

UFRRJ

**PRÓ- REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA,
TECNOLOGIA E INOVAÇÃO EM AGROPECUÁRIA**

TESE

**Modelos Matemáticos para a Simulação da
Produção de Mel em Municípios do Rio de Janeiro**

Renato Machado Aquino

2015



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA, TECNOLOGIA E
INOVAÇÃO EM AGROPECUÁRIA**

**MODELOS MATEMÁTICOS PARA A SIMULAÇÃO DA PRODUÇÃO
DE MEL EM MUNICÍPIOS DO RIO DE JANEIRO**

RENATO MACHADO AQUINO

Sob a Orientação do Professor
Carlos Andres Reyna Vera-Tudela

ECoorientação do Professor
Júlio Cesar Albuquerque Bastos

Tese submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutor**, no Programa de Pós-Graduação em Ciência, Tecnologia e Inovação em Agropecuária, Área de Concentração em Recursos Naturais e Proteção Ambiental.

Seropédica, RJ
Abril de 2015

338.16098153

A657m

T

Aquino, Renato Machado, 1960-

Modelos matemáticos para a simulação da produção de mel em municípios do Rio de Janeiro / Renato Machado Aquino – 2015.

126 f.: il.

Orientador: Carlos Andres Reyna Vera-Tudela.

Tese (doutorado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Curso de Pós-Graduação em Ciência, Tecnologia e Inovação em Agropecuária.

Bibliografia: f. 90-96.

1. Produtividade agrícola – Rio de Janeiro (RJ) – Teses. 2. Produtividade agrícola – Modelos matemáticos – Teses. 3. Mel – Controle de produção – Teses. 4. Economia agrícola – Teses. 5. Modelos matemáticos – Teses. I. Vera-Tudela, Carlos Andres Reyna, 1964-. II. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Curso de Pós-Graduação em Ciência, Tecnologia e Inovação em Agropecuária. III. Título.

É permitida a cópia total ou parcial desta Tese, desde que seja citada a fonte.

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
EM AGROPECUÁRIA**

RENATO MACHADO AQUINO

Tese submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutor** no Programa de Pós-Graduação em Ciência, Tecnologia e Inovação em Agropecuária, área de Concentração em Recursos Naturais e Proteção Ambiental.

TESE APROVADA EM 29/04/2015.

Carlos Andres Rivera Vera-Tudela. Dr. UFRRJ
(Orientador)

Angel Ramón Sanchez Delgado. Dr. UFRRJ

Rosane Ferreira de Oliveira. Dra. UFRRJ

Ricardo Caetano Azevedo Biloti. Dr. UNICAMP

Gabriel Caldas Montes. Dr. UFF

Dedico este trabalho à:

Minha amada esposa, pelo seu carinho, dedicação e apoio nos momentos de trabalho intenso.
Não poderia esquecer de agradecê-la também pela paciência e compreensão nos momentos necessários de renúncia.

Meus pais, irmão, e todos de minha família que me incentivaram e que compreenderam os momentos de ausência.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me deu a vida e a consciência para aprender, evoluir, amar e compartilhar as experiências.

Ao meu orientador Prof. Carlos Andres pelos aconselhamentos e apoio recebido nestes anos de árduo trabalho.

Ao meu coorientador Prof. Júlio Cesar Bastos pela paciência, atenção e sugestões feitas nestes meus primeiros passos na área de Economia.

À Coordenadora do PPGCTIA Lucia Helena dos Anjos pela seriedade na condução do curso, pela atenção dispensada a todos e pela imensa paciência nas idas e vindas das versões da tese para revisão.

À querida secretária do curso Renata, a nossa “Renatinha”, pela presteza e cuidado ao estar sempre disponível para nos atender.

A todos os professores do PPGCTIA que sempre se disponibilizaram a colaborar no que fosse preciso.

Aos colegas do Departamento de Matemática da UFRRJ, por todo o incentivo recebido, principalmente àqueles que tiveram oportunidade de emprestar ouvido atento a minhas dúvidas e hesitações.

Aos amigos diversos cujos nomes não mencionei, mas que foram importantes nessa caminhada.

RESUMO

AQUINO, Renato Machado. **Modelo matemático para a simulação da produção de mel em municípios do Rio de Janeiro**. 2015. 63f. Tese (Doutorado em Ciência, Tecnologia e Inovação em Agropecuária). Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2015.

Brasil e Argentina estão entre os dez maiores exportadores mundiais de mel. A atividade de exportação desse produto rendeu aos dois países, em 2011, algo em torno de US\$ 224 milhões. A Argentina é um dos primeiros produtores mundiais, tendo produzido 83.121 toneladas, em números de 2011. Isso significa que a apicultura é uma atividade de vulto para o universo do agronegócio de ambos os países. Todo esse volume de produção e o montante angariado pelos dois países são frutos do esforço conjunto de produtores, centros de pesquisa e órgãos de fomento etc. Portanto, modelos matemáticos que possibilitem melhor compreensão do comportamento da produção de mel ao longo do tempo, sob a influência de diversos fatores, podem ser importantes instrumentos de planejamento para diversos atores nesse cenário. O objetivo deste trabalho é desenvolver modelos matemáticos, definidos por sistemas de equações diferenciais ordinárias, cujas soluções numéricas e parâmetros possam permitir a obtenção de informações a respeito da produção de mel de determinada localidade. A hipótese central é a de que é possível prever e avaliar a produção de dada localidade, utilizando modelos matemáticos. Uma hipótese secundária seria a de que os parâmetros desses modelos poderiam ser importantes indicadores a respeito da atividade produtiva. Os modelos aqui elaborados tiveram como base o Modelo de Lucas para o crescimento econômico de longo prazo, que leva em conta o capital humano como elemento endógeno fundamental de crescimento. A recuperação dos parâmetros e a obtenção das soluções numéricas para os modelos foram implementadas através de software na linguagem Fortran 95. O princípio norteador do software foi o de fornecer soluções para os modelos que oferecessem uma descrição ótima da produção de uma certa localidade, durante um certo período de tempo. Para os ajustes da solução do sistema de equações diferenciais que definem os modelos, foi utilizado um método dos quadrados mínimos não linear. O *solver* para este método foi o algoritmo apresentado em Powell (2009), denominado BOBYQA. Esse algoritmo foi escrito em Fortran 77, sendo livre de derivadas e aceitando restrições de caixa. A validação do modelo foi feita em duas etapas: na primeira, ajustou-se o modelo a dados de produção de mel. Na segunda etapa os modelos foram aplicados à produção de dezoito municípios representativos, em produção melífera, das microrregiões em que o Estado do Rio de Janeiro está dividido. Houve bom ajuste dos modelos em 15 dos municípios pesquisados. Só não houve ajuste nos três casos em que a produção mostrou-se anômala. Dessa forma, os resultados permitem concluir que os modelos desenvolvidos podem servir de instrumento eficaz para os gestores do agronegócio do mel, podendo inclusive fornecer boas previsões de produção sob certas condições e estimativas de safra em períodos de colheita. Além do mais, podem abrir front importante de pesquisa a respeito da tecnologia e produtividade empregadas nesta atividade econômica.

Palavras-chave: Produção de mel. Modelo matemático. Avaliação da produção.

ABSTRACT

AQUINO, Renato Machado. **Mathematical models for the honey production simulation in municipalities of Rio de Janeiro**. 2015. 63f. Thesis (Doctor in Science, Technology and Innovation in Agriculture). Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós Graduação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2015.

Brazil and Argentina amongst the world's ten leading countries in honey exports. The two countries share in this commodity exports was about US\$ 220 million dollars in 2011. Argentina is one of the world's greatest producers, having reached 83,121 tons that year. That means that apiculture is a relevant activity to both countries' agrobusiness network. All this amount of production and equivalent input were consequence of the joint effort of producers, research centres and development agencies. Thus, mathematical models which may allow a better understanding of honey production over time, under many factors influence, might be an important planning tool for the many actors involved in this scene. The aim of this work is to develop mathematical models, defined by ordinary differential equations, whose numerical solutions and parameters may allow one to have information about a certain municipality's honey production. The central hypothesis is that it is possible to assess and predict a municipality's honey production, by using mathematical models. A secondary hypothesis would be that these models' parameters could be important indices to this productive activity. The models developed here were based in Lucas Growth Model, which takes into account that human capital as an endogenous fundamental growth component. The parameter rescue and the models numerical solving were implemented through a software in Fortran 95 programming language. The software main guideline was to allow solutions to the models so that it was possible to offer an optimal municipality's honey production description, in a certain time period. The solution fitting of the system of differential equations which define the models was made through a nonlinear least squares method. The *solver* to this method was BOBYQA, a software presented in Powell (2009). This algorithm was developed in Fortran 77, is derivative free and accepts box constraints. The model validation was made in two steps: in the first it was validated *gedanken* honey production data. In the second the models were applied to eighteen municipalities which represented honey production in Rio de Janeiro State microregions. Fifteen among the researched had good model fitting. There was no fitting in three cases of anomalous production. This way, the results allow one to conclude that the developed models may be efficient instruments to honey agrobusiness managers, by allowing good production predictions under certain conditions and crop estimate in harvest periods. Moreover, they may start important research about technology and productivity in this economic activity.

Keywords: Honey Production. Mathematical Models. Production Assessment

RESUMEN EXPANDIDO

Aquino, Renato Machado. **Modelo matemático para la simulación de la producción de miel en municipios de Rio de Janeiro**. 2015. 63h. Tesis (Doctorado en Ciencia, Tecnología e Innovación en Agropecuaria) Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, RJ, 2015.

1. Introducción

Brasil y Argentina están entre los diez mayores exportadores mundiales de miel. La actividad de exportación de este producto rindió a los dos países, en 2011, aproximadamente US\$ 224 millones. La Argentina es uno de los primeros productores mundiales, habiendo producido 83121 toneladas, en números de 2011. Esto significa que la apicultura es una actividad importante para el universo del agro negocio de ambos países. Este volumen todo de producción y valores conseguidos por los dos países son fruto del esfuerzo conjunto de productores, centros de investigación y organismos de incentivo. Por lo tanto, modelos matemáticos que hagan posible una mejor comprensión del comportamiento de la producción de la miel a lo largo del tiempo, sobre la influencia de diversos factores, pueden ser importantes instrumentos de planeamiento para diferentes actores en ese escenario.

Dentro de este contexto, este trabajo quiere dar una contribución de orden metodológica. El objetivo es desarrollar modelos matemáticos, definidos por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, en donde las soluciones numéricas y parámetros permitan obtener informaciones a respecto de la producción de la miel de determinada localidad. La hipótesis central es que es posible pronosticar la producción de una cierta localidad, utilizando modelos matemáticos. Una hipótesis secundaria sería que los parámetros de estos modelos podrían ser indicadores importantes a respecto de la actividad productiva.

2. Materiales y Métodos

Los modelos aquí elaborados tuvieron como base el Modelo de Lucas para el crecimiento económico de largo plazo, que considera el capital humano como elemento endógeno fundamental de crecimiento. Ese modelo fue escogido por permitir una razonable descripción del comportamiento de una economía, además de que las ecuaciones permiten relacionar fácilmente: producción y capital humano. Esta última variable es considerada fundamental para un correcto funcionamiento del proceso productivo.

Los modelos desarrollados fueron los siguientes:

$$\begin{array}{l} \text{Modelo A:} \\ \text{Modelo B:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \dot{P} = \alpha A^{\frac{1}{\alpha}} (uh)^{\frac{1}{\alpha}} \\ \dot{h} = B(1 - \tau) \\ \dot{P} = \frac{\alpha(-1)^{\sigma} A^{\frac{1}{\alpha}} (uh)^{\frac{1}{\alpha}}}{N_{op}} \\ \dot{h} = B(1 - u) \end{array} \right.$$

En ambos modelos, P es la producción en el instante t e h es el capital humano. Los parámetros son A , el índice de tecnología de la producción; α es el coeficiente de elasticidad en relación al capital físico; B es el índice de tecnología en la producción de capital humano; u es el porcentaje de capital humano aplicado en la producción e n es el número de trabajadores. En el caso del Modelo B, se t e $t+1$ indican años consecutivos, el parámetro σ asume el valor 1 se $P(t+1) \geq P(t)$, asumiendo el valor 2 se $P(t+1) < P(t)$.

La recuperación de los parámetros y el ajuste de las soluciones de los modelos desarrollados fueron implementadas por medio de un software en lenguaje Fortran 95. Ese software tuvo como principio ofrecer soluciones para los modelos que ofreciesen una descripción óptima de la producción de una cierta localidad, durante un cierto periodo de tiempo. Para los ajustes de las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales que definen los modelos fue utilizado un método de mínimos cuadrados no lineal. El *solver* para este método fue el algoritmo mostrado en Powell (2009), denominado BoundedOptimizationbyQuadraticApproximation (BOBYQA). Este algoritmo fue escrito en Fortran 77, siendo libre de derivadas e aceptando restricciones de caja.

La verificación de los modelos fue realizada en dos etapas: en la primera, los modelos fueron aplicados a setenta e tres conjuntos de datos simulados (*gedanken*), siendo que cada conjunto es un vector con veintidós componentes. Las once primeras coordenadas de ese vector corresponden a valores de la producción. Las once últimas coordenadas corresponden al capital humano. Todo el proceso de validación de los modelos fue realizado para un periodo de once años debido a la necesidad de mantener la estabilidad de los diversos algoritmos probados durante la evolución de los trabajos.

Cada uno de los setenta y tres conjuntos de datos *gedanken* fueron generados a partir del Modelo B, siendo atribuidos valores aleatorios a los parámetros del mismo, dentro de las restricciones exigidas. Los sistemas de ecuaciones diferenciales resultantes fueron resueltas por un método de Runge-Kutta de cuarta orden, aplicado a los intervalos $[t, t+1]$, con

$1 \leq t \leq 11$. Los valores de las soluciones obtenidas en los extremos de los intervalos son pontos de la forma $(P(t), h(t)), 1 \leq t \leq 11$, que forman cada uno de los setenta y tres conjuntos de datos simulados.

Establecidos los conjuntos de datos simulados, el Modelo B fue aplicado a cada uno de ellos de forma que fueron recuperados sus parámetros. El conjunto de datos *gedanken* que dio la mejor recuperación para el parámetro A , fue escogido para entregar el conjunto de valores de capital humano que será utilizado en la verificación del modelo para valores reales de producción.

