a)*" tem *Bedeutung*. No caso em questão, estamos falando de nomes de percursos de valor, isto é, de termos singulares da forma "$\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)$", de modo que tais nomes só têm *Bedeutung* se, para toda função φ, "$\varphi(\dot{\varepsilon}F(\varepsilon))$" tem *Bedeutung*. No entanto, a partir do axioma V, não conseguimos estabelecer o *Bedeutung* de "$\varphi(\dot{\varepsilon}F(\varepsilon))$" para toda função φ. Em particular, se φ for a função *idêntico ao Verdadeiro*, o axioma V não é, na ausência de estipulações adicionais, capaz de fixar o *Bedeutung* de "$\varphi(\dot{\varepsilon}F(\varepsilon))$" e, por conseguinte, ele também não é capaz de fornecer um *Bedeutung* para termos singulares da forma "$\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)$". É por esse motivo que, para Greimann, o axioma V não consegue, sozinho, estabelecer a referência de nomes de percursos de valor.

Apesar de ambos sustentarem que o problema de Júlio César é semântico, a abordagem de Greimann difere da abordagem de Heck, e se aproxima da minha, quando ele diz:

> É importante notar que os "critérios de referencialidade" de Frege ([1] e [2]) não dizem que o uso de um predicado "$\varphi(\xi)$" na ciência só é legítimo quando foi determinado para todo *objeto* x quais são as condições para o predicado ser verdadeiro de x. De acordo com [2], é suficiente determinar para todo *termo singular* "a" quais deveriam ser as condições de verdade de "$\varphi(a)$". (GREIMANN, 2003, p. 274)[66]

Nessa passagem, Greimann interpreta o princípio da determinação completa em *LB* como dizendo respeito não aos *objetos* que compõem o domínio, mas sim aos *termos singulares* que compõem o vocabulário. Suponhamos que "$\varphi(\xi)$" é o predicado "$\xi = \dot{\varepsilon}F(\varepsilon)$" ("*ser idêntico ao* $\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)$"). O que Greimann está dizendo é que os critérios [1] e [2], que são uma reformulação do princípio da determinação completa, exigem não que esse predicado seja definido para todos os *objetos* do domínio, mas sim que ele seja definido para todos os *termos singulares* à disposição. Greimann diz que Frege "delimita a extensão de '$\varphi(\xi)$' somente quanto àqueles objetos que estão (semanticamente) 'dados para nós' [...]." (GREIMANN, 2003, p. 274)[67]; ou seja, que, para Frege, um predicado

[66] "It is important to note that Frege's 'criteria of referentiality' do not say that in science the use of a predicate '$\varphi(\xi)$' is legitimate only when it has been determined for any *object* x what the conditions are for the predicate to be true of x. According to [2], it suffices to determine for any *singular term* 'a' what the truth-conditions of '$\varphi(a)$' are supposed to be."

[67] "delimit[s] the extension of '$\varphi(\xi)$' only with respect to those objects which are (semantically) 'given to us' [...]."

"$\varphi(\xi)$" precisa ser definido somente para os objetos para os quais termos singulares foram introduzidos. Nessa interpretação, um objeto que não está "dado para nós", para o qual não há à diposição no vocabulário um expediente linguístico por meio do qual possamos nos referir a ele, é irrelevante para determinarmos completamente um predicado "$\varphi(\xi)$". Uma vez que Greimann interpreta o princípio da determinação completa dessa maneira, parece que ele entende por "Uma vez que até aqui nós introduzimos apenas os valores de verdade e os percursos de valor como objetos" (FREGE, 2013, §10, Vol.1) o mesmo que eu, a saber, que Frege está dizendo que ele restringe a sua atenção aos valores de verdade porque somente os valores de verdade, além dos percursos de valor, possuem expedientes linguísticos por meio dos quais podemos nos referir a eles.[68]

Como eu disse anteriormente, com a minha intepretação, eu não estou negando que o problema de Júlio César coloque um problema semântico para Frege. A questão "qual é o *significado* do enunciado de identidade '$\grave{\varepsilon}F(\varepsilon) =$ Verdadeiro'?" é uma que carece de resposta a partir do axioma V. Além disso, se assumirmos, como Greimann, que o princípio da determinação completa é uma lei *lógica*, então a questão "a validade das leis lógicas da Conceitografia é preservada pelo axioma V?" é relevante, de modo que o problema de Júlio César também colocaria um problema lógico para Frege. O que eu nego, no entanto, é que alguma das questões acima é a que mais preocupa Frege na sua tentativa de solucionar o problema de Júlio César por meio das estipulações adicionais. A meu ver, antes mesmo de se colocar essas questões, Frege se deparou com uma questão como a seguinte: o enunciado de identidade "$\grave{\varepsilon}F(\varepsilon) = (\text{—}\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\text{—}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a})$" é bem-formado na Conceitografia? Frege chega a conclusão de que enunciados como esse, compostos por um nome de percurso de valor e um nome de valor de verdade, são bem-formados e, só a partir de então, ele se coloca outras questões a respeito de tais enunciados. Uma vez que a questão sobre o caráter bem-formado desses enunciados é anterior e, por isso, mais importante do que a questão sobre o significado deles, eu entendo que foi ela que levou Frege ao problema de Júlio César e, assim sendo, eu interpreto tal problema como um problema quanto à linguagem de *LB* e as fórmulas que podem ser construídas a partir dela; ou seja, como um problema formal.

[68] A interpretação de Greimann da passagem em questão, que eu compartilho, parece implicar o seguinte: o domínio de objetos do sistema lógico de Frege, da Conceitografia, só contém aqueles objetos para os quais nomes, expedientes linguísticos, foram introduzidos. Essa é uma posição que eu defendo não só quanto ao sistema lógico de LB, mas também quanto ao sistema lógico de FA. No caso particular de LB, isso quer dizer que, até §10, os únicos objetos que compõem o domínio são os percursos de valor e os valores de verdade, pois somente para tais objetos, até então, há à disposição no vocabulário da linguagem items linguísticos por meio dos quais podemos nos referir à eles.

3.3 Interpretações alternativas do problema de Júlio César

Até o momento, apenas três maneiras de abordarmos o problema de Júlio César foram apresentadas: uma abordagem lógica, uma abordagem semântica e uma formal. Frege, contudo, dá margem para interpretarmos o problema em questão de, pelo menos, mais duas maneiras, a saber, uma interpretação metafísica e uma outra epistemológica. Como vimos, a terceira definição dos números cardinais, a definição explícita, surgiu para solucionar o problema de Júlio César que afetou a segunda definição dos cardinais, a definição contextual. Nessa solução, Frege nos disse o que os números cardinais são na verdade, a saber, percursos de valor; ou seja, ao identificar os números cardinais com percursos de valor, ele nos disse que tipo de objetos os números são. Esse tipo de identificação, que chamarei de identificação *transsortal*[69], não é feita, no entanto, pelo princípio de Hume, pela definição contextual dos cardinais. Apesar do princípio de Hume constituir um critério de identidade para os números cardinais, ele não nos diz o que tais números no fundo são, a que classe de objetos eles pertencem. Deste modo, poderíamos ver o problema de Júlio César em *FA* como o incômodo de Frege de que o princípio de Hume não nos diz o que são os números cardinais. Abordado dessa maneira, como um problema metafísico, o problema de Júlio César pode ser formulado do seguinte modo: o princípio de Hume não determina que tipo de objetos os números cardinais são. Ele não nos diz se os números são percursos de valor ou, por exemplo, humanos, ou qualquer outro tipo de objetos que possamos pensar. Analogamente, o problema de Júlio César em *LB*, apresentado como um problema metafísico, é: o axioma V não determina o que são os percursos de valor; em outras palavras, o problema é que o axioma V não é capaz de responder à pergunta: que tipo de objetos os percursos de valor são?

No entanto, há pelo menos duas razões para sustentarmos que Frege não entendia o problema de Júlio César como um problema metafísico. A primeira razão está baseada numa passagem a qual me referi indiretamente no capítulo 2, mas que agora cito palavra por palavra:

> O Número que pertence ao conceito F é a extensão do conceito "conceito equinumérico ao conceito F", onde um conceito F é dito equinumérico a um conceito G se existir a possibilidade de correspondência um a um mencionada acima.

[69] Greimann (2003, nota de rodapé 41, p. 275) chama de identificação *transsortal* a identificação de um tipo de objeto com uma subclasse de um tipo diferente de objeto. No caso em questão, a identificação é dos números cardinais com percursos de valor especifícos, com as extensões de certos conceitos. De acordo com a definição explícita, o conceito de número cardinal caracteriza um tipo de objeto, os números cardinais, e todos eles seriam percursos de valor. Vale ressaltar, contudo, que nem todos os percursos de valor são números cardinais, e por isso a identificação é com uma subclasse de um tipo diferente de objeto.

> Eu suponho que, nesta definição, o sentido da expressão "extensão de um conceito" é conhecido. Eu não espero que esta maneira de acabar com a dificuldade [o problema de Júlio César] encontre aprovação universal, e muitos irão preferir outros métodos de remover a dúvida em questão. Eu não atribuo importância decisiva nem mesmo à introdução das extensões de conceitos. (FREGE, 1960, §107)[70]

Nessa passagem, Frege sugere que existem outras maneiras de lidar com o problema de Júlio César em *FA* que não envolvem recorrer a percursos de valor. Essa sugestão está diretamente relacionada com o que Frege diz logo em seguida, a saber, que ele não atribui "importância decisiva" à introdução de percursos de valor no sistema. O que Frege parece querer dizer com isso é que a maneira que ele escolheu para resolver o problema, a definição dos números cardinais em termos de percursos de valor, não é a única à disposição, e que, portanto, a introdução de percursos de valor não é "essencial" para a solução do problema, que o papel que eles cumprem não tem uma "importância decisiva". Se, quando Frege disse isso, ele tinha em mente alguma outra maneira de resolver o problema, infelizmente ele não nos contou que maneira seria essa. Por outro lado, o que ele diz nessa passagem constitui evidência suficiente para sustentarmos que ele não entendia o problema de Júlio César como um problema metafísico, pelo seguinte motivo: a profundidade de um problema metafísico, de uma questão metafísica, não admite uma multiplicidade de soluções ou respostas satisfatórias. Ao entendermos o problema de Júlio César como um problema metafísico, ou seja, ao nos colocarmos a pergunta "que tipo de objetos os números cardinais são?", nós não esperamos que mais de uma solução esteja correta, que mais de uma resposta seja aceitável. Se os números cardinais são percursos de valor, eles simplesmente são, isto é, eles não poderiam ser qualquer outro tipo de objeto. Contudo, é justamente isso que Frege está sugerindo: ao aludir a outras maneiras de resolver o problema, ele está dizendo que os números cardinais podem ser definidos de outra forma. Sendo assim, fica claro que, para Frege, a questão colocada pelo problema de Júlio César não é uma questão metafísica.