El segundo momento del proceso de verificación fue aplicado a los Modelos a e B con los datos reales de producción de miel. Estos datos fueron obtenidos en el banco de datos SIDRA del IBGE, a partir de la producción de 18 municipios del estado de Rio de Janeiro, para los años de 2001 a 2011. Esos municipios fueron escogidos de acuerdo con la división de Rio de Janeiro en micro regiones; un municipio fue seleccionado se tiene una producción media en los once años lo más próxima posible de la producción media de la micro región, en los mismos once años. Los municipiosseleccionadosfueron Rio de Janeiro, São José do Vale do Rio Preto, Rio Bonito, Casimiro de Abreu, Campos dos Goytacazes, Itaguaí, Macaé,

Angra dos Reis, Itaocara, Miguel Pereira, Varre-Sai, Santa Maria Madalena, Carmo, Paraíba do Sul, São Pedro da Aldeia, Piraí e Barra do Piraí.

3. Resultados y Métodos

Durante el procedimiento de prueba del software, algunos resultados preliminares fueron obtenidos. Los mismos son expuestos a:

continuación

a) Resultados preliminares

Inicialmente se utilizó el método de los mínimos cuadrados lineal para el ajuste de los polinomios y de los datos referentes a los dieciséis años de producción del municipio de Petrópolis, en el estado de Rio de Janeiro. El *solver* del algoritmo utilizado fue el Método de los Gradientes Conjugados lineal. Las variables determinadas fueron los coeficientes de los polinomios. De forma general, se observó que cuanto mayor fue la precisión exigida, mejor será el ajuste obtenido. Pero en el caso de polinomios de grados menores, fueron obtenidos buenos resultados en los primeros años de producción. En el caso de polinomios de grados mayores, hasta el grado 14, los resultados no fueron buenos en los años iniciales. Los resultados fueron mucho mejores en los años finales.

En los casos de polinomios de grados mayores o iguales a 15, no fue posible aplicar el Método de los Gradientes Conjugados Lineal. En este caso, fue utilizado el Método de la Descomposición en Valores Singulares, que es un método directo, en donde no es permitido el control sobre el nivel de precisión deseado. Los resultados no fueron buenos.

Un Método de los Gradientes Conjugados no lineal también fue utilizado como *solver* para un algoritmo que debería ajustar los parámetros del sistema de ecuaciones diferenciales, definido pelo Modelo A. Fue considerada la producción de Petrópolis, para el mismo periodo de tiempo. El algoritmo desarrollado se mostró muy inestable, no ofreciendo los resultados deseados.

b) Resultados definitivos con el software BOBYQA

Al observar la producción de Petrópolis con más cuidado, las oscilaciones bruscas en los valores de la producción sugieren que, caso esa derivada exista, podría presentar discontinuidades. Además, como la función a ser minimizada, que establecía la suma de los residuos cuadráticos, era definida por una serie de subrutinas, solo quedo reforzada la idea de la inexistencia de esas derivadas. Hubo un esfuerzo de intentar recuperar la solución analítica de la función f pero este esfuerzo resulto infructífero.

Por estas razones, fue tomada la decisión de ser abandonado el Método de los Gradientes Conjugados no lineal. A partir de esta decisión el *solver* a ser utilizado fue el BOBYQA, algoritmo libre de derivadas e que venía ofreciendo buenos resultados para problemas con pocos parámetros, como eran los casos de los modelos estudiados.

En el caso de los resultados del modelo para los dieciocho municipios seleccionados, fue verificado que los resultados fueron satisfactorios en quince de estos. En los casos en que los resultados quedaron debajo de las expectativas ocurrieron para los municipios en que fue encontrada una variación fuera de lo común de la producción.

4. Conclusiones

Los dos modelos dieron buenos resultados para seis municipios. Apenas el Modelo A entrego buenos resultados en los otros seis. Apenas el Modelo B dio buenos resultados en tres municipios. De cualquier forma, se encontró una tendencia del Modelo a ser más bien sucedido cuando, de los diez intervalos anuales analizados, la producción era creciente, en años consecutivos, en 70% de estos. Otro punto importante a destacar es que, en los

municipios en que ambos modelos entregaran buenos resultados, la precisión obtenida por el Modelo B fue siempre mejor que la obtenida por el Modelo A.

Hubo apenas tres municipios en que no fue posible obtener buenos resultados con los Modelos A y B. Para estos casos, sería necesario implementar discretizaciones más finas de los intervalos en donde las discrepancias ocurrieron. Pero, ese procedimiento fue inviable debido a que los intervalos de producción son anuales. Investigaciones complementares deberán ser realizadas, con la finalidad de obtener informaciones que permitan saber los motivos de los comportamientos anómalos de la producción.

En este trabajo fueron iniciadas varias frentes de investigación, como la aplicación de los modelos para periodos de tiempo mayores a once años; la posible determinación del índice de tecnología de la producción en una determinada localidad, durante un cierto periodo de tiempo; el estudio de la producción de otros cultivos, localidades diferentes de las que fueron estudiadas.

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

ABEMEL	Associação Brasileira dos Exportadores de Mel
AG	Algoritmos Genéticos
BOBYQA	Bounded Optimization by Quadratic Approximation
CEPERJ	Fundação Centro Estadual de Estatísticas, Pesquisas e Formação de Servidores Públicos do Rio de Janeiro
EMBRAPA	Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária
FACERJ	Federação das Associações Comerciais e Empresariais do Estado do Rio de Janeiro
FAOSTAT	Food and Agriculture Organization of the United Nations – Statistics Division
FORTRAN	Formula Translating System
GNU	Gnu is Not a Unix
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IDE	Ambiente de Desenvolvimento Iterativo
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
MAPA	Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento
MDVS	Método de Decomposição em Valores Singulares
MGC	Método do Gradiente Conjugado
MGCL	Método do Gradiente Conjugado Linear
PIB	Produto Interno Bruto
RNA	Redes Neurais Artificiais (abreviação também empregada para o singular)
AS	Simulated Annealing
SEBRAE	Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas
SIDRA	Sistema IBGE de Recuperação Automática
UFRRJ	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
UNRC	Universidad Nacional de Rio Cuarto

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. A função de produção na forma intensiva.	8
Figura 2. Economia tendendo ao estado de equilíbrio.	9
Figura 3. Esquema simplificado de funcionamento das RNA.	21
Figura 4. Recombinação genética com as quatro posições mais à esquerda.....	24
Figura 5. Mutação com troca de valores de bits.....	24
Figura 6. Sete maiores produtores de mel.	46
Figura 7. Fluxograma do algoritmo desenvolvido com o MGCL não linear.	50
Figura 8. Fluxograma do algoritmo desenvolvido com o BOBYQA.....	50
Figura 9. Exemplo de conjunto de dados de entrada para o software desenvolvido.....	60
Figura 10. Ajuste de polimônios de grau 6 para várias margens de erro.	60
Figura 11. Gráfico com desempenho aproximado dos modelos A e B, por município.	64
Figura 12. Gráfico do ajuste obtido para o Rio de Janeiro.....	65
Figura 13. Ajuste do Modelo A para o município de Itaguaí.....	66
Figura 14. Ajuste obtido pelo Modelo A no caso de Miguel Pereira.	68
Figura 15. Gráfico de ajuste obtido para Rio Bonito.	69
Figura 16. Gráfico do ajuste obtido pelos modelos em Itaocara.	71
Figura 17. Gráficos dos ajustes obtidos para Campos dos Goytacazes.....	72
Figura 18. Gráfico dos ajustes obtidos para o município de Macaé.....	73
Figura 19. Gráfico dos ajustes obtidos para a produção de Nova Friburgo.	75
Figura 20. Gráfico do ajuste obtido para a produção de Santa Maria Madalena.	76
Figura 21. Gráfico com os ajustes obtidos para a produção de Paraíba do Sul.....	78
Figura 22. Gráfico com ajuste obtido para a produção de São Pedro da Aldeia.....	79
Figura 23. Gráfico do ajuste obtido para o município de Casimiro de Abreu.....	81
Figura 24. Gráfico dos ajustes obtidos para o município de Piraí.....	82
Figura 25. Gráfico do ajuste obtido para o município de Barra do Piraí.....	84
Figura 26. Gráfico para o ajuste obtido para o município de Angra dos Reis.	85
Figura 27. Total da safra hipotética no Rio de Janeiro entre os anos 2002 e 2003.....	87
Figura 28. Ajustes obtidos para o município de Areal para vinte anos.....	89
Figura 29. Gráfico mostrando a distribuição dos dados gedanken.....	110
Figura 30. Gráficos dos ajustes obtidos para os conjuntos g38 e g36.....	111
Figura 31. Gráficos dos ajustes obtidos para os dados gedanken g65 e g23.....	111
Figura 32. Gráfico da produção no município de Carmo.....	114
Figura 33. Gráfico da produção para São José do Vale do Rio Preto.	115
Figura 34. Gráfico da produção para o município de Varre-Sai.	116

Figura 35. Mesorregiões do Rio de Janeiro.....	117
---	-----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Seis maiores exportadores ordenados pelo valor das exportações.	47
Tabela 2. Mesorregiões e microrregiões, com os municípios selecionados.	58
Tabela 3. Municípios com o desempenho dos modelos plotados na Figura 11.	64
Tabela 4. Produções real e gerada para o Rio de Janeiro.	65
Tabela 5. Dados de produção e valores gerados para o município de Itaguaí.....	67
Tabela 6. Dados de produção e valores gerados para o município de Miguel Pereira.	68
Tabela 7. Produção e valores gerados parao município de Rio Bonito.....	69
Tabela 8. Produção e valores gerados para Itaocara.....	71
Tabela 9. Produção e valores gerados pelos Modelos A e B.....	72
Tabela 10. Dados de produção e valores gerados para o município de Macaé.	74
Tabela 11. Dados de produção e gerados para o município de Nova Friburgo.....	75
Tabela 12. Produção e valores gerados para Santa Maria Madalena.	77
Tabela 13. Dados de produção e valores gerados para o município de Paraíba do Sul.	78
Tabela 14. Produção e valores gerados para São Pedro da Aldeia.....	80
Tabela 15. Produção e valores gerados para de Casimiro de Abreu.	81
Tabela 16. Produção e valores gerados para de Piraí.	82
Tabela 17. Produção e valores gerados para o município de Barra do Piraí.	84
Tabela 18. Produção e valores gerados para o município de Angra dos Reis.....	85
Tabela 19. Valores de produção e previsões para o município do Rio de Janeiro.	87
Tabela 20. Valores de produção e previsões para o município de Barra do Piraí.....	88
Tabela 21. Valores de produção e previsões para o município de Rio Bonito.....	88
Tabela 22. Produção e valores gerados para o município de Barra do Piraí.	89
Tabela 23. Parâmetros gerados pelos dados gedanken – Conjuntos g1 a g18.....	101
Tabela 24. Parâmetros gerados pelos dados gedanken – Conjuntos g19 a g36.....	103
Tabela 25. Parâmetros gerados pelos dados gedanken – Conjuntos g37 a g54.....	105
Tabela 26. Parâmetros gerados pelos dados gedanken – Conjuntos g55 a g73.....	108
Tabela 27. Dados dos ajustes referentes ao município de Carmo.	113
Tabela 28. Dados dos ajustes referentes ao município de São José do Vale do Rio Preto. ..	114
Tabela 29. Dados de ajuste dos modelos para o município de Varre-Sai.	115
Tabela 30. Dados sócio-econômicos dos municípios estudados (Estado: RJ).	118

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	4
2.1. Modelos Matemáticos e Crescimento Econômico: Aspectos Históricos e Exemplos....	4
2.1.1. O modelo básico de Solow.....	5
2.1.2. O modelo de Solow com tecnologia	10
2.1.3. O modelo de Solow com capital humano e o modelo de Lucas para o crescimento de longo prazo	14
2.2. Os Algoritmos Heurísticos.....	17
2.2.1. Simulated Annealing.....	18
2.2.2. Redes neurais artificiais	21
2.2.3. Algoritmos genéticos	23
2.3. Os Algoritmos não Heurísticos.....	25
2.3.1. Algoritmos de otimização sem restrição e baseados em gradiente: métodos de procura unidimensional.....	26
2.3.2. Método de Newton e variações	26
2.3.3. Os métodos de máximadescida e do gradiente conjugado.....	27
2.3.4. Algoritmos de otimização sem restrição e baseados em gradiente: métodos baseados em região de confiança	31
2.3.5. Métodos de otimização com restrição e baseados em gradiente.....	33
2.3.6. Métodos de otimização não baseados em gradiente ou livres de derivadas	34
2.3.7. Pontos fracos dos algoritmos não baseados em gradiente	35
2.3.8. Alguns tipos de algoritmos que são livres de derivadas	36
2.4. Estimativa de Parâmetros.....	39
2.5. Estimativa de Parâmetros e Quadrados Mínimos	40
2.6. A Produção Apícola no Brasil: breve histórico e problemas de produtividade.....	44
2.7. A produção de Mel no Estado do Rio de Janeiro: Contexto e Situação Atual	46
3. MATERIAIS E MÉTODOS.....	49
3.1. Construção do Modelo Matemático.....	52
3.2. Validação dos Modelos.....	57
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	60
4.1. Resultados Preliminares.....	60
4.2. O Algoritmo do Gradiente Conjugado não Linear	60
4.3. Resultados Obtidos com o Software BOBYQA	63
4.4. Municípios por Microrregião: Resultados Obtidos	64
4.4.1. Estimativa de colheita em períodos de safra.....	86
4.4.2. Algumas previsões feitas pelos modelos e breves comentários.....	87
4.4.3. Estudo preliminar: ajuste dos modelos para períodos de tempo maiores	88
5. CONCLUSÕES	91

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	93
7. ANEXOS	100

1. INTRODUÇÃO

Segundo Almeida e Sobral (2009, p. 12 e ss.), a apicultura requer baixo investimento inicial e traz lucratividade razoável. Isso ocorre quando há, como no caso brasileiro, condições climáticas favoráveis e riqueza da biodiversidade, fatores que, em conjunto, favorecem a atividade. Por outro lado, as abelhas africanizadas são altamente resistentes a doenças e pragas, e são capazes de alta produtividade no que diz respeito ao mel, principal produto apícola.

As razões recém-apontadas sugerem que a atividade apícola pode ser uma boa fonte de renda, exclusiva ou complementar, para o pequeno e médio produtor rural. Essa percepção é reforçada pelo fato de que o apicultor não precisa ser dono da propriedade na qual deseja desenvolver a atividade. Por ser uma atividade que não degrada o meio ambiente, a apicultura poderá ser desenvolvida em uma propriedade de terceiros sem causar nenhum dano, mesmo que seja uma área de conservação ambiental (ALMEIDA e SOBRAL, 2009).