A outra razão para sustentarmos que Frege não entendia o problema de Júlio César como um problema metafísico está baseada no tipo de solução que, em *LB*, foi oferecida ao problema. Como vimos acima, o problema de Júlio César em *LB*, caracterizado como um problema metafísico, pode ser formulado como se segue: o axioma V não determina o que são os percursos de valor. Em outras palavras, o

[70] "The Number which belongs to the concept F is the extension of the concept 'concept equal to the concept F', where a concept F is called equal to a concept G if there exists the possibility of one-one correlation referred to above.
In this definition the sense of the expression 'extension of a concept' is assumed to be known. This way of getting over the difficulty cannot be expected to meet with universal approval, and many will prefer other methods of removing the doubt in question. I attach no decisive importance even to bringing in the extensions of concepts at all."

problema em questão é um que dá origem a seguinte pergunta: que tipo de objetos os percursos de valor são? Ora, se Frege realmente enxergasse tal problema como um problema metafísico, se ele realmente estivesse considerando tal pergunta, nós esperaríamos que, na busca por uma solução, ele investigasse a natureza dos percursos de valor; que ele, na tentativa de determinar que tipo de objetos são os percursos de valor, analisasse o que os percursos de valor essencialmente são. Contudo, para resolver o problema em *LB*, Frege simplesmente oferece estipulações complementares ao axioma V elaboradas com o único intuito de possibilitar que esse axioma estabeleça as condições de verdade de identidades como "$\grave{\varepsilon}F(\varepsilon) = (\underset{\smile}{\overset{\mathfrak{a}}{—}}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a})$", em que, de um lado, temos o nome de um percurso de valor, e em que, do outro lado, temos o nome de um valor de verdade. Deste modo, essas estipulações adicionais, longe de constituirem uma resposta profundamente elaborada, possuem um caráter emergencial numa tentativa de auxiliar o axioma V nos casos excepcionais que ele não dá conta sozinho. No caráter de meras estipulações, elas certamente não foram elaboradas para resolver um problema visto como metafísico e, assim sendo, podemos dizer que Frege não entendia o problema de Júlio César em *LB* como um problema metafísico.

Além de uma abordagem metafísica, também podemos enxergar certa plausibilidade numa abordagem epistemológica do problema de Júlio César. Como vimos, Frege rejeita tanto a ideia de que os números são objetos espaço-temporais como a ideia de que eles são propriedades desses objetos, o que significa que, para Frege, os números não estão dados para a nossa sensibilidade. Ele, no entanto, sustenta que os números estão dados de uma outra forma para nós: como objetos que podemos acessar por meio da razão. Essa visão racionalista de que os números são objetos da razão, ou objetos lógicos, compromete Frege com a tarefa de explicar como esse acesso aos números por meio de nossa razão se dá; ou seja, ao adotar essa postura racionalista, Frege se vê obrigado a responder a questão: como temos acesso epistemológico aos números? Vimos no capítulo 2 que Frege respondeu a essa questão recorrendo a equações, isto é, a identidades em que números ocorrem. Uma vez que enunciados de identidade são enunciados de *reconhecimento*, isto é, enunciados em que reconhecemos novamente um objeto como sendo ele mesmo (só que, em muitos casos, como dado de uma outra forma), parece que, para Frege, a questão acima e a questão "como reconhecemos novamente que um número é ele mesmo?" são uma e a mesma questão. Tratar essas duas questões como sendo a mesma questão parece indicar que, para Frege, o acesso epistemológico a objetos abstratos como os números só é possível recorrendo-se a um critério de identidade para eles, uma vez que tais objetos não são acessíveis por meio de nossos sentidos. Sendo assim, podemos formular o problema de Júlio César de um ponto de vista epistemológico de duas maneiras distintas:

1. O princípio de Hume não constitui um intermediário para acessarmos epistemo-

logicamente os números cardinais

2. O princípio de Hume não nos fornece um método para reconhecermos um número cardinal de novo como sendo o mesmo.

No entanto, a maneira como Frege responde as duas questões anteriores sugere que ele não entendia o problema de Júlio César como um problema primordialmente epistemológico. A sua resposta indica que essas duas questões expressam uma preocupação que é anterior a qualquer preocupação epistemológica; tais questões contêm, no fundo, um caráter semântico. A resposta de Frege é:

> Como, então, os números serão *dados para nós*, se nós não podemos ter quaisquer ideias ou intuições deles? Uma vez que é somente *no contexto de uma proposição* que as palavras têm algum *significado*, o nosso problema se torna o seguinte: Definir o *sentido* de uma proposição na qual um *nome de número* ocorre. Isso, obviamente, nos deixa ainda com muitas opções. Mas nós já estabelecemos que os nomes de números devem ser compreendidos como representando objetos auto-subsistentes. E isso é suficiente para nos fornecer uma classe de proposições que devem ter um sentido, nomeadamente, aquelas que expressam *o nosso reconhecimento de um número de novo como sendo o mesmo*. (FREGE, 1960, §62, grifo meu)[71]

Eu destaco duas coisas nessa passagem: em primeiro lugar, que Frege transforma uma questão sobre certos objetos, os números cardinais, numa questão sobre *os nomes* desses objetos, *os nomes de números*; em segundo lugar, que, para responder essa questão, Frege faz uso de um princípio *semântico*, o princípio do contexto, segundo o qual palavras em geral e, em especial, nomes próprios não têm *significado* algum quando tomados isoladamente, fora do contexto de um enunciado. Para Frege, o significado de qualquer palavra é a sua contribuição, ou o seu papel, na determinação do significado dos enunciados em que tal palavra ocorre e, sendo assim, as palavras só têm significado quando consideradas dentro de um enunciado. Quanto ao primeiro destaque, os nomes de números que Frege tem em mente são, como vimos no capítulo anterior, os nomes da forma "o número de Fs", que simbolizam a maneira como os números cardinais estão dados para nós, como números de um conceito. Quanto ao segundo destaque, os

[71] "How, then, are numbers to be given to us, if we cannot have any ideas or intuitions of them? Since it is only in the context of a proposition that words have any meaning, our problem becomes this: To define the sense of a proposition in which a number word occurs. That, obviously, leaves us still a very wide choice. But we have already settled that number words are to be understood as standing for self-subsistent objects. And that is enough to give us a class of propositions which must have a sense, namely those which express our recognition of a number as the same again."

enunciados que Frege considera são enunciados de reconhecimento, isto é, enunciados de identidade, em especial, os enunciados que envolvem nomes da forma acima. Deste modo, Frege transforma as duas questões do parágrafo anterior, respectivamente, nas seguintes questões:

- Qual é o *significado* dos nomes de números, dos nomes da forma "o número de Fs"?
- Qual é o *significado* dos enunciados de reconhecimento que envolvem nomes de números, dos enunciados de identidade da forma "o número de Fs = x"?

que, igualmente, são uma e a mesma questão. Ao fazer essa transformação, Frege parece entender as questões epistemológicas do parágrafo anterior como as questões semânticas acima. Uma vez que o problema de Júlio César, considerado como um problema epistemológico, é justamente que o princípio de Hume não consegue responder as questões epistemológicas apresentadas, o problema de Júlio César, de um ponto de vista semântico, será justamente que o princípio de Hume não consegue responder as questões semânticas acima. Essa versão semântica do problema de Júlio César também pode ser formulada de duas maneiras diferentes, como se segue:

1. O princípio de Hume não é capaz de estabelecer o *significado* dos nomes da forma "o número de Fs"
2. O princípio de Hume não é capaz de estabelecer o *significado* dos enunciados de identidade da forma "o número de Fs = x".

Dado que (1) Frege interpreta semanticamente as questões epistemológicas mencionadas e que (2) o problema de Júlio César é que o princípio de Hume não é capaz de respondê-las, podemos concluir que, antes de entender o problema de Júlio César como um problema epistemológico, Frege o compreende como formulado acima, isto é, como um problema semântico. Em outras palavras, Frege parece sustentar que só podemos acessar epistemologicamente os números cardinais, e reconhecê-los novamente como os mesmos, se apreendermos, primeiro, o *significado* de *todos* os enunciados de identidade em que os nomes de números ocorrem, de modo que o fato de que o princípio de Hume, na qualidade de um princípio semântico, não nos fornece o *significado* de tais enunciados é um problema mais fundamental para Frege do que o fato de que o princípio de Hume, na qualidade de um princípio epistemológico, não nos concede o acesso aos números cardinais como objetos. Sendo assim, devemos rejeitar a ideia de que Frege compreende o problema de Júlio César como um problema primordialmente epistemológico.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, eu abordei vários aspectos da filosofia da matemática de Frege e, sobretudo, do problema de Júlio César enfrentado por ele. Eu comecei apresentando a importância exegética e a importância filosófica do problema de Júlio César, e as características da obra de Frege que a tornaram revolucionária. Vimos que Frege trabalha com duas concepções de lógica. A primeira concepção de lógica que consideramos foi a lógica como a ferramenta para a realização do projeto logicista, o que motivou a abordagem sistemática de Frege. Em seguida, vimos qual é o objetivo da lógica para Frege e o que a tese logicista afirma, a saber, que os axiomas e as regras de inferência da aritmética são, no fundo, teoremas e regras de inferência da lógica. Consideramos os problemas de um sistema de provas com lacunas e, consequentemente, as vantagens de um sistema de provas sem lacunas. A segunda concepção de lógica que abordamos foi a lógica como a ciência do pensar humano, da razão enquanto tal. Eu disse que o que levou Frege a publicar *FA* foi a impopularidade da *Conceitografia*, e encerrei o primeiro capítulo apresentando as definições da *Conceitografia* de alguns conceitos utilizados em *FA*.

Eu iniciei o segundo capítulo apresentando um dos objetivos de *FA*: definir logicamente os números cardinais e o conceito de número cardinal, para que assim Frege pudesse provar as leis básicas da aritmética. Levantei as questões a serem respondidas por Frege em *FA*, e disse que *FA* é composto por duas partes completamente distintas: a primeira parte tem um caráter negativo e crítico, e a segunda parte tem um caráter positivo e explicativo, estando tudo dentro de uma abordagem informal. Quanto à primeira parte, conferimos a posição de Mill a respeito da natureza dos números e dos enunciados da aritmética, e os motivos pelos quais Frege rejeita esse posicionamento. Consideramos a visão de Kant sobre a aritmética e as sentenças da aritmética, e as críticas de Frege a Kant. Dentre essas críticas, encontramos a crítica de Frege à caracterização kantiana de analiticidade. Vimos que, para Frege, os enunciados da aritmética são juízos analíticos, e, logo em seguida, apresentei a definição de Frege de juízo analítico. Terminei a apresentação da primeira parte de *FA* indicando as razões de Frege para sustentar que os numerais não representam nem propriedades de objetos singulares e nem de aglomerados de objetos.