Sob o ponto de vista do potencial de sustentabilidade econômica, Resende (2010, p. 3) aponta que, atualmente, o Brasil explora apenas 10% de seu pasto apícola. Somente com a porção do pasto apícola constituída de florada silvestre, a produção de mel poderia ser de 200 mil toneladas. Além disso, a cadeia produtiva ligada à produção apícola gera, como já visto, 450 mil ocupações diretas no campo e 16 mil empregos diretos no setor industrial, sendo 9 mil no setor de processamento (entrepósitos) e 7 mil na indústria de insumos (máquinas e equipamentos). Esses dados mostram o potencial de crescimento da atividade apícola no país, podendo ser uma real fonte de renda e emprego para aqueles que a ela se dedicarem.

Os fatores apontados sugerem que a apicultura é uma atividade socialmente sustentável. Essa percepção é reforçada pelo fato de que a atividade apícola não demanda alto investimento em tecnologia para ser iniciado, pois é desenvolvida pelas abelhas de modo natural. Além disso, temos no Brasil um pasto apícola bastante diversificado e condições de clima que favorecem essa atividade. Mais ainda, as abelhas africanizadas estão perfeitamente adaptadas à variedade de nossos ecossistemas. Segundo a Confederação Brasileira de Apicultura (2014), as diversas etapas da produção apícola podem gerar 450 mil empregos diretos somente no campo.

Outro aspecto da apicultura é sua relevância em termos ambientais, pois é uma atividade que depende essencialmente da manutenção da variedade das floradas de plantas poliníferas e nectaríferas para se desenvolver. Essas floradas devem estar disponíveis o ano todo e em quantidade suficiente para uma produção apícola consistente. Além disso, apiários devem estar próximos de fontes de água, a qual deve ser limpa e estar à disposição durante todo o ano. A água é importante para a manutenção fisiológica das abelhas, como também para o equilíbrio térmico dos enxames. Por outro lado, os enxames devem estar a uma distância de dois quilômetros ou mais de fontes de substâncias tóxicas, de indústrias, de aterros sanitários, de rodovias, estas últimas devido à poluição (EMBRAPA, 2010).

Aspecto importante da sustentabilidade ambiental da apicultura é que as abelhas são um dos principais agentes polinizadores. A polinização consiste no processo de transferência do pólen da flor de uma planta para outra flor da mesma planta, ou de outra planta. Por meio desse processo adaptativo entre o agente polinizador e os vegetais, garante-se a manutenção da diversidade destes últimos, seu maior vigor e aumento na produção de frutos e sementes (GOLINSKY, 2009, p. 11).

No contexto brasileiro, o setor apícola conta com a conjugação de esforços de universidades, governo, técnicos, apicultores e setor privado. Hoje, temos cursos de formação de apicultores, em que o produtor aprende desde técnicas de manejo até produção e extração racional de mel, própolis e outros produtos. Todo o maquinário necessário ao beneficiamento do mel, muitos com alto nível tecnológico, é produzido em âmbito nacional. Também são produzidos no Brasil os equipamentos necessários ao manejo das colmeias.

Segundo Souza (2006, p. 50), a condição semiamadora da produção apícola começou a mudar a partir da década de 1990, quando ocorreu a profissionalização da apicultura no Brasil. Esse processo decorreu do surgimento de produtos inovadores, como o spray de própolis e ervas e os méis compostos. Esses produtos exigiam maiores investimentos e inserção de tecnologia na linha de produção.

A pesquisa ligada à apicultura foi alavancada a partir de 1991, com a criação do primeiro curso de Pós-Graduação na área. De acordo com Gonçalves (2006), são variadas as linhas de investigação, que têm como objeto desde técnicas de manejo até a biologia das abelhas. O autor põe em destaque os trabalhos da equipe da USP de Ribeirão Preto sobre genética, melhoramento e diversas modalidades de comportamento das abelhas: agressivo, higiênico, forrageiro, enxameatório¹ etc. São também mencionados trabalhos que envolvem pesquisas sobre o genoma das abelhas. Além disso, já existe um número significativo de artigos científicos, monografias, dissertações de mestrado e teses de doutorado abordando a área apícola. Cabe ressaltar os encontros de caráter técnico-científico sobre apicultura que são realizados em níveis nacional e regional. Em nível nacional, destacam-se os Congressos Brasileiros de Apicultura – o vigésimo foi realizado em Belém do Pará, no mês de novembro de 2014.

Apesar de toda essa base de conhecimento construída ao longo do tempo, diversos trabalhos científicos têm destacado a baixa produtividade da apicultura brasileira, em particular na produção de mel. Como razões para o baixo desempenho, apontam-se: manejo inadequado; localização do apiário em regiões que oferecem condições adversas de sobrevivência aos enxames; e alimentação insuficiente em épocas de menor floração. Sob o ponto de vista do empreendimento, afetam a produtividade: o baixo nível de assistência técnica recebida; o baixo nível de escolaridade dos apicultores; o baixo nível de capital social na formação do empreendimento; e a dificuldade de acesso ao crédito (KHAN, MATOS e LIMA, 2009; LORENZÓN et al., 2012; GOLINSKY, 2009).

De acordo com o que foi exposto anteriormente, a apicultura é uma atividade produtiva sustentável do ponto de vista econômico e ambiental. Em consequência, apresenta o potencial efetivo de melhora da qualidade de vida do pequeno produtor, pois lhe fornece condições favoráveis de trabalho e renda. Além disso, contribui para sua permanência no campo, por poder lhe dar condições de vida dignas em um meio ambiente que, necessariamente, deverá estar preservado. Portanto, a atividade apícola deve ser objeto de ações que lhe permitam o máximo desenvolvimento possível.

Nesse contexto, a principal contribuição deste trabalho se situa na área de Tecnologias de Gestão. No caso, serão fornecidos ao gestor do agronegócio apícola meios para que tenha acesso a informações que lhe permitam vislumbrar o horizonte de um empreendimento. Dessa forma, ele terá condições de tomar decisões que lhe permitam sugerir mudanças de rumo ou incrementar e aperfeiçoar ações em andamento.

Este estudo tem por objetivo desenvolver um software que permita avaliar e prever a produção de mel de determinada localidade, por certo período de tempo. Esse software tem

¹Enxameação é um processo natural de reprodução das abelhas melíferas. Nesse processo, há formação de uma nova rainha, sendo que metade das abelhas sai da colmeia com a rainha antiga.

como base modelos matemáticos baseados em equações diferenciais ordinárias. Esse é um dos aspectos inovadores do presente trabalho, pois não há notícia do emprego de modelos matemáticos desse tipo na descrição da produção de mel, por certo período de tempo. Um outro aspecto inovador é que, a partir desses modelos, nesse mesmo intervalo de tempo, poderá ser determinado o índice de tecnologia de uma determinada localidade. Esse índice de tecnologia poderá ser um instrumento útil ao gestor, no sentido de tomadas de decisões ligadas à produtividade no agronegócio apícola. Importante frisar que esse índice de tecnologia é calculado a partir de um conjunto de dados bem menor que os usualmente utilizados por técnicas estatísticas. Além do mais, os modelos utilizados são de caráter geral, podendo ser empregados para a análise do cultivo de produtos distintos do mel.

Os modelos matemáticos aqui desenvolvidos e que dão sustentação às possíveis avaliações e vislumbres do horizonte produtivo derivam do modelo macroeconômico de Lucas para crescimento econômico. Dois de seus elementos básicos são a tecnologia e o capital humano: a tecnologia é considerada um fator exógeno à produção, sendo conceituada como todo conhecimento útil acumulado pela humanidade. Já o capital humano é o nível geral de habilidades da mão de obra disponível. Outro ponto importante a frisar é que os modelos derivados neste trabalho são todos desenvolvidos do ponto de vista da oferta.

O modelo de Lucas apresenta aspectos importantes, tanto do ponto de vista econômico como matemático, que levaram à sua escolha como ponto de partida para os modelos desenvolvidos neste trabalho. Esses aspectos serão discutidos, sem maior profundidade, nos subitens 2.1. e 2.1.3. (Revisão de Literatura).

Sob o ponto de vista metodológico, a exposição da presente pesquisa não se prende apenas à mera apresentação de resultados. O que se pretendeu aqui foi o delineamento de todo o processo intelectual que levou a esses resultados. Assim, várias elaborações mais elementares estão presentes, assim como algumas idas e vindas que são típicas de um desenvolvimento intelectual mais complexo.

No item 2 será feita uma breve digressão sobre a aplicação dos modelos matemáticos em Economia. Como exemplo desse tipo de aplicação será dado especial destaque ao modelo de Solow para o crescimento econômico de longo prazo. Esse modelo serviu como base ao Modelo de Lucas, cujas equações serviram como base para os modelos desenvolvidos no presente trabalho. Ainda nesse capítulo, será feita uma discussão a respeito dos tipos de algoritmos que poderiam servir, em princípio, como solvers dos modelos aqui desenvolvidos – entre eles será apresentado o algoritmo que efetivamente foi aqui utilizado. Por último, é feita a apresentação do Método dos Quadrados Mínimos não linear, empregado neste trabalho, assim como é discutida sucintamente a situação da apicultura no país, em particular, no Rio de Janeiro.

Tendo sido exposta a base teórica para o desenvolvimento do trabalho no item 2, no item 3 são construídos os modelos matemáticos desenvolvidos neste trabalho, assim como é apresentada a estrutura dos algoritmos utilizados para resolvê-los. O método de validação dos modelos também é detalhado.

No item 4 serão apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir dos modelos desenvolvidos. Também serão discutidos alguns resultados preliminares obtidos quando do estudo das possíveis modalidades de algoritmo a serem utilizadas no trabalho.

Para finalizar, no item 5 serão colocadas as conclusões da pesquisa, juntamente com as perspectivas abertas pela mesma para futuros trabalhos.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1. Modelos Matemáticos e Crescimento Econômico: Aspectos Históricos e Exemplos

Já faz alguns séculos que os modelos matemáticos têm sido utilizados nas ciências naturais como ferramentas para a compreensão do comportamento de parcelas do mundo físico. De acordo com Lawson (2013, p. 973), desde a época do Iluminismo tem-se empregado a modelagem matemática em Economia. Contudo, até pelo menos início do século XX, os modelos construídos sofriam sérias restrições, por terem de se adequar aos paradigmas das ciências naturais, devendo a descrição dos fenômenos econômicos seguir de perto as leis da mecânica newtoniana. O Cálculo Infinitesimal deveria ser a ferramenta mais adequada para essas leis. Para muitos pesquisadores das ciências exatas, haveria sérios problemas ao se tentarem descrições de fatos econômicos, que são essencialmente fenômenos sociais, através de modelagem matemática.

Ainda segundo Lawson (2013), foi por volta do começo do século XX que a Economia pôde ser libertada dos grilhões que a atavam à visão de um mundo regido pelas leis da Mecânica, às quais as diversas ciências deveriam ser submetidas. Foi nesse período que se criou a Mecânica Quântica, com o desenvolvimento dos primórdios da Teoria da Relatividade. A natureza já não poderia mais ser descrita como um *continuum* que funciona com base nas leis da física. Além disso, o Cálculo passou a ser considerado insuficiente como ferramenta para descrever a realidade que nos envolve. Com David Hilbert e o método axiomático, a Matemática ficou estabelecida como ciência independente, não devendo mais seu desenvolvimento às ciências naturais. Portanto, dentro desse ambiente intelectual, a Economia ficou livre das peias das metáforas mecânicas para desenvolver seus modelos.

O modelo de Lucas (LUCAS, 1988), do qual foi derivado os instrumentos desenvolvidos neste trabalho, teve como inspiração a atmosfera intelectual do início do século passado. Foi nesse período que as ciências matemáticas tiveram suas diversas áreas rigorosamente fundamentadas. A base dessa fundamentação foi o método axiomático, que, aplicado à Economia, funcionaria mais ou menos da seguinte forma: são estabelecidas verdades primeiras sobre uma economia abstrata e tenta-se, a partir desses princípios, a dedução de equações que permitam descrever propriedades ligadas ao crescimento dessa economia ao longo do tempo. As palavras do próprio autor dão um *insight* sobre seu ponto de vista:

Isto é o que quero dizer por ‘mecânica’ do desenvolvimento econômico – a construção de um mundo mecânico, artificial, ocupado por uma população de robôs em interação, tipicamente estudada pela Economia, e que apresenta um comportamento cujas propriedades aproximam, de modo grosseiro, aquelas do mundo real (LUCAS, 1988, p. 5, tradução nossa).

O modelo de Lucas teve como um de seus principais precursores o modelo de Solow (SOLOW, 1956). Este último foi uma das principais contribuições para explicar o crescimento de longo prazo dos diversos países. Fatores importantes como a tecnologia foram apontados como sustentáculos dessa modalidade de crescimento.

2.1.1. O modelobásico de Solow

O modelo de Solow surgiu como uma crítica ao modelo de Harrod-Domar (HARROD, 1937; DOMAR, 1946), que foi o primeiro proposto para descrever o crescimento econômico de longo prazo. A grande questão a que o modelo tentava responder era a seguinte: sob que condições uma economia poderia operar com capacidade produtiva total e a pleno emprego? (HAGEMANN, 2009, p. 67).

Solow (1956, p. 65) faz uma crítica ao modelo de Harrod-Domar, em que ele descreve o equilíbrio instável do crescimento de uma economia de longo prazo. Para esse autor, tal instabilidade é mantida pela exigência de taxas constantes de poupança, de capital por unidade de produção e de crescimento da mão de obra. Um pequeno desvio desse núcleo de equilíbrio instável levaria a desemprego crescente ou a períodos prolongados de inflação. No mundo real, as economias não seriam assim tão instáveis.

Algumas outras questões preocupavam os estudiosos do crescimento de longo prazo. Uma delas relaciona-se à renda *per capita* dos diversos países: os países mais ricos têm uma renda *per capita* várias vezes maior que a dos países mais pobres. Em alguns casos, a renda *per capita* destes últimos chega a ser inferior a 5% da renda dos países mais ricos. Por outro lado, pode acontecer uma mudança substantiva desses números ao longo do tempo, por exemplo: a Índia tinha, em 1960, um PIB por trabalhador da ordem de 5% do PIB americano, também tomado em relação ao número de trabalhadores. Em 2008, esse indicador era superior a 9% (JONES e VOLLRATH, 2015, p. 6 e ss.).

Outra questão está relacionada à diversidade das taxas de crescimento dos diversos países. Um exemplo é a taxa de crescimento dos países recém-industrializados como HongKong, Cingapura, Taiwan e Coreia do Sul. Esses países apresentaram uma taxa anual média de crescimento, no período de 1960-2008, superior à de países considerados ricos, como Estados Unidos e Japão. Os assim chamados Tigres Asiáticos podem ser considerados, segundo Jones e Vollrath (2015, p. 7 e ss.), milagres de desenvolvimento. Por outro lado, Venezuela, Madagascar e Zimbábue tiveram taxas negativas de crescimento anual no mesmo período.