Quanto à segunda parte de *FA*, eu disse que, para Frege, uma atribuição numérica expressa a atribuição de um conceito de segunda ordem a um conceito de primeira ordem. Em termos linguísticos, vimos que isso significa a complementação de um predicado de segunda ordem, de um quantificador numérico, por um predicado de primeira ordem. Apresentei a primeira definição de Frege dos números cardinais, a definição recursiva, e expliquei o que é uma definição recursiva. Consideramos três razões fornecidas por Frege para rejeitarmos essa definição, e dentre elas se encontrava a primeira ocorrência do problema de Júlio César em *FA*. Quanto a essa ocorrência do problema, conferimos a interpretação de Greimann, segundo a qual o problema é que as três cláusulas da definição recursiva não legitimam uma interpretação dos nomes de números como termos singulares. Conferimos também que a interpretação de Heck desse problema é a mesma de Greimann: para Heck, o problema se trata da incapacidade da definição recursiva de caracterizar os nomes de números que ocorrem nas cláusulas como termos singulares e, assim, de caracterizar os números como objetos.

Eu disse que Frege quer definir os números como objetos, e apontei as razões que ele tem para sustentar que eles são objetos. Para definí-los como objetos, vimos que Frege deixa de lado as atribuições numéricas e foca nas equações, nas identidades entre números. Utilizei a expressão de Dummett "virada linguística" para caracterizar o modo como Frege faz isso, ao definir os números cardinais estabelecendo o significado do nome "o número de *F*s", que representa a maneira como os cardinais estão dados para nós. Apreciamos a segunda definição de Frege dos números cardinais, a definição de "o número de *F*s" de acordo com o princípio do contexto, o que a qualifica como uma definição contextual. Essa definição é a seguinte: o significado de identidades da forma "o número de *F*s = o número de *G*s" é a existência de uma relação de correspondência 1-1 entre os dois conceitos *F* e *G*. Eu disse que Frege chama tal relação de segunda ordem de relação de equinumerosidade. Em seguida, apresentei o problema de Júlio César com a segunda definição dos cardinais da seguinte maneira: o problema é que a definição não nos fornece meios para distinguirmos objetos dados como números cardinais de objetos que não estão dados como tais. Vimos que Frege defende que nós conhecemos intuitivamente o significado de "o número de *F*s = Júlio César", mas que recorrer a um expediente extra-lógico como a intuição vai contra o que o projeto logicista determina.

Apresentei a terceira definição de Frege dos números cardinais, a definição explícita de "o número de *F*s" em termos de extensões de conceitos, e disse que o princípio de Hume é derivado logicamente por Frege a partir de tal definição. Verificamos qual é a utilidade da definição explícita na solução do problema de Júlio César em *FA*, e eu trouxe a pressuposição que está por trás de sua utilização nessa solução. Vimos que a relação de equinumerosidade é uma relação de equivalência que divide a totalidade dos conceitos em diferentes repartições. Eu defendi que a definição explícita identifica os números cardinais com essas repartições, que também podem ser chamadas de classes de equivalência, e, enfim, apresentei a definição de Frege do conceito de número cardinal: "o objeto n é um número cardinal" significa que existe um conceito F tal que n é igual ao número de *F*s. Além disso, eu fiz uma divisão entre dois tipos de números cardinais: os cardinais finitos, que são os números naturais, e os cardinais transfinitos, dentre os quais se encontra o número ∞_1, que indica a cardinalidade do conjunto dos números naturais mas que não é um número natural.

Eu iniciei a seção 2.2 dizendo que o papel do princípio de Hume não é determinar o valor de verdade de equações aritméticas, mas sim explicar o que são os números cardinais, isto é, esclarecer o significado de equações que envolvem nomes da forma "o número de Fs". Vimos que, para Greimann, as duas ocorrências do problema de Júlio César em *FA* expressam, no fundo, o mesmo problema, a saber, que as respectivas definições envolvidas não qualificam os nomes de números como termos singulares. Além disso, vimos que Greimann compreende tal problema como um problema lógico, como o problema de que essas definições não satisfazem o princípio da determinação completa, a lei *lógica* do terceiro excluído. Consideramos o posicionamento de Heck quanto ao mesmo problema, que, diferentemente de Greimann, sustenta que Frege ainda não havia aderido ao princípio da determinação completa em *FA*. Heck também defende que as ocorrências do problema de Júlio César em *FA* representam o problema de que as respectivas definições não caracterizam nomes de números como termos singulares, mas ele atribui isso à incapacidade das definições de estabelecer, para todo x pertencente ao domínio, o *significado* de "o número de Fs $= x$". Por isso, e por entender que a questão que levou Frege ao problema de Júlio César é a questão semântica "como podemos estabelecer o significado de 'o número de Fs'?", Heck compreende esse problema como um problema semântico.

Em seguida, eu apresentei a minha interpretação do problema de Júlio César em *FA*: o problema, que eu também entendo como sendo um só, é que nem a definição contextual, tampouco a definição recursiva, dão conta de todos os enunciados de identidade *bem-formados* do sistema lógico subjacente. Eu defendo que, ainda que o problema de Júlio César em *FA* coloque um problema lógico e um problema semântico para Frege, Frege o compreende como um problema primordialmente *formal*. Nós pressupomos que o sistema lógico de *FA* é o mesmo da *Conceitografia*, mas com alguns acréscimos: a introdução dos números cardinais e dos números naturais no domínio de objetos e o estabelecimento do princípio de Hume como critério para a identidade numérica. Nós dissemos que esses acréscimos não foram suficientes para as pretensões logicistas de Frege: fundamentar em bases lógicas não somente a aritmética dos números naturais, mas também as outras aritméticas. Eu sustento que tais pretensões levaram Frege a criticar o princípio de Hume como constituindo um critério de identidade apenas para os números cardinais, e que Frege expandiu ainda mais o sistema lógico nas seções finais de *FA* para que o seu domínio englobasse também os outros tipos de números. Vimos que Frege exige que toda expansão do domínio de objetos seja acompanhada por uma redefinição das funções do sistema, para que os objetos recém-introduzidos também sejam contemplados, e defendemos que tal exigência é apenas a observância do princípio da determinação completa.