Um terceiro ponto importante refere-se a uma tendência de longo prazo das economias. Elas tendem ao que se convencionou chamar de estado estacionário: nesse estado, permanecem constantes diversas taxas atinentes ao crescimento econômico, tais como a de participação do capital e do trabalho no PIB. Mais ainda, a taxa de crescimento ao longo do tempo permanece constante (JONES e VOLLRATH, 2015, p. 12).

Os pressupostos do modelo de Solow são os seguintes (IRGOIN, 2011, p. 32-33):

- O mercado produz apenas um bem.²
- Contrariamente ao modelo de Harrod-Domar, o capital e a força de trabalho são grandezas intercambiáveis, ou seja, podem coexistir em proporções variáveis.
- Há uma razão constante de crescimento da força de trabalho.
- Existe concorrência perfeita.
- O nível de poupança da economia é função da renda nacional, dependendo também da propensão marginal a poupar.³

²No caso da produção de apenas um item, está eliminada a possibilidade de comércio exterior, pois não há nenhum bem diferente do produzido com o qual seja possível efetuar a troca (JONES, 1997, p. 19).

³ A propensão marginal a poupar mede quanto uma população está disposta a poupar, mediante a renda auferida.

A partir desses pressupostos, é definida uma função de produção dada por:

$$Y = P(K(t), L(t)), \quad (2.1)$$

em que Y é a produção em determinado instante t , sendo os fatores de produção $K(t)$ e $L(t)$ o capital físico e a mão de obra disponíveis nesse mesmo instante, respectivamente. É importante ressaltar que o capital físico K representa a infraestrutura física empregada na produção, como prédios, maquinário, veículos, ferramentas etc.

Outro pressuposto importante da função de produção (2.1) é que tem retornos constantes de escala. Isso significa que, se tanto o capital quanto a força de trabalho disponíveis são multiplicados por um fator $c \geq 0$, a produção fica multiplicada por esse mesmo fator. Em símbolos:

$$P(cK, cL) = cP(K, L) = cY, \quad (2.2)$$

em que a variável t foi omitida por simplicidade de notação. O mesmo procedimento será adotado daqui em diante.

No modelo de Solow, supõe-se um mercado de concorrência perfeita, no qual nenhuma firma tem o poder de influenciar o preço de mercado. O preço só é definido pelo equilíbrio entre oferta e demanda. Suponha que cada trabalhador receba um salário w a cada unidade de trabalho, sendo o capital remunerado à taxa r por unidade de capital durante certo período. Se a unidade de preço é definida como a unidade de produção, o lucro de uma firma será maximizado pela solução do seguinte problema de otimização:

$$\max_{K,L} P(K, L) - wL - rK, \quad (2.3)$$

ou seja, o lucro máximo será obtido quando, da produção máxima, for descontado o preço dos insumos (JONES e VOLLRATH, 2015, p. 19).

Quando a função de produção tiver retornos constantes de escala, pode-se provar que o lucro de uma firma será nulo (VARIAN, 2012, p. 377).

O trabalho de Solow teve por objetivo explicar o crescimento econômico de diferentes países. Como forma de ser feita uma comparação mais consistente entre esses crescimentos, o

autor trabalhou com os fatores de produção $k = \frac{K}{L}$ e $y = \frac{Y}{L}$, que são o estoque de capital *per capita* e a produção *per capita*, nessa ordem.

Se os dois membros de (2.1) forem divididos por L , será obtida a seguinte igualdade:

$$y = \frac{Y}{L} = P\left(\frac{K}{L}, 1\right) = P(k, 1) = f(k). \quad (2.4)$$

Diz-se que a função de produção P , reescrita na forma apresentada em (2.4), está na *forma intensiva*. Além disso, são formuladas as seguintes hipóteses adicionais sobre a função f :

$$f(0) = 0, f'(k) > 0 \text{ e } f''(k) < 0. \quad (2.5)$$

Mais ainda, f deve satisfazer as condições de Inada:

$$\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0, \quad (2.6)$$

em que $f'(\bullet)$ e $f''(\bullet)$ representam as derivadas primeira e segunda em relação ao capital. No caso, a primeira condição de Inada significa que, para valores de capital próximos de zero, o produto marginal em relação ao capital é muito grande. Já a segunda condição impõe que, para valores muito grandes de capital, o produto marginal em relação ao capital é quase nulo. Isso significa que a função f tem retornos decrescentes de capital (ROMER, 2012, p. 12).

De acordo com Romer (2012, p.14), a condição de equilíbrio macroeconômico impõe a igualdade entre o volume de investimentos e o volume de poupança. Dessa forma:

$$sY = I, \quad (2.7)$$

em que I representa o volume de investimentos e $0 < s < 1$ é a taxa de investimento. Como é sabido, $Y = P(K, L)$. Se forem feitas as hipóteses adicionais de que cada unidade de investimento propicia uma unidade de capital novo e que o capital seja depreciado a uma taxa constante $\delta > 0$, a seguinte igualdade fica estabelecida:

$$sP(K, L) - \delta K = \dot{K}. \quad (2.8)$$

Dividindo por L os dois Membros de (2.8), a seguinte igualdade é obtida:

$$sf(k) - \delta k = sP\left(\frac{K}{L}, 1\right) - \delta \frac{K}{L} = \frac{\dot{K}}{L}. \quad (2.9)$$

Ora, como $k = \frac{K}{L}$, derivando ambos os membros dessa igualdade em relação a t :

$$\dot{k} = \frac{\dot{\left(\frac{K}{L}\right)}}{\left(\frac{K}{L}\right)} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L} \frac{\dot{L}}{L} = sf(k) - \delta k - nk, \quad (2.10)$$

onde, por hipótese, $\frac{\dot{L}}{L} = n$. Portanto, a equação fundamental do modelo básico de Solow é a seguinte:

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k. \quad (2.11)$$

Um breve raciocínio heurístico pode aclarar algumas propriedades importantes. Dividindo ambos os membros de (2.11) por k , a seguinte igualdade é obtida:

$$\frac{\dot{k}}{k} = s \frac{f(k)}{k} - (n + \delta). \quad (2.12)$$

Ora, $\frac{f(k)}{k} = \frac{f(k) - f(0)}{k - 0}$ é a inclinação da secante r ao gráfico da Figura 1, passando pelos pontos $(k, f(k))$ e $(0, 0)$ (veja figura a seguir).

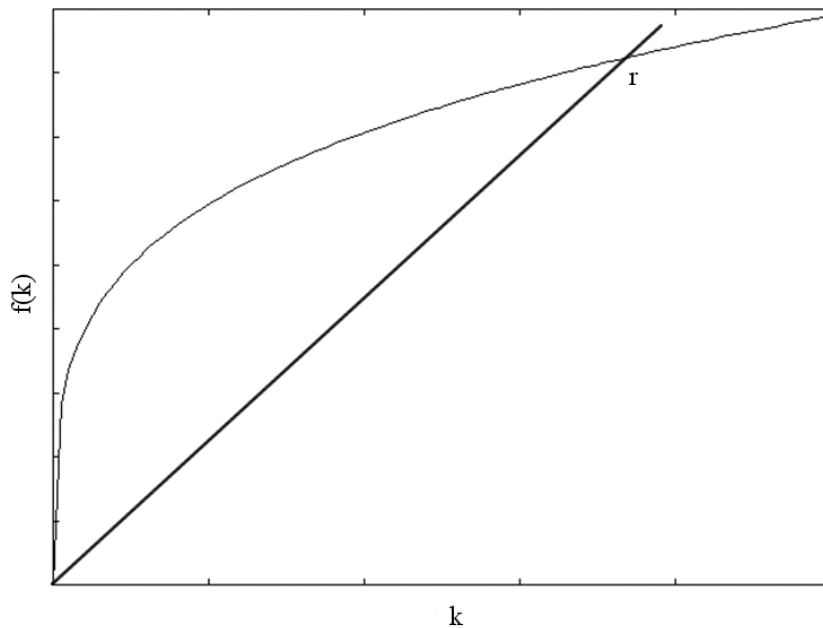


Figura 1. A função de produção na forma intensiva.

Como a função f tem retornos decrescentes de capital (Figura 1), a inclinação da secante r tende a ficar cada vez menor à medida que cresce o valor de k . Ora, se $k = k^*$ for o valor de k para o qual $s \frac{f(k)}{k} - (n + \delta) = 0$ (veja a Figura 2), valem as seguintes possibilidades:

- Se $k = k^*$ vale que $\frac{\dot{k}}{k} = 0$, ou seja, $\dot{k} = 0$. Isso significa que o capital *per capita* é mantido constante (estado estacionário).

- Se $k < k^*$, o valor da inclinação da secante r pode ser considerado suficientemente grande para que se tenha $s \frac{f(k)}{k} - (n + \delta) > 0$, ou seja, $\frac{\dot{k}}{k} > 0$. Dessa forma $\dot{k} > 0$, o que

significa que há um crescimento da economia, pois o capital *per capita* aumenta até que se atinja o estado de equilíbrio, no qual o capital *per capita* é mantido constante.

- Se o capital per capita for suficientemente grande, de sorte que $k > k^*$, o valor da inclinação de r torna-se bem pequeno, de modo que se tenha $s \frac{f(k)}{k} - (n + \delta) < 0$, ou seja,

$\frac{\dot{k}}{k} < 0$. Portanto, passa a valer que $\dot{k} < 0$, ou seja, o capital *per capita* passa a decrescer. É preciso haver aumento no nível de investimento para que a economia volte ao estado de equilíbrio.

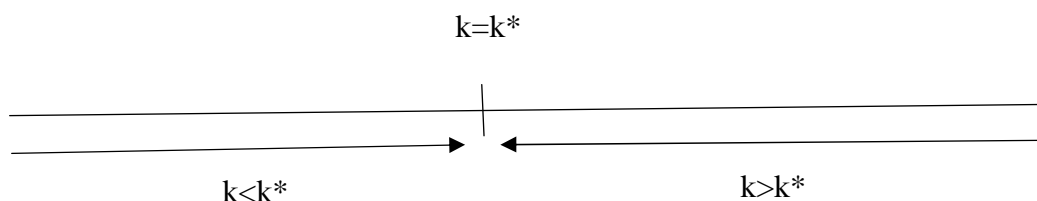


Figura 2. Economia tendendo ao estado de equilíbrio.

Para efeito de ilustração de algumas propriedades do estado estacionário, passa-se a assumir que a função de produção (2.1) é uma função de Cobb-Douglas⁴, podendo ser escrita da seguinte forma (JONES e VOLLRATH, 2015, p. 27 e ss.):

$$Y = P(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}, 0 < \alpha < 1. \quad (2.13)$$

Ora, se $y = \frac{Y}{L}$ e $k = \frac{K}{L}$ como antes, se os dois membros de (2.13) forem divididos por L , a igualdade pode ser reescrita como:

$$y = k^\alpha. \quad (2.14)$$

Como no estado estacionário vale que $\dot{k} = 0$, ao se substituir (2.14) em (2.11), vale que:

$$s(k^*)^\alpha - (n + \delta)k^* = 0, \quad (2.15)$$

em que k^* é o capital *per capita* no estado estacionário.

⁴ A função, hoje conhecida como de Cobb-Douglas, já fora empregada em trabalhos anteriores de Economia como instrumento de análise. Ele passou a ser mais conhecida entre os economistas a partir do trabalho de Paul Douglas e Charles Cobb de 1928, intitulado “A Theory of Production”, publicado no *American Economical Review*. Nesse trabalho, a partir de dados empíricos sobre a economia americana, o objetivo era estabelecer a relação como os fatores de produção, capital físico e trabalho, influenciavam na produção industrial daquele país. (BIDDLE, J., 2012, p. 223-225).

Ao se dividirem ambos os membros de (2.15) por k^* e transpondo-se a parcela que contém $n + \delta$ para o segundo membro, passa a valer a seguinte igualdade:

$$(k^*)^{\alpha-1} = \frac{n + \delta}{s}. \quad (2.16)$$

De (2.16) é obtido o seguinte valor para k^* :

$$k^* = \left(\frac{n + \delta}{s} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.17)$$

Quando (2.17) é substituída em (2.14), obtém-se o valor da produção *per capita* no estado estacionário, que é:

$$y^* = \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (2.18)$$

Note que (2.18) permite concluir que, quanto maior for o nível de poupança (investimento) s de um país, maior será o produto disponível de capital por trabalhador. Isso implica que maior será o produto por trabalhador e, portanto, mais rico será o país. Por outro lado, a mesma equação (2.18) permite concluir que, quanto maior for a taxa de crescimento populacional n de um país, mais pobre esse país tenderá a ser. Isso ocorre porque deverá haver aumento do investimento apenas para manter o nível do capital *per capita*. Dessa forma, haverá redução do nível de acumulação do capital *per capita* ou por trabalhador. É importante notar que essas previsões do modelo de Solow foram empiricamente confirmadas.

De acordo com o raciocínio heurístico desenvolvido a partir da equação (2.12), pode-se concluir que o modelo de Solow não permite prever o crescimento sustentado das economias. De acordo com esse modelo, haveria crescimento da renda *per capita* até o ponto de equilíbrio estacionário. A partir de então, eventual aumento da renda *per capita* não duraria muito, pois haveria um decréscimo, retornando ao ponto de equilíbrio estacionário.

Fica, então, a seguinte pergunta: como explicar o fato empírico de que as economias apresentam crescimento da renda *per capita*? A que fatores atribuir possível crescimento de longo prazo de uma economia? De acordo com Silva (2008, p. 34), o modelo não dispõe de mecanismos próprios que permitam explicar o aumento de produtividade a partir de um mesmo nível de insumos. Dessa forma, é preciso acrescentar a ele um fator exógeno que dê conta dessa situação. Esse fator seria o progresso tecnológico ou nível de tecnologia.

2.1.2. O modelo de Solow com tecnologia

De acordo com Jones e Vollrath (2015):

(...) o progresso tecnológico é *exógeno*: usando-se uma expressão corriqueira, a tecnologia é como o ‘maná que cai do céu’, no sentido que surge automaticamente na economia, sem levar em consideração outros acontecimentos que estejam afetando a economia (JONES e VOLLRATH, 2015, p. 31 e 32, grifo do autor).

Daqui em diante, será este o conceito de tecnologia utilizado: um fator exógeno, ou seja, independente dos fatores de produção de uma economia, que permitirá o aumento da produtividade. Pode-se interpretá-lo também como o conhecimento útil acumulado pela humanidade, partilhável por todos (LUCAS, 1988, p. 15).