Afirmamos que Frege estava à procura de um novo critério de identidade para os objetos de seu domínio, e isso por dois motivos: (1) Frege expandiu o seu domínio de objetos para que ele incluísse também os outros tipos de números e (2) o critério de identidade até então vigente, o princípio de Hume, só serve para um domínio de objetos que contenha apenas os números cardinais, para um sistema em cujo vocabulário existem somente nomes da forma "o número de *F*s". Sustentamos que ao domínio de objetos de *FA* não pertencem humanos como Júlio César, que o nome "Júlio César" não faz parte do vocabulário da Conceitografia. Eu disse que Frege, ao falar de Júlio César, está apenas indicando que o princípio de Hume não funciona com um domínio que possui objetos além dos números cardinais; que o princípio de Hume não serve para um sistema de cuja linguagem façam parte nomes que não são da forma "o número de *F*s". Além disso, eu defendo que, para que Frege possa introduzir outros números no domínio, ele precisa de duas coisas: (1) um novo tipo de expressão que designe esses números, uma vez que as expressões da forma "o número de *F*s" nomeiam somente números cardinais, e (2) um novo "princípio de Hume", a partir do qual seja possível estabelecer as condições de verdade de todas as identidades bem-formadas que envolvam as novas expressões. Quanto ao segundo ponto, eu disse que o novo princípio deve representar um critério de identidade comum, ou geral, para todos os tipos de números que Frege considere como pertencendo ao seu domínio de objetos.

A minha interpretação caracteriza o problema de Júlio César em *FA* de dois modos: ontologicamente, o problema é que, a partir do princípio de Hume, não conseguimos distinguir números de diferentes tipos; formalmente, o problema é que o princípio de Hume não estabelece as condições de verdade de todas as identidades bem-formadas do sistema. Defendemos que Frege compreende o problema em questão *formalmente*, como um problema quanto à formação de enunciados de identidade *bem-formados* na Conceitografia. É um problema que diz respeito à linguagem lógica de *FA* e às *fórmulas bem-formadas* que podem ser construídas a partir dela. Eu encerrei a seção 2.2 dizendo que, ainda que Frege tivesse a sua disposição um critério de identidade geral como o mencionado acima, ele ainda definiria os outros tipos de números explicitamente em termos de percursos de valor. Argumentamos a favor disso sustentando que (1) Frege estava decidido a identificar os números com determinados objetos lógicos, conhecidos previamente, e que (2) ele achava que um critério de identidade como o princípio de Hume, ainda que com um caráter mais geral, fosse perfeitamente compatível com a definição de todos os números em termos de percursos de valor.

Na seção 2.3, eu apresentei a definição de Frege dos números naturais individuais e da relação *ser sucessor imediato*. Verificamos o porquê de que o procedimento para a definição dos números em termos de percursos de valor só funciona dada a tese de que eles são objetos. Também conferimos a característica da lógica de Frege que origina a impredicatividade da definição de *número natural*, a saber, que o escopo dos quantificadores de Frege contém todas as entidades introduzidas da ordem correspondente ao quantificador. Eu abordei, em seguida, a funcionalidade da relação *ser sucessor imediato*, e disse que podemos entender a definição de Frege de *número natural* de duas maneiras diferentes, que, na verdade, dizem a mesma coisa: (1) n é número natural significa que n tem toda propriedade que 0 tem e que é hereditária na relação *ser sucessor imediato*; (2) n é número natural significa que 0 é ancestral fraco de n na sequência *sucessor*, que é a sequência dada pela relação *ser sucessor imediato*. Finalizamos o segundo capítulo analisando a impredicatividade da definição de *número natural*, e sustentamos que tal impredicatividade não constitui um problema para Frege.

No capítulo 3, dissemos que Frege pretendia executar o programa logicista demonstrando que os axiomas de Dedekind-Peano podem ser derivados logicamente de suas definições. Vimos que o objetivo de *FA*, por um lado, é motivar o projeto logicista, e que o objetivo de *LB*, por outro lado, é executá-lo. Eu indiquei onde se encontram em *LB* as provas dos axiomas de Dedekind-Peano, e fiz uma retomada de como Frege soluciona o problema de Júlio César em *FA*. Verificamos que a solução pressupõe que o significado de todas as identidades da forma "$x = \dot{\varepsilon}F(\varepsilon)$", em que "$x$" pode ser o nome de qualquer objeto do domínio, está estabelecido. Apresentei o axioma V, e disse que a noção de percurso de valor é introduzida em *LB* por meio desse axioma. Percebemos que o problema de Júlio César também atinge identidades da forma "$x = \dot{\varepsilon}F(\varepsilon)$". Inicialmente, eu apresento esse problema do seguinte modo: o axioma V não estabelece o significado de todas as identidades da forma "$x = \dot{\varepsilon}F(\varepsilon)$", mas apenas das identidades em que, no lugar de "x", ocorre outro nome como "$\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)$".

Vimos que Frege não abandona o axioma V mesmo com o problema de Júlio César, e que ele entende que esse axioma não é uma definição dos percursos de valor. Conferimos a maneira como Frege elimina o problema de Júlio César do axioma V, estabelecendo o valor que as funções introduzidas têm para percursos de valor como argumento, e consideramos o modo como ele reduz todas essas funções à função de identidade. Apresentei as estipulações que Frege realiza para estabelecer o valor da identidade para percursos de valor e valores de verdade como argumentos. Essas estipulações identificam os valores de verdade com seus respectivos conjuntos unitários e são as seguintes: os enunciados de identidade "Verdadeiro = $\dot{\varepsilon}$—(ε)" e "Falso = $\dot{\varepsilon}(\varepsilon = (\neg\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a})))$" são verdadeiros. Eu disse que Frege, ao solucionar o problema de Júlio César em *LB* dessa maneira, ignora qualquer outro objeto que possa ser identificado com percursos de valor e foca apenas nos valores de verdade. Vimos que Frege justifica a sua atenção especial à questão de se os valores de verdade podem ser percursos de valor dizendo que somente esses objetos foram introduzidos. A interpretação de Heck dessa justificativa é a seguinte: Frege quis limitar o escopo de seus quantificadores de primeira ordem aos objetos introduzidos; ele quis restringir o domínio de sua Conceitografia às entidades introduzidas. A posição de Heck é de que Frege faz estipulações focando apenas nos valores de verdade porque quaisquer outros objetos além de valores de verdade e percursos de valor não pertencem ao domínio do sistema lógico de *LB*.

Analisamos os motivos que levaram Heck a interpretar o problema de Júlio César em *LB* como um problema *semântico*. Os motivos são: (1) Heck defende que a questão *semântica* "como podemos estabelecer a *referência* (*Bedeutung*) de expressões que supostamente se referem a percursos de valor?" que levou Frege ao problema em questão; (2) Heck sustenta que as estipulações fornecidas por Frege para resolver o problema de Júlio César em *LB* também são *semânticas*. Eu discordei tanto da interpretação de Heck da justificativa de Frege como de sua interpretação do problema de Júlio César em *LB*. Quanto ao primeiro ponto, eu disse que Frege argumenta diversas vezes contra qualquer possibilidade de restrição no domínio de objetos. A minha interpretação da justificativa de Frege é a seguinte: Frege quis dizer que os únicos nomes que podem ser considerados na formação de identidades da Conceitografia são nomes de percursos de valor e nomes de valores de verdade, que são os únicos nomes introduzidos até então. Quanto à interpretação de Heck do problema de Júlio César em *LB*, eu disse que Frege está preocupado, em primeiro lugar, com as identidades que podem ser construídas dentro de seu *formalismo*. Nós sustentamos que Frege se atém aos valores de verdade ao colocar o problema de Júlio César porque nomes de valores de verdade fazem parte de seu formalismo, e que ele não se preocupa com Júlio César porque "Júlio César" não faz parte de seu formalismo. Por isso, eu interpretei o problema de Júlio César em *LB*, assim como em *FA*, como um problema primordialmente *formal*.

Nós vimos que Greimann considera o axioma V como uma regra semântica *geral* que governa nomes de percursos de valor, e que ele trata as estipulações adicionais como regras semânticas *auxiliares* ao axioma V. Isso o levou a oferecer a seguinte interpretação *semântica* do problema de Júlio César em *LB*: o problema é que a regra semântica geral expressa pelo axioma V não é, *sozinha*, capaz de estabelecer a *referência* de nomes de percursos de valor. Apresentei a razão de Greimann por trás dessa afirmação sobre o axioma V, a saber, que ele entende que o axioma V não satisfaz os *critérios de referencialidade* fornecidos por Frege em *LB*. Vimos que os critérios de referencialidade não são satisfeitos pelo axioma V porque tal axioma não determina a referência de "$\varphi(\grave{\varepsilon}F(\varepsilon))$" para toda função "$\varphi$", e que Greimann compreende esses critérios como uma reformulação em *LB* do princípio da determinação completa. Além disso, dissemos que Greimann interpreta os critérios de referencialidade linguisticamente, e não ontologicamente, ou seja, eles versariam sobre os *termos singulares* que fazem parte do vocabulário, e não sobre os *objetos* que compõem o domínio. Dada a interpretação linguística de Greimann do princípio da determinação completa, eu sustentei que a sua interpretação da justificativa de Frege quanto às estipulações adicionais é a mesma que a minha: Frege quis dizer que ele dá atenção especial aos valores de verdade porque somente valores de verdade e percursos de valor possuem nomes, *termos singulares*, no vocabulário da Conceitografia.

Eu finalizei a seção 3.2 apresentando a minha interpretação formal do problema de Júlio César em *LB*, que é muito similar a minha interpretação do problema em *FA*. Nós defendemos que, ainda que o problema de Júlio César em *LB* coloque uma questão lógica e uma questão semântica para Frege, ele estava tentando resolver por meio das estipulações adicionais um problema que ele entende como *formal*. Dissemos que a questão *formal* "a identidade '$\grave{\varepsilon}F(\varepsilon) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a})$' é bem-formada na Conceitografia?" é anterior a qualquer questão sobre o *significado* de tal identidade e sobre se essa identidade ocasiona ou não uma violação das leis *lógicas* da Conceitografia. Por esse motivo, eu sustentei que é a questão formal acima que faz Frege se deparar com o problema de Júlio César em *LB* e, por ser uma questão *formal*, eu interpretei esse problema como um problema primordialmente *formal*.