O modelo de Solow com tecnologia é trabalhado a partir de uma função de produção dada por:

$$Y(t) = P(K(t), A(t)L(t)), \quad (2.19)$$

em que K e L são o capital físico e a mão de obra disponíveis na economia, nessa ordem. O fator $A = A(t) > 0$ representa o nível tecnológico da economia, sendo o produto AL denominado trabalho efetivo. A função de produção P é dita neutra no sentido de Harrod, reunindo os mesmos pressupostos da função análoga definida em (2.1.1) (ROMER, 2012, p. 10 e ss.).

Supõe-se que o nível tecnológico da economia cresce a uma taxa constante g . Assim:

$$\dot{A} = gA. \quad (2.20)$$

Como a função de produção P apresenta retornos constantes de escala, ao se dividirem ambos os membros de (2.20) por AL , é obtida a função de produção na forma intensiva:

$$\tilde{y} = \frac{Y}{AL} = P\left(\frac{K}{AL}, 1\right) = f_A(\tilde{k}), \quad (2.21)$$

em que $\tilde{y} = \frac{Y}{AL}$ é a produção por unidade de trabalho efetivo e $\tilde{k} = \frac{K}{AL}$ é o capital por unidade de trabalho efetivo. A função f_A tem as mesmas propriedades da função f em (2.1.1).

Com raciocínio inteiramente análogo ao feito em (2.1.1), obtém-se a equação fundamental do modelo de Solow com tecnologia:

$$\dot{\tilde{k}} = sf_A(\tilde{k}) - (n + g + \delta)\tilde{k}, \quad (2.22)$$

em que s , n e δ recebem as mesmas interpretações que anteriormente.

A análise feita em (2.1.1) para a tendência da economia, a fim de convergir ao seu estado estacionário, pode ser transposta quase literalmente para o modelo presente: supondo novamente que a função de produção (2.19) é uma função de Cobb-Douglas, ela pode ser reescrita da seguinte forma:

$$Y = P(K, AL) = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}, 0 < \alpha < 1. \quad (2.23)$$

Se os dois membros de (2.23) forem divididos por AL , ao se efetuar a substituição de $\frac{K}{AL}$ por \tilde{k} e $\frac{Y}{AL}$ por \tilde{y} , será obtida a seguinte igualdade (JONES e VOLLRATH, 2015, p. 33 e ss.):

$$\tilde{y} = \tilde{k}^\alpha = f_A(\tilde{k}), \quad (2.24)$$

Ora, como no estado estacionário vale que $\dot{\tilde{k}} = 0$, ao substituir esse valor em (2.22), juntamente com a expressão de f_A de (2.24), obtém-se a seguinte igualdade:

$$s\tilde{k}^{*\alpha} - (n + g + \delta)\tilde{k}^* = 0,$$

o que significa que:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.25)$$

Ao substituir (2.25) em (2.24), o seguinte valor para \tilde{y}^* é obtido:

$$\tilde{y}^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (2.26)$$

Ora, como $\tilde{y}^* = \frac{Y}{AL} = \frac{y}{A}$, a expressão (2.26) em termos do produto por trabalhador pode ser reescrita como:

$$y = A(t) \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (2.27)$$

A igualdade (2.27) leva à conclusão de que o produto *per capita* é determinado pelo índice de tecnologia no instante t , $A(t)$, pelo nível de investimento e pelo crescimento populacional. No estado estacionário, a taxa de crescimento do produto por trabalhador é a mesma taxa de crescimento do nível de tecnologia.

A influência da tecnologia no crescimento está ligada a um aumento de produtividade. Esse aumento específico de produtividade está relacionado ao que foi convencionalmente chamado “crescimento da produtividade total dos fatores”. Para entender esse ponto um pouco melhor, basta postular, com Jones e Vollrath (2015, p. 39), que a função de produção seja de Cobb-Douglas, assumindo a seguinte forma:

$$Y = BK^\alpha L^{1-\alpha}, \quad (2.28)$$

em que Y , K e L são como antes e B é um termo de produtividade. Se for tomado o logaritmo dos dois membros de (2.28), derivando-se os dois membros da igualdade transformada, obtém-se o seguinte:

$$\dot{\log Y} = \alpha \dot{\log K} + (1 - \alpha) \dot{\log L} + \dot{\log B}, \quad (2.29)$$

ou seja:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1 - \alpha) \frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{B}}{B}. \quad (2.30)$$

A taxa de variação $\frac{\dot{B}}{B}$ é que é definida como o crescimento total da produtividade dos fatores ou o crescimento da produtividade multifatorial.

Se for observado que $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{\left(\frac{Y}{L}\right)}}{\frac{Y}{L}} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L}$, ao ser subtraído $\frac{\dot{L}}{L}$ dos dois membros de

(2.30), o seguinte resultado fica estabelecido, lembrando que $k = \frac{K}{L}$:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \alpha \frac{\dot{k}}{k} + \frac{\dot{B}}{B}. \quad (2.31)$$

As equações (2.30) e (2.31) encontram respaldo em dados empíricos (JONES e VOLLRATH, 2015, p. 40 e ss.):

- De 1948 a 2010, os Estados Unidos tiveram metade de seu crescimento respaldado na variação do capital por hora trabalhada e da composição da mão de obra. A outra metade deveu-se à produtividade total dos fatores.
- Os Tigres Asiáticos (Coreia do Sul, Cingapura, Hong Kong e Taiwan) apresentaram alta taxa de crescimento do produto por trabalhador. Isso se deveu ao crescimento do investimento em capital físico e educação. Além disso, houve aumento da força de trabalho e transição da agricultura para a indústria.

O modelo de Solow com tecnologia permite concluir que variações no crescimento de uma economia podem ser atribuídas ao capital *per capita* ou ao crescimento tecnológico em determinado momento. Somente o nível tecnológico pode responder por um crescimento sustentado de longo prazo. A influência do capital *per capita* seria negligenciável⁵ (ROMER, 2012, p. 27).

A tecnologia no modelo de Solow seria algo etéreo, sendo utilizada no modelo sem nenhuma preocupação com seus determinantes. Romer (2012, p. 29 e ss.) também destaca a problemática da tecnologia ao questionar o porquê de empresas de certos países terem acesso a mais conhecimento (tecnologia) que a de outros. Mais ainda, o autor questiona por que

⁵ A pouca influência do capital *per capita* no crescimento deve-se ao fato de seu nível depender da taxa de poupança pois, no Modelo de Solow, o nível de poupança é igual ao nível de investimento. No caso, não há como garantir um crescimento sustentável de longo prazo da poupança. No limite, a taxa de poupança chegaria a 100%, o que não ocorre na prática.

demora para que esse conhecimento seja transmitido de um país a outro, notadamente para os países mais pobres.

Sobre a importância do capital no crescimento econômico de longo prazo, uma questão importante pode ser levantada: é bem verdade que apenas o aumento do capital físico não dá sustentação ao crescimento econômico, segundo o modelo de Solow. Por outro lado, o aumento de capital pode ter implicações que vão além da infraestrutura física da produção, ou seja, o capital pode ter externalidades positivas com implicações importantes para o crescimento (ROMER, 2012, p. 30).

Os dois últimos parágrafos apontam para a necessidade de um aprofundamento na problemática do crescimento de longo prazo: como foi visto, o modelo de Solow classifica a tecnologia como o fator que dá sustentação a esse crescimento. Por outro lado, segundo Lucas (1988, p. 15), dar total destaque à tecnologia como responsável por dar sustentação ao crescimento de longo prazo é o mesmo que dar a todos os demais fatores muito pouco poder em influenciá-lo. Mais ainda, há toda uma diversidade de aparelhamento e de crescimento tecnológico entre os países que um “conhecimento útil” comum a todos tornaria difícil de explicar. O que há são conhecimentos particulares, específicos a cada cultura, e que seriam instrumentos teóricos mais aptos a explicar as variações tecnológicas entre os países e suas diferentes taxas de crescimento de longo prazo. É dentro desse arcabouço de pensamento que Lucas (1988) desenvolve seu modelo de crescimento de longo prazo, tendo como variável determinante o capital humano.

2.1.3. O modelo de Solow com capital humano e o modelo de Lucas para o crescimento de longo prazo

Com o intuito de avaliar as possibilidades do modelo de Solow, Mankiw, Romer e Weil (1992) introduziram nesse modelo a variável capital humano.

Segundo Silva (2008, p. 38), as habilidades atuais, experiências, qualificações e conexões sociais fazem parte do capital humano que torna o indivíduo produtivo do ponto de vista econômico. Em suma, o capital humano seria o conjunto de habilidades e aptidões que tornam o indivíduo produtivo.

De acordo com o mesmo autor, o capital humano é um fator determinante do crescimento econômico, pois, sem ele, não há nem produção nem difusão de tecnologia geradora desse crescimento. De fato, sem o conhecimento para analisar, decodificar e compreender os processos constituintes de uma tecnologia, o indivíduo não será capaz de produzi-la ou de difundi-la.

De acordo com Jones e Vollrath (2015, p. 48 e ss.), o modelo de Solow com capital humano se baseia em uma função de produção do tipo:

$$Y = K^\alpha (AH)^{1-\alpha}, \quad (2.32)$$

em que Y , K e A são como antes e H é o capital humano.

O capital humano é adquirido da mesma maneira que o capital físico: sua aquisição ocorre ao se abrir mão do consumo. Dessa forma, se u representa o tempo não trabalhado utilizado na aquisição de capital humano, o trabalho ainda não qualificado L gerará um capital humano de acordo com a seguinte expressão:

$$H = Le^{\psi u}. \quad (2.33)$$

Observando-se que $\log H = \psi u + \log L$, pode-se deduzir que:

$$\frac{dH}{du} = \psi H. \quad (2.34)$$

Isso significa que ψ é a taxa de crescimento do capital humano em relação a u .

Se as igualdades (2.32) e (2.33) forem divididas por L , poderão ser reescritas como:

$$y = \frac{K^\alpha (AH)^{1-\alpha}}{L^\alpha} = k^\alpha (Ah)^{1-\alpha} \quad (2.35)$$

e

$$h = e^{\psi u}. \quad (2.36)$$

Como o trabalhador toma a decisão de investir uma fração u de seu tempo em sua formação? Ora, como vimos, a aquisição de capital humano é análoga à aquisição de capital físico. Dessa forma, como tanto a taxa de investimento como a de poupança na economia são constantes, a fração do tempo u dedicada à aquisição de capital humano será considerada exógena e constante. Portanto, o capital humano *per capita* será constante.

Se \tilde{k} for definido como $\tilde{k} = \frac{k}{Ah}$, se for tomado o logaritmo dos dois membros dessa igualdade, ficará estabelecida a seguinte expressão:

$$\log \tilde{k} = \log k - \log A - \log h. \quad (2.37)$$

Ao ser tomada a derivada dos dois membros de (2.37) será obtida a igualdade:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{\dot{k}}{k} - \frac{\dot{A}}{A}, \quad (2.38)$$

Pois h é constante. Com uma derivação inteiramente análoga ao caso do modelo de Solow com tecnologia, ficará estabelecida a equação para o modelo de Solow com capital humano:

$$\dot{\tilde{k}} = s\tilde{y} - (n + g + \delta)\tilde{k}, \quad (2.39)$$

em que $\tilde{y} = \frac{y}{Ah}$ e s é a taxa de investimento em capital físico.

É possível chegar a conclusões análogas às anteriores a respeito do papel da tecnologia no crescimento de longo prazo. No presente caso, põe-se em destaque, também, o papel do capital humano nesse crescimento (JONES e VOLLRATH, 2015, p. 50).

O modelo de Lucas tem como substrato a ideia de que o crescimento tem como motores forças inerentes ao processo produtivo. De acordo com Silva Filho e Carvalho (2001, p. 471), não são tecnologias exógenas sobre as quais o mercado não tem nenhum controle que comandam o crescimento, mas sim forças econômicas endógenas aos sistemas de mercado descentralizados.

Para o modelo de Solow estendido, o capital humano é um fator gerador de crescimento, como a tecnologia e o capital físico, acumulável como este último tendo, como visto, forte determinação exógena. Ao contrário, para o modelo de Lucas, o capital humano é um fator endógeno ao processo produtivo que produziria efeitos positivos para o crescimento econômico. O indivíduo acumularia capital humano e competências de maneira análoga à aquisição de conhecimento técnico: ele utilizaria o conhecimento já existente para adquirir novos conhecimentos e, portanto, mais capital humano. Além disso, o capital humano pode ser apropriado pelos indivíduos (IRIGOIN, 2011, p. 200).

O modelo de Lucas foi construído como uma crítica que o autor faz ao que acredita serem inconsistências do modelo básico de Solow: sua incapacidade de dar conta da diversidade de taxas de crescimento entre os países. Além disso, esse modelo preveria uma tendência de igualdade do capital *per capita* dos países no longo prazo (LUCAS, 1988, p. 17).

Os pressupostos do modelo de Lucas são os seguintes:

- (i) A economia em que o modelo se baseia é fechada à competitividade externa.
- (ii) Os agentes econômicos agiriam segundo a Hipótese das Expectativas Racionais⁶ e a tecnologia produziria retornos constantes.⁷
- (iii) Em determinado instante, a mão de obra apresenta uma taxa de crescimento exógena.
- (iv) A economia gira em torno de apenas um produto.
- (v) O capital é proporcional ao número de indivíduos produtivos.

Por hipótese, a economia trabalhada é fechada. Dessa forma, como condição de equilíbrio macroeconômico, impõe-se que a produção agregada é igual à demanda agregada (Jain e Ohri, 2010, p. 160).

A seguinte equação diferencial descreve essa condição de equilíbrio (LUCAS, 1988, p. 8):

$$\underbrace{N(t)c(t) + \dot{K}(t)}_{\text{Demanda Agregada}} = \underbrace{A(t)K(t)^\alpha N(t)^{1-\alpha}}_{\text{Produção Agregada}}, \quad (2.40)$$

em que $N(t)$ é a mão de obra disponível no instante t ; $c(t)$ é o consumo *per capita*; $K(t)$ é o capital físico; $A(t) > 0$ é o índice de tecnologia aplicado à produção e α é o coeficiente de elasticidade da produção em relação ao capital físico.

⁶ Os agentes econômicos satisfazem a Hipótese das Expectativas Racionais quando são formadas suas expectativas e estratégias de ação segundo as informações disponíveis, não havendo margem para erros sistemáticos (DATHEIN, 2000, p. 54).

⁷ Retornos constantes de tecnologia significam que os ganhos de certa economia são diretamente proporcionais à sua tecnologia.

O capital humano é considerado, aqui, como o conjunto de habilidades apresentadas por um trabalhador em certo instante. Sendo esse fator determinante na produção, se $h(t)$ é o capital humano *per capita*, considerando-se que seja o mesmo para todos os trabalhadores no instante t , valerá a igualdade, $H(t) = h(t)N(t)$ onde $H(t)$ é o capital humano total presente nessa economia nesse instante. Dessa forma, a equação (2.40) pode ser reescrita como (LUCAS, 1988, p. 18):

$$N(t)c(t) + \dot{K}(t) = AK(t)^\alpha [u(t)H(t)]^{1-\alpha} h_a^\gamma(t), \quad (2.41)$$

onde $u(t)$ é a porcentagem da força de trabalho empregada na produção no instante t , enquanto $h_a(t)^\gamma$ descreve os efeitos externos do capital humano, todos no instante t . Note-se que, em (2.41), o índice de tecnologia A é considerado constante e $\gamma \geq 0$ (LUCAS, 1988, p. 17 e ss.).

O autor postula, para a variação do capital humano, a seguinte equação:

$$\dot{h}(t) = G(1-u(t))h^\zeta(t), \quad (2.42)$$

em que G é uma função crescente com $G(0) = 0$ e $1-u(t)$ é a porcentagem da força de trabalho aplicada na formação de mais capital humano, no instante t .

O autor observa que, se $\zeta < 1$, existem retornos decrescentes à acumulação de capital humano. Isso implicaria que a taxa de acumulação de capital humano tenderia a zero, não importando o esforço dedicado à sua acumulação. Devido a isso, ele resgata o modelo de Uzawa (1965), onde esse autor trabalha com uma função G que é linear em $1-u(t)$ e, na qual, $\zeta = 1$. Esse modelo possui crescimento sustentado da renda per capita derivado apenas de uma acumulação endógena do capital humano. Portanto, a variação do capital humano no modelo de Lucas fica descrita pela equação:

$$\dot{h} = B(1-u(t))h(t), \quad (2.43)$$

Na qual $B > 0$ é o índice de tecnologia na produção de capital humano.

Esse modelo possui Lucas (1988) conclui que o capital humano é motor do crescimento sustentado, sendo uma alternativa ao progresso tecnológico do modelo de Solow. O crescimento seria potencializado quando se aumenta a taxa de investimento em capital humano. Ao contrário, se houver redução no investimento em capital humano, a taxa de crescimento será reduzida.

2.2. Os Algoritmos Heurísticos

Os algoritmos computacionais tiveram seu desenvolvimento pautado pelas necessidades geradas pelos problemas a serem enfrentados pelas diversas áreas do conhecimento. O imperativo de analisá-los e modelá-los fez com que os softwares enfrentassem uma quantidade cada vez maior de dados a serem processados.

O problema do caixeiro-viajante ficou famoso pela simplicidade e a dificuldade de resolução. De acordo com Matai, Singh e Mitall (2010, p. 3 e ss.), esse problema tem

aplicações múltiplas em áreas como cristalografia, fabricação de placas de circuitos, escalas de pessoal etc. Em sua formulação mais simples, o problema tem o seguinte enunciado: um caixeiro-viajante deverá percorrer n cidades, partindo de uma delas e passando pelas demais uma única vez. Ele deverá voltar ao ponto inicial. Qual será o trajeto que deverá fazer de forma a percorrer a menor distância possível?

Esse problema é bastante desafiador, e o número de possibilidades aumenta muito com o valor de n . Mesmo com os recursos tecnológicos disponíveis, seria muito difícil resolvê-lo pela enumeração de todas as possibilidades: dependendo do valor de n , fica difícil decidir em tempo razoável se um candidato à solução é ou não a solução ótima (PAPADIMITRIOU, 1977, p. 237).

É sempre possível utilizar técnicas que possibilitem reduzir o espaço de procura de soluções do problema, como os algoritmos *branchandbound*. Contudo, sempre haverá uma dimensão acima da qual ficará difícil encontrar a solução ótima.

Com a intenção de ultrapassar as limitações apontadas dos algoritmos chamados exatos, passou-se a adotar outra perspectiva: para muitos problemas de ordem prática, é razoável encontrar soluções aproximadas, próximas à solução ótima. Com base nessa ideia, foram desenvolvidas as assim chamadas *heurísticas*. Heurísticas definem uma classe de algoritmos que permitem encontrar soluções razoáveis para um problema, ou seja, soluções próximas da solução ótima. Uma heurística não garante que se encontrará a solução ótima de um problema, nem permite dizer o quanto uma solução encontrada está distante da ótima.

A meta inicial na criação de heurísticas era o desenvolvimento de algoritmos cada vez mais eficientes, ou seja, programas que encontrassem boas soluções para problemas em um tempo computacional pequeno. Apesar de os algoritmos desenvolvidos terem provado ser bastante eficientes tanto do ponto de vista da solução encontrada quanto do tempo gasto para encontrá-la, eram cada vez mais específicos ao problema abordado.

Com o avanço das pesquisas, as heurísticas passaram a dispor de maior suporte teórico, deixando de ser tão específicas, sem perder sua flexibilidade. Foi a partir de então que surgiram as assim chamadas melhores estratégias, algoritmos inteligentemente flexíveis ou meta-heurísticas.

2.2.1. Simulated Annealing

O *Simulated Annealing* (SA) é uma meta-heurística inspirada nas propriedades dos cristais de metais submetidos ao processo de recozimento. De acordo com Kirkpatrick, Gellat Jr. e Vecchi (1983, p. 672), por meio desse procedimento, após submetido a altas temperaturas, o metal é resfriado lentamente, com o objetivo de revelar as propriedades dos cristais do metal no limite de temperaturas nas vizinhanças dos pontos de solidificação: se a substância puder ser mantida fora do estado de equilíbrio, poderá ser formado um vidro sem ordenação cristalina e com configurações que apenas localmente minimizam a energia dos conjuntos de átomos.

No SA, o processo de descoberta do valor ótimo de uma função é desenvolvido através do cálculo dos valores da função em pontos com temperatura final nula de seu domínio. Em cada movimento, um valor recém-calculado é comparado com um valor anteriormente aceito como candidato ao mínimo local. Se esse valor for menor que o anterior, será aceito imediatamente como o novo candidato a mínimo. Caso não seja maior, será aceito com probabilidade de transição:

$$p = e^{\frac{-\Delta E}{kT}}, \quad (2.44)$$

em que T é a temperatura que regula a aceitação ou não do valor da função objetivo, ΔE é a variação do nível de energia e k é uma constante baseada na constante de Boltzmann, da Mecânica Estatística. Observe-se que, quer um movimento seja aceito, quer não, sempre se empresta certa aleatoriedade a esse processo.

Supondo que ΔE seja igual à variação correspondente do valor da função objetivo f , a igualdade (2.44) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$p = e^{\frac{-\Delta f}{kT}}. \quad (2.45)$$

Note-se que a escolha da temperatura inicial do sistema é de fundamental importância, pois, se for escolhida uma temperatura inicial muito alta, a igualdade (2.45) permite a observação de que a probabilidade de ser aceito um valor de função em cada passo é muito elevada, qualquer que seja a variação do valor da função objetivo. Isso torna muito instável o processo de procura do mínimo global. Por outro lado, se a temperatura inicial for muito baixa, qualquer movimento em que $\Delta f > 0$ será rejeitado, o que restringiria muito o espaço de procura da solução ótima. No entanto, qualquer movimento em que $\Delta f < 0$, o valor atual calculado será aceito, qualquer que seja ele (XIN-SHE, 2010, p. 22).

Por outro lado, ao se partir de uma temperatura muito alta, impondo ao sistema um resfriamento muito brusco, é possível que se percam muitas informações importantes. Isso ocorre porque, no primeiro momento, o sistema está em um estado de energia alto, ao fazer o processo de busca pelos candidatos a mínimo global em uma região relativamente ampla. Por outro lado, no momento em que a temperatura está muito baixa, o algoritmo é bastante seletivo, trabalhando em regiões mais restritas e, portanto, estabelecendo um refinamento dos valores até então encontrados. Portanto, é desejável que se estabeleça uma escala de resfriamento que decresça a temperatura de forma gradual: caso isso ocorra, tudo indica que o algoritmo partirá de uma diversidade de candidatos a mínimos globais e irá, pouco a pouco, dentro de um processo cada vez refinado, restringir o número de candidatos, até atingir valores cada vez mais precisos.

Ledesma, Aviña e Sanchez (2008, p. 403) apontam algumas vantagens do SA:

- Para a aplicação do SA, não é necessária a existência de modelos bem definidos para uma determinada situação problema cujo estabelecimento pode ser difícil.
- Essa heurística é capaz de escapar de mínimos locais, o que frequentemente não ocorre com métodos baseados em gradiente. Além disso, não requer o conhecimento de derivadas.

Algumas outras vantagens do método são (INGBER, 1993, p. 29):

- É capaz de processar funções objetivo com graus arbitrários de não linearidade, descontinuidade e estocasticidade.
- Trabalha com condições de contorno e restrições arbitrárias impostas à função objetivo.

- É facilmente implementado, apresentando um código mínimo, se comparado a outros métodos.

Por outro lado, algumas desvantagens do SA são:

- Pode gastar muito tempo computacional, dependendo da escala de resfriamento adotada.
- O processo pode ser completado sem que se encontre uma solução dentro da margem de erro esperada (INGBER, 1993, p. 30).
- Em geral, é difícil ajustar os parâmetros do algoritmo para situações reais (LEDESMA et al., 2008).

Esta última observação destaca um ponto do qual um aspecto já foi analisado anteriormente: a temperatura inicial é um parâmetro que desempenha papel relevante no desenvolvimento do algoritmo. Outro parâmetro que merece destaque é a escala de resfriamento. Existem alguns tipos bem estabelecidos de escalas de resfriamento, a saber:

Escala Linear – Nessa modalidade de escala, a temperatura em dado instante é dada por $T = T_{ini} - \beta t$, em que T_{ini} é a temperatura inicial, t é o tempo de resfriamento e β é constante. O movimento do algoritmo, em seu processo de procura de um mínimo global, depende o mesmo tempo em cada temperatura. Isso sugere falta de refinamento na procura de valores ótimos nas diversas temperaturas. Por tal razão, a solução encontrada pode carecer de precisão.

Escala Geométrica – Nessa escala de resfriamento, a temperatura decresce a uma taxa $0 < \alpha < 1$. Portanto, a temperatura é dada por:

$$T = T_{ini} \alpha^t, \quad (2.46)$$

em que T_{ini} e t são definidos como antes. A equação (2.46) pode ser reescrita como:

$$t = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{T}{T_{ini}} \right). \quad (2.47)$$

Da equação (2.47), pode-se concluir que, na escala de resfriamento geométrico, gasta-se menos tempo nas temperaturas mais altas que nas mais baixas. Isso demonstra que esse tipo de resfriamento pode levar ao refinamento de soluções obtidas em temperaturas mais altas.

Em uma escala de resfriamento, pode ocorrer também que a temperatura seja aumentada e diminuída de forma cíclica, havendo um refinamento da solução em cada ciclo (LEDESMA et al., 2008).

Downsland e Thompson (2012, p. 1631) mencionam que a temperatura também pode ser reduzida após cada movimento do algoritmo.

Se T_0, T_1, \dots, T_k for uma sequência de temperaturas, de forma que:

$$T_k = \frac{c}{\ln(1+k)}, \quad (2.48)$$

Haverá convergência para um ótimo global conforme $k \rightarrow \infty$. Nesse caso, c é a profundidade do mínimo local mais profundo. No entanto, a implantação dessa escala torna-se impraticável pelo número proibitivo de iterações requeridas no processo de convergência.

Esses mesmos autores destacam que a temperatura final (ponto de resfriamento) do sistema é um parâmetro importante. Teoricamente, a temperatura final deveria ser $T_{final} = 0$, quando não há mais possibilidade de se aumentar a diversidade de pontos nos quais procurar o valor ótimo. Contudo, o ponto de resfriamento pode ser alcançado antes que $T_{final} = 0$. Para isso, alguns autores sugerem que se estabeleça a temperatura final quando nenhum novo valor for aceito após um número limite de movimentos. Outros ainda sugerem como critério a razão entre o número de movimentos aceitos e o número total de tentativas feitas: quando essa razão ficar abaixo de certo valor, a temperatura final terá sido alcançada.

2.2.2. Redes neurais artificiais

O estudo das Redes Neurais Artificiais (RNA) surgiu do interesse dos pesquisadores em desenvolver sistemas de gerenciamento de informações que funcionassem de forma semelhante ao cérebro humano. Assim, as RNA deveriam ter propriedades como: capacidade de aprendizado de ações e respectiva generalização; resgate de dados armazenados pelo respectivo conteúdo, reconhecimento de padrões etc.

Foi no trabalho seminal de McCulloch e Pitts, de 1943, que o neurônio foi estabelecido como unidade de processamento lógico-aritmético. O modelo era constituído de todos os elementos para a execução de operações lógicas, admitindo apenas dois estados: ativo ou inativo (McCULLOCH e PITTS, 1943, p. 118).

As RNA são constituídas de um conjunto de neurônios, interligados através de sinapses e segundo arquiteturas específicas. A Figura 3 mostra, de maneira bem geral e simplificada, o funcionamento das RNA.

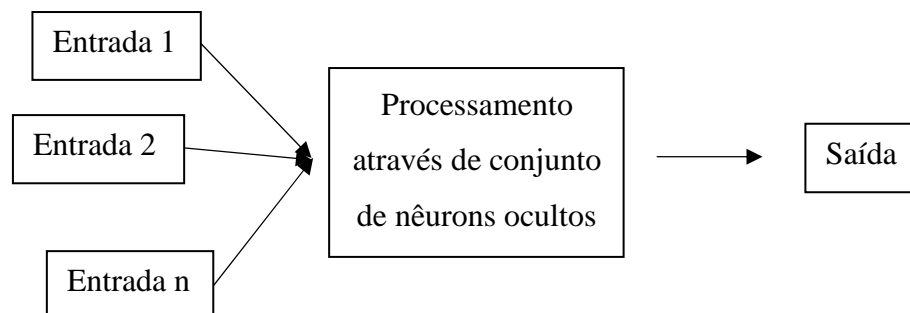


Figura 3. Esquema simplificado de funcionamento das RNA.