Na última seção desta dissertação apresentamos duas interpretações alternativas do problema de Júlio César: uma interpretação metafísica e uma outra epistemológica. A interpretação metafísica do problema de Júlio César em *FA* é a seguinte: o princípio de Hume, diferentemente da definição explícita, não nos diz o que os números cardinais são na verdade. A interpretação metafísica do problema de Júlio César em *LB* é: o axioma V não determina que tipo de objetos os percursos de valor são. Eu apresentei duas razões para rejeitarmos a ideia de que Frege entende o problema de Júlio César como um problema metafísico: (1) em *FA*, Frege sugere que existem outras maneiras de resolver o problema de Júlio César que não a maneira adotada por ele; contudo, a profundidade de um problema visto como metafísico não permite que esse problema tenha mais de uma solução; (2) a solução do problema de Júlio César em *LB* não é elaborada para determinar a natureza, ou a essência, dos percursos de valor, mas é constituída de meras estipulações com caráter emergencial.

Quanto à interpretação epistemológica do problema, dissemos que, para Frege, o acesso epistemológico aos números só é possível por meio de um critério de identidade para eles. Deste modo, apresentei duas formulações distintas do problema de Júlio César visto como um problema epistemológico: (1) o princípio de Hume não constitui um intermediário para acessarmos epistemologicamente os números cardinais, e (2) o princípio de Hume não nos fornece um método para reconhecermos um número cardinal novamente como sendo o mesmo número. Vimos que, para Frege, só podemos acessar epistemologicamente os números cardinais, e reconhecê-los novamente como sendo os mesmos, se apreendermos, primeiramente, o significado dos nomes de números, isto é, dado o princípio do contexto, o significado das identidades em que os nomes de números ocorrem. Sendo assim, eu defendi que Frege, antes de entender o problema de Júlio César como um problema epistemológico, entende o problema em questão semanticamente das seguintes maneiras: (1) o princípio de Hume não é capaz de estabelecer o significado dos nomes de números, e (2) o princípio de Hume não é capaz de estabelecer o significado das identidades que envolvem nomes de números. Finalizamos a dissertação afirmando que Frege não compreende o problema de Júlio César como um problema primordialmente epistemológico; que ele entende que o problema semântico é anterior a, e mais importante do que, o problema epistemológico.

Obviamente, o problema de Júlio César não foi completamente esgotado na presente dissertação. Apesar de ser um tema bastante explorado na literatura secundária sobre Frege, há ainda diversos aspectos do problema a serem analisados, e que pretendo investigar em trabalhos futuros. Em particular, a solução de Frege para o problema de Júlio César em *FA* é uma que gera bastante controvérsia, uma vez que ele não só assume que nós temos familiaridade com extensões de conceitos, mas também que essa familiaridade confere sentido a enunciados de identidade antes considerados problemáticos. A minha impressão é que Frege se surpreende com o problema de Júlio César em *FA* e, então, adota uma medida emergencial que não só tem a pretensão de solucionar o problema, mas que também possa preservar o princípio de Hume.

Como uma alternativa a solução proposta, nós podemos nos perguntar, por exemplo, se a solução oferecida por Frege ao problema de Júlio César em *LB* não é possível no contexto de *FA*. Evidentemente, os respectivos quadros conceituais de *FA* e *LB* são diferentes. Nesses livros, Frege trabalha, em especial, com noções semânticas distintas. Em *FA*, por um lado, Frege faz uso da noção de conteúdo judicável (o conteúdo conceitual de sentenças), que é a única unidade semântica associada às sentenças da Conceitografia. Em *LB*, por outro lado, Frege recorre à distinção entre as noções de pensamento (o sentido de sentenças) e referência, que são as duas unidades semânticas associadas às sentenças do sistema lógico de *LB*. Se essa distinção é essencial ou não para a solução do problema de Júlio César proposta em *LB* é uma questão que merece ser estudada mais profundamente. Podemos até mesmo nos questionar se esses diferentes quadros conceituais não levaram Frege a conceber as respectivas ocorrências do problema de Júlio César de maneiras distintas, ainda que elas representassem o mesmo problema. De qualquer modo, eu espero ter explorado suficientemente o tema abordado de maneira a (1) ter esclarecido o que é o problema de Júlio César em cada uma das ocasiões que Frege o enfrenta e a (2) ter determinado se as diferentes ocorrências do problema de Júlio César representam ou não o mesmo problema, que foram os objetivos traçados para esta dissertação.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DUMMETT, M. *Frege: philosophy of mathematics*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1991.

FREGE, G. *The foundations of arithmetic: a logico-mathematical enquiry into the concept of number*. 2. ed. New York: Harper & Brothers, 1960.

FREGE, G. *Conceptual notation and related articles*. London: Oxford University Press, 1972.

FREGE, G. Function and concept. In: BEANEY, M. (Ed.). *The Frege Reader*. [S.l.]: Blackwell Publishers, 1997.

FREGE, G. *Basic laws of arithmetic*. New York: Oxford University Press, 2013.

GREIMANN, D. What is Frege's Julius Caesar problem? *Dialectica*, v. 57, n. 3, p. 261–278, 2003.

KIMBERLY HECK, R. The Julius Caesar objection. In: KIMBERLY HECK, R. (Ed.). *Language, thought, and logic: essays in honour of Michael Dummett*. [S.l.]: Oxford University Press, 1997. p. 273–308.

KIMBERLY HECK, R. *Reading Frege's grundgesetze*. Oxford, UK: Oxford University Press, 2012.

SALMON, N. Julius Caesar and the numbers. *Springer*, v. 175, n. 7, p. 1631–1660, 2017.