Os dados de entrada das RNA podem advir de outros neurônios da rede, assim como de fontes externas a ela. Pesos são associados às sinapses que efetuaram a transmissão desses dados de entrada. Dessa forma, se x_j representa um dos p dados de entrada oriundos da própria rede, com peso a_{ij} e e_k representa um dos q dados de entrada externo com peso b_{ik} , a relação que sintetiza a entrada dos dados na rede será:

$$v_i = \sum_{j=1}^p a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^q b_{ik}e_k + w_i,$$

em que cada w_i é uma constante e $p + q = n$.

Cada uma dessas somas passa por um processamento do tipo SISO (uma entrada-uma saída), através de uma transformação linear cuja imagem de v_i é v'_i . Essa imagem passa por uma segunda transformação não linear f , sendo a imagem de v'_i representada por $y_i = f(v'_i)$ (HUNT et al., 1992, p. 1.086).

Essa breve descrição do funcionamento das RNA serve para destacar uma importante característica desses objetos: sua capacidade de descrever e modelar com precisão os fenômenos não lineares. Esses fenômenos são preponderantes na natureza e, devido a essa propriedade das RNA, elas têm sido utilizadas com frequência para descrevê-los.

Outras características importantes das RNA são:

- Capacidade de processamento paralelo de dados, o que leva a uma alta tolerância da rede a falhas. Isso significa que, se parte de uma RNA for danificada, a parte que não sofreu danos pode continuar seu trabalho normalmente. Além disso, essa capacidade da RNA de processar dados paralelamente aumenta a velocidade de obtenção de resultados a partir desses dados.

- Uma RNA pode ser treinada aplicando dados já elaborados e dentro do escopo do problema a ser resolvido. Como consequência, se certos dados de entrada não tiverem sido apresentados no treinamento, a RNA pode generalizar e adaptar-se a eles.

- Redes Neurais podem operar ao mesmo tempo com dados quantitativos e qualitativos (HUNT et al., 1992, p. 1.084)

Ciobanu e Vasilescu (2013, p. 447-448) ressaltam, referindo-se à capacidade de modelagem das redes neurais, que elas funcionam melhor se o sistema a ser modelado apresentar alta tolerância a erros. No entanto, apontam características adicionais importantes dessas ferramentas computacionais:

- Alta capacidade de associação e reconhecimento de regularidades em um conjunto de padrões. Por isso:

- Funcionam muito bem para descobrir correspondências em que a relação entre as variáveis é pouco compreendida ou não possa ser descoberta por meios convencionais.

Os mesmos autores apontam algumas desvantagens das Redes Neurais:

- Dificuldade em explicar resultados obtidos por uma RNA. Isso ocorre porque, muitas vezes, não se tem acesso a seus mecanismos de funcionamento. Diz-se que a RNA funciona como uma “black box”.

- Teoria matemática insuficiente dando suporte ao funcionamento de uma RNA. Dessa forma, determinar a melhor arquitetura de uma RNA, como o número de camadas (se estiver estruturada em camadas), o número de neurônios por camada etc., ainda não é uma tarefa trivial.

- Uma RNA corre sempre o risco de *overtraining*. Isso significa que, se a RNA for apresentada com um número insuficiente de dados para treinamento, vai primeiro analisar as relações mais gerais entre os dados. A partir daí, a rede parte para analisar propriedades muito específicas dos dados. Dessa forma, diz-se que a RNA está memorizando seus dados de treinamento e vai perdendo a capacidade de generalizar. Contudo, alguns softwares comerciais que implementam Redes Neurais já superaram esse problema.

A observação anterior sobre *overtraining* sugere que, para uma boa performance de uma RNA, deve haver um número razoável de dados para seu treinamento.

2.2.3. Algoritmos genéticos

Os Algoritmos Genéticos (AGs) já contam com um longo período de desenvolvimento: as primeiras ideias relacionadas a eles datam das décadas de 1960 e 1970. Sua inspiração advém das ideias evolucionistas de Charles Darwin: de acordo com o mecanismo da seleção natural, somente os indivíduos que herdaram características que os tornam aptos à sobrevivência no ambiente natural darão continuidade à espécie. A teoria dos AGs utiliza-se dessa nomenclatura para seu desenvolvimento.

Segundo Mitchell (1999, p. 2 e ss.), os AGs são também decorrência de uma mudança de paradigma na computação: pensava-se que os computadores não deveriam ser máquinas apenas para executar operações sequenciais, sejam lógicas ou aritméticas. Eles deveriam simular o funcionamento do cérebro, além de ter a capacidade de aprender para se adaptar ao meio ambiente, sendo também capazes de simular a evolução biológica. Essas concepções deram origem ao estudo, respectivamente, das redes neurais, do aprendizado de máquina (*machinelearning*) e da computação evolutiva.

Dentro de uma concepção básica, os AGs são constituídos de alguns elementos fundamentais:

Cromossomos ou *indivíduos*, constituídos por uma cadeia de bits (0's ou 1's). Um conjunto de cromossomos aleatoriamente determinado, com um tamanho prefixado N, é denominado *população*. Cada um dos indivíduos sofrerá a ação de três operadores básicos: a *seleção*, a *recombinação genética* e a *mutação*. Durante o processo evolutivo, todas as populações formadas terão o mesmo tamanho.

A seleção pode ter como objetivo a reprodução de indivíduos ou sua substituição. Em qualquer caso, todo o processo se baseia em um processo aleatório de classificação dos cromossomos.

No caso da seleção para reprodução, o operador escolhe pares de indivíduos entre aqueles mais aptos a se reproduzirem – mais apto significa, nesse contexto, com melhor ranque obtido na classificação prévia. A seleção por substituição escolhe, entre os indivíduos da população presente e suas crias, aqueles mais aptos a constituir a próxima população. Os considerados menos aptos são simplesmente substituídos pelos mais aptos (PARK et al., 1997, p. 48).

Após selecionado cada par de indivíduos, a reprodução se dará pela aplicação dos operadores de recombinação genética e mutação, pelo menos nos casos mais simples de AG.

Estabelecida uma probabilidade p_r de sua ocorrência, a recombinação genética ocorre pela permuta entre os segmentos correspondentes de dois cromossomos. A Figura 4 ilustra essa permuta para o caso de cromossomos com 10 bits.

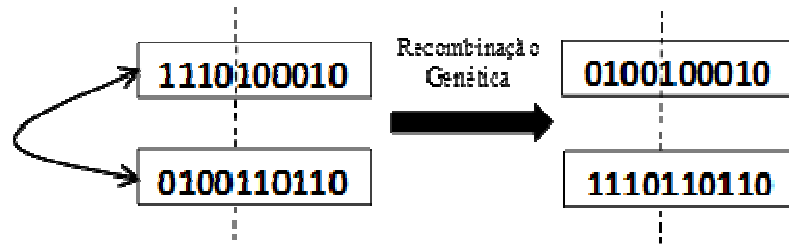


Figura 4. Recombinação genética com as quatro posições mais à esquerda.

Na mutação, há troca aleatória de valores de bits de determinado cromossomo. Veja a Figura 5, que exemplifica o caso de um cromossomo de 10 bits, havendo mutação do segundo, sétimo e décimo bit.



Figura 5. Mutação com troca de valores de bits.

Sobre os novos indivíduos gerados pelos operadores mencionados, realiza-se o mesmo processo de classificação aplicado aos indivíduos iniciais. Dessa forma, a cada um deles é associado um ranque. Os indivíduos com melhores ranques dentre os novos indivíduos e os indivíduos iniciais formarão uma nova população. Todo esse processo de produção de uma nova população a partir de uma população anterior é denominado *geração*.

É importante observar que a recombinação genética tem por função formar indivíduos cada vez mais aptos, a partir da troca de informações entre aqueles considerados aptos na geração anterior. Por sua vez, o operador de mutação produz variabilidade nas sucessivas populações, permitindo que o AG prossiga sem perder diversidade (PARK et al., 1997, p. 48).

De acordo com Mitchell (1999, p. 4), os AGs encontram aplicação principalmente em problemas que envolvem a procura da melhor opção em um conjunto em que exista uma grande variedade de opções possíveis. A autora menciona como exemplo de um problema desse perfil a modelagem computacional de certo tipo de proteína. O algoritmo utilizado nesse problema deverá ser capaz de procurar, dentro da imensa variedade de possíveis sequências de aminoácidos, aquelas que melhor satisfaçam determinadas propriedades. Os AGs podem ter um desempenho muito bom nesse tipo de problema.

Outros exemplos de aplicação dos AGs mencionados seriam:

- Problemas de otimização numérica ou combinatória, como o *layout* de circuitos.
- Modelagem de processos de inovação e de emergência de mercados econômicos.
- Modelagem de processos ecológicos, tais como coevolução de hospedeiros e parasitas e fluxo de recursos em ecologias.

- Estudos da interação entre os processos de aprendizagem dos indivíduos e a evolução da espécie interagem reciprocamente.

Reforçando o ponto de vista antes apresentado, Whitley (2001, p. 818 e ss) afirma que os AGs devem ser pensados mais como algoritmos de procura estocástica. Situando os AGs no contexto dos problemas de otimização, esses algoritmos não forneceriam soluções ótimas globais, mas encontrariam soluções competitivas, dentro dos critérios de adaptabilidade.

Mardle e Pascoe (1999) apontam algumas características dos AGs que, de acordo com os objetivos do pesquisador, podem ser consideradas limitações desses algoritmos:

Se situados ainda no contexto da otimização, os AGs levam, em geral, mais tempo que os algoritmos de procura direcionada para encontrar soluções aproximadas dos problemas. Isso ocorre exatamente pelo fato de os AGs serem algoritmos de procura estocástica.

Os AGs adaptam-se melhor a problemas que envolvam variáveis discretas que em problemas de variáveis contínuas. Isso ocorre pela granularidade inerente à representação dos valores envolvidos como cadeias de bits (0's ou 1's). Por exemplo, se o valor de uma variável está em determinado intervalo fechado, e seus valores são representados por cadeias de 3 bits, existem apenas oito possibilidades para esses valores. Havendo essa limitação no espaço de procura, melhor é o desempenho do AG.

A utilização eficaz de um AG depende de profundo conhecimento do problema investigado. Isso porque tal conhecimento levará à compreensão da necessidade de se ajustarem parâmetros importantes para o bom funcionamento do algoritmo. Alguns desses parâmetros seriam: especificação de variáveis probabilísticas, estratégias de aplicação de pesos às variáveis, ajustes de limites dessas mesmas variáveis etc.

AGs funcionam melhor em problemas sem restrição do que o contrário: a consideração da factibilidade de uma variável pode degradar bastante a performance do algoritmo. Outro aspecto a ser considerado é que a factibilidade de uma solução estará incorporada ao ranque obtido por ela na etapa de classificação dos indivíduos. Como o ranque é determinado por um processo estatístico, quanto maior for o conjunto factível de soluções do problema em estudo, mais precisos serão a classificação e o ranqueamento dos indivíduos nesse conjunto.

2.3. Os Algoritmos não Heurísticos

Outra classe de algoritmos adotadas técnicas de natureza apenas numérica. Esses algoritmos utilizam-se de estratégias já bastante conhecidas que encontram vasta abordagem na literatura (NOCEDAL e WRIGHT, 2006; ASTER, BORCHERS e THURBER, 2011; BERTSEKAS, 1999; STOER e BULIRSCH, 2002).

Dentro dos casos de otimização sem restrição, os métodos de natureza apenas numérica podem ser divididos em duas grandes classes: os que utilizam estratégias de procura unidimensional e os que têm como estratégia as regiões de confiança. Essas categorias incluem os métodos baseados em gradiente e aqueles que não são baseados em gradiente.

Os métodos baseados em gradiente são aqueles que, falando de maneira informal, utilizam derivadas da função objetivo em sua estrutura. Os métodos que não são baseados em gradiente não lançam mão das derivadas da função objetivo. Estes últimos também são ditos livres de derivadas.

Dada uma função objetivo $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ suficientemente diferenciável, a ideia básica desses métodos é definir uma sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ em \mathbb{R}^k , convergindo para um certo \bar{x} , sendo este um minimizador para f . O valor mínimo de f será representado por $f(\bar{x})$.

2.3.1. Algoritmos de otimização sem restrição e baseados em gradiente: métodos de procura unidimensional

Nos algoritmos de procura unidimensional, a partir de cada termo x_n é determinada uma direção v_n , a partir da qual o termo x_{n+1} esteja sobre a semirreta $x_n + \alpha v_n$, sendo α um número real positivo denominado tamanho do passo. É importante observar que, como $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ deve convergir para um mínimo de f , o cálculo do tamanho do passo deve ser tal que, na melhor das hipóteses, $x_{n+1} = x_n + \alpha v_n$ seja um ponto de mínimo local de f ao longo da direção definida por v_n . Nesse caso, diz-se que houve uma procura unidimensional exata. É importante observar que esses métodos possuem, em geral, alto custo computacional. Na prática, são mais utilizadas procuras unidimensionais inexatas, onde se trabalha com uma redução considerada razoável da função objetivo, com custo computacional mínimo (NOCEDAL e WRIGHT, 2006, p. 31).

2.3.2. Método de Newton e variações

As diversas estratégias dos algoritmos de procura unidimensional surgem à medida que se estabelece a direção de procura v_n . Uma das mais conhecidas é o método de Newton, estabelecido através do desenvolvimento de Taylor de segunda ordem de f , em uma vizinhança de x_n . Assim:

$$f(x_n + v_n) \approx f(x_n) + v_n^T \nabla f(x_n) + \frac{1}{2} v_n^T \nabla^2 f(x_n) v_n = Q_k(v_n), \quad (2.49)$$

em que $\nabla f(x_n)$ é o gradiente da função objetivo em x_n e $\nabla^2 f(x_n)$ é a matriz Hessiana de f em x_n . Impondo que $Q_k(v_n) = f(x_n + v_n) = 0$, segue que $\nabla f(x_n) + \nabla^2 f(x_n) v_n = 0$, ou seja:

$$v_n = -(\nabla^2 f(x_n))^{-1} \nabla f(x_n), \quad (2.50)$$

supondo $\nabla^2 f(x_n)$ positiva definida. Nesse caso, v_n é denominada direção de Newton. A hipótese sobre $\nabla^2 f(x_n)$ é feita para garantir a existência da direção v_n e para que seja uma direção de descida, a menos que $\nabla f(x_n) = 0$. Direção de descida é uma direção ao longo da qual $v_n^T \nabla f(x_n) < 0$. Nesse caso, pode-se garantir que f é, nessa direção, decrescente para valores suficientemente pequenos do tamanho do passo α (NOCEDAL e WRIGHT, 2006, p. 21).

O método de Newton funciona bem quando a sequência que o define fica, a partir de certo termo, contida em uma vizinhança do ponto \bar{x} que minimiza f . Porém, em seu desenvolvimento, existe a necessidade do cálculo do gradiente e da matriz hessiana: o cálculo

desta última pode não ser simples, além de estar sujeito a erros de precisão se for feito numericamente⁸. Mais ainda, cada iteração pode ser custosa do ponto de vista computacional, por depender da inversa da matriz Hessiana. Há ainda a necessidade de $\nabla^2 f_n$ ser positiva definida para que v_n uma direção de descida (STOER e BULIRSCH, 2002, p. 350).

Uma alternativa para contornar as dificuldades que podem surgir ao se lidar com a matriz hessiana no método de Newton foi trabalhar com aproximações B_k para ela, sendo que essa aproximação é atualizada a cada iteração do algoritmo. Usualmente são impostas sobre essas aproximações algumas condições herdadas da matriz Hessiana, como a condição de simetria. A partir dessa ideia, foram desenvolvidos os métodos quase-Newton e BFGS.

2.3.3. Os métodos de máxima descida e do gradiente conjugado

Os métodos de máxima descida são métodos de procura unidimensional para os quais a direção v_n é definida, a partir de x_n , de tal forma que propicie o decréscimo mais rápido para a função objetivo. Por essa razão, vale que $v_n = \frac{-\nabla f_n}{\|\nabla f_n\|}$. Como deve ser $f(x_{n+1})$ um mínimo para a f ao longo de v_n e supondo que haja uma procura unidimensional exata:

$$\nabla f_{n+1} v_n = \frac{\partial f(x_{n+1})}{\partial v_n} = 0. \quad (2.51)$$

A relação (2.51) permite concluir que, em algoritmos de máxima descida, direções de procura construídas em iterações consecutivas são ortogonais. Ocorre que os algoritmos de máxima descida podem ter uma convergência extremamente lenta (SHEWCHUK, 1994, p. 8).

O Método do Gradiente Conjugado tem como diretriz a ideia de não repetir direções na procura do ponto ótimo. Nesse sentido, sua convergência deve ser mais rápida que a dos métodos de máxima descida.

O Método do Gradiente Conjugado Linear (MGC linear) teve origem na procura de soluções de sistemas lineares do tipo:

$$Ax = b. \quad (2.52)$$

Em que A é uma matriz $k \times k$ simétrica, positiva definida, sendo x e b vetores em \mathbb{R}^k . A estratégia consiste em minimizar a forma quadrática:

$$Q(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b x + c, \quad (2.53)$$

⁸O cálculo numérico de derivadas sempre está sujeito a erros devido a limitações na representação de números reais através da notação de ponto flutuante. As derivadas numéricas podem estar sujeitas a erros de arredondamento, de truncamento, podendo produzir resultados nem sempre desejados no desenvolvimento dos algoritmos (PRESS et al., 2007, p. 229-232; DE LEVIE, 2009, p. 935-950).

sendo A , x e b como antes e c , um vetor fixo de \mathbb{R}^k . Sendo A positiva definida, garante-se a existência de um mínimo absoluto para Q . O fato de A ser simétrica assegura que este mínimo será uma solução de **Erro! Fonte de referência não encontrada.** (SCHEWCHUK, 1994, p. 54).

O MGC linear se baseia no conceito de *vetores conjugados*: dois vetores não nulos v_1 e v_2 de \mathbb{R}^k são A -ortogonais ou conjugados se $v_1^T A v_2 = 0$, sendo A uma matriz simétrica positiva definida.

As direções de procura unidimensional para o MGC linear são construídas a partir de uma base do \mathbb{R}^k , formada por k vetores conjugados. Partindo-se do vetor $v_0 = -f_0$, em que f_0 é o gradiente da função objetivo no ponto inicial x_0 , as direções de procura para as iterações subsequentes são dadas por $v_{n+1} = -f_{n+1} + \beta_n v_n$, sendo determinadas a partir de uma generalização do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aplicado a $-f_n$, na n -ésima iteração. A partir de então, é possível deduzir duas propriedades importantes do MGC linear: o método converge para o mínimo global em, no máximo, k iterações. A outra propriedade estabelece que, a cada iteração, para a construção de v_n , o método utiliza apenas o vetor da iteração anterior que lhe é conjugado. Isso significa que não é necessário ocupar espaço de memória com vetores mutuamente conjugados de iterações anteriores (BERTSEKAS, 1999, p. 121 e ss.; SCHEWCHUK, 1994, p. 31).

O fato de ocupar pouco espaço de memória com o armazenamento de matrizes fez – e tem feito – dos Métodos do Gradiente Conjugado, linear e não linear, objetos de pesquisa principalmente em aplicações de larga escala. Uma das facetas desse trabalho foi a tentativa de conciliar a eficácia na convergência dos métodos de Newton e quase-Newton com a baixa taxa de armazenamento dos algoritmos de Gradiente Conjugado. A partir desse esforço, surgiu uma modalidade dos métodos quase-Newton chamada Métodos de Memória Limitada. Apesar disso, mesmo em suas implementações mais simples, um Método de Memória Limitada ocupa três vezes mais memória que o Método do Gradiente Conjugado ((NOCEDAL e WRIGHT, 2006, p.176 e ss.; NOCEDAL, 1996, p. 10 e ss.).

De acordo com Hager e Zhang (2006), os Métodos do Gradiente Conjugado não linear (MGC não linear) constituem uma classe de algoritmos caracterizados pela baixa exigência de memória e uma vasta gama de propriedades ligadas à convergência local e global. Sua estrutura é semelhante à do MGC linear, só que com aplicação no caso de se procurar encontrar o mínimo absoluto não mais de uma forma quadrática, mas de uma função suficientemente diferenciável $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Nesse caso, já não se pode mais contar com a garantia e a rapidez de convergência das direções conjugadas. Além disso, a função f pode ter vários mínimos locais, o que, eventualmente, atrapalha muito a procura de mínimos absolutos. De qualquer forma, os algoritmos do tipo MGC não linear são construídos de forma que, quando aplicados a formas quadráticas, sejam equivalentes ao MGC linear (NOCEDAL, 1996, p. 10).

Para o caso linear, na procura do tamanho do passo α em $x_{n+1} = x_n + \alpha v_n$, o conceito de vetores conjugados acarreta a seguinte propriedade:

Se $x_{n+1} = x_n + \alpha v_n$, ao multiplicar ambos os membros dessa igualdade pela matriz A , como definida em **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, obtém-se:

$$Ax_{n+1} - Ax_n = \alpha Av_n. \quad (2.54)$$

Somando e subtraindo b ao primeiro membro de (2.54), segue de (2.52) que:

$$Ax_{n+1} - b - f(x_n) = \alpha Av_n,$$

ou seja,

$$v_n^T (Ax_{n+1} - A(\bar{x})) - v_n^T f(x_n) = \alpha v_n^T Av_n, \quad (2.55)$$

em que \bar{x} é o mínimo global da forma quadrática em (2.53). Portanto, se $r_{n+1} = x_{n+1} - \bar{x}$ segue de (2.55) que:

$$v_n^T Ar_{n+1} - v_n^T f(x_n) = \alpha v_n^T Av_n. \quad (2.56)$$

Ora, como foi visto, $v_n^T Ar_{n+1} = v_n^T (Ax_{n+1} - b) = v_n^T f(x_{n+1}) = \frac{\partial f(x_{n+1})}{\partial v_n}$. Portanto, se v_n e r_{n+1} forem conjugados, ficará estabelecida uma procura unidimensional exata, e o tamanho do passo será:

$$\alpha = - \frac{v_n^T f(x_n)}{v_n^T Av_n}. \quad (2.57)$$

O estabelecimento do tamanho do passo α para o MGC não linear é bem mais complexo. Para o caso da procura unidimensional exata, não existe mais o apoio imediato do conceito de vetores conjugados, o que aumenta a dificuldade da determinação de α . Em alguns casos, em vez de se determinar um valor de α que minimize a função objetivo f ao longo da semirreta $x_n + \alpha v_n$, $\alpha > 0$, são consideradas as *condições fortes de Wolfe*, a saber:

$$\begin{aligned} f(x_n + \alpha v_n) &\leq f(x_n) + c_1 \alpha f_n^T v_n, \\ |f(x_n + \alpha v_n)^T v_n| &\leq -c_2 \alpha f_n^T v_n, \end{aligned} \quad (2.58)$$

em que $0 < c_1 < c_2 < 1$. A primeira das desigualdades (2.58) estabelece que o decrescimento de f deve ser proporcional ao tamanho do passo e à derivada $f_n^T v_n$. A segunda impõe condições sobre a derivada de $\phi(\alpha) = f(x_n + \alpha v_n)$ para que ϕ esteja próxima de um mínimo local (HAGHER e ZHANG, 2006).

Às vezes, alguns autores fazem a exigência de que o tamanho do passo α satisfaça as desigualdades seguintes:

$$\begin{aligned} f(x_n + \alpha v_n) &\leq f(x_n) + c_1 \alpha f_n^T v_n, \\ f(x_n + \alpha v_n)^T v_n &\geq c_2 \alpha f_n^T v_n, \end{aligned} \quad (2.59)$$

com $0 < c_1 < c_2 < 1$. Elas formam o que se convencionou chamar de *condições fracas de Wolfe*. Em qualquer caso, se a um algoritmo é exigido que o tamanho do passo satisfaça (2.58) ou (2.59), em geral impõe-se a exigência adicional de que:

$$v_n^T f(x_n) v_n < 0, \quad (2.60)$$

Q

ue é denominada propriedade de decrescimento. De modo semelhante ao caso linear, para o MGC não linear as direções de procura unidimensional são dadas pela igualdade:

$$v_{n+1} = -\beta_n f_{n+1} + \beta_n v_n,$$

em que, aos coeficientes β_n , são atribuídos valores que garantam boas propriedades para a convergência do algoritmo. Alguns dos valores de β_n bem conhecidos, cujos nomes são os mesmos dos algoritmos correspondentes em que estão listados a seguir:

$$\begin{aligned} \beta_n^{HS} &= \frac{f_{n+1} y_n}{v_n^T y_n} \text{ (Hestenes e Stiefel),} \\ \beta_n^{FR} &= \frac{f_{n+1} - f_n}{f_n - f_n} \text{ (Fletcher e Reeves),} \\ \beta_n^{PR} &= \frac{f_{n+1} y_n}{f_n - f_n} \text{ (Polak e Ribière),} \end{aligned}$$

Em que $y_n = f_{n+1} - f_n$.

Muito se tem estudado a respeito das propriedades dos MGC não lineares derivados das possíveis escolhas dos coeficientes β_n . Um rol bastante extenso de valores para os β_n pode ser visto em Hager e Zhang (2006). No entanto, segundo Dai (2011), comparativamente o esforço de pesquisa tem sido menor em relação ao tamanho do passo α .

Zhang, Li e Zhou (2009, p. 634) apresentaram uma modificação do MGC não linear em que se baseou o “solver” utilizado, em um primeiro momento, neste trabalho. Segundo esse método, a direção de procura é dada por:

$$v_{n+1} = \begin{cases} -f_{n+1}, & \text{se } n = 0 \\ -f_{n+1} + \beta_n^{PR} v_n - \theta_n y_n, & \text{se } n > 0 \end{cases}, \quad (2.61)$$

sendo o coeficiente β_n o mesmo do método de Polak-Ribière. As direções de procura foram modificadas para garantir uma convergência global do algoritmo, ou seja, o resultado demonstrado foi o de que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = 0$. Isso significa que apenas uma subsequência da sequência $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ tende a um vetor nulo ou, o que significa o mesmo, tende a um ponto estacionário.

2.3.4. Algoritmos de otimização sem restrição e baseados em gradiente: métodos baseados em região de confiança

Os algoritmos baseados em região de confiança geram uma sequência de pontos $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que deverá convergir para um mínimo local da função objetivo f . A partir de um dado termo x_n , o termo de ordem $n+1$ deve ser encontrado de modo a produzir um *decréscimo suficiente* em f . Essa terminologia será explicitada em mais detalhes a seguir.

A construção de termos consecutivos da sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ é feita da seguinte forma:

Dado um termo x_n , é definida uma forma quadrática m_n em uma bola B_n centrada neste ponto e raio com Δ . A forma quadrática m_n deve ser uma boa aproximação local para f . Além disso, deverá existir um vetor de procura v_n tal que:

$$m_n(x_{n+1}) = m_n(x_n + v_n) \leq m_n(x_n), \quad \|v_n\| \leq \Delta. \quad (2.62)$$

A bola centrada em x_n e raio Δ é denominada *região de confiança* de x_n , e Δ é o raio da região de confiança. A norma $\|\cdot\|$ que define a região de confiança pode ser a norma euclidiana, como também qualquer norma que melhor obedeça à geometria do problema em questão (CONN, GOULD e TOINT, 2000, p. 6).

Dizer que a forma quadrática m_n deve ser uma boa aproximação de f na região de confiança significa que, na passagem de x_n para x_{n+1} , o decréscimo de f seja comparável ao que foi previsto pelo modelo. Em outros termos, $\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{m_n(x_{n+1}) - m_n(x_n)}$ deve ser tão próximo de 1 quanto possível. Portanto, para o método da região de confiança, deve-se estabelecer uma margem $\delta > 0$ tal que:

- Se $\delta \leq \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{m_n(x_{n+1}) - m_n(x_n)} \leq 1$, o raio da região de confiança é mantido ou aumentado, sendo que, agora, a bola que a define estará centrada em x_{n+1} . Deverá ser encontrada uma direção definida pelo vetor v_{n+2} de forma que $m_{n+1}(x_{n+2}) = m_{n+1}(x_{n+1} + v_{n+2}) \leq m_{n+1}(x_{n+1})$, e o decréscimo de f seja comparável ao da forma quadrática m_{n+1} . Este decréscimo é que é denominado decréscimo suficiente de f .

- Se for $\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{m_n(x_{n+1}) - m_n(x_n)} < \delta$, o raio da região de confiança é diminuído, sendo feito $x_{n+1} = x_{n+2}$ e procede-se à busca de x_{n+3} com as mesmas exigências anteriores.

A forma quadrática que modela a função f na região de confiança é, em geral, dada por:

$$m_n(x_n + v_n) = f(x_n) + v_n^T \nabla f(x_n) + \frac{1}{2} v_n^T B_n v_n, \quad (2.63)$$

Em que B_n é uma matriz simétrica $n \times n$. O decrescimento exigido de m_n ao modelar f pode ser pensado como sendo obtido através da solução do seguinte subproblema:

$$\min_{v_n \in B_n} m_n(x_n + v_n). \quad (2.64)$$

Nocedal e Wright (2006) fazem algumas observações a respeito da forma quadrática em (2.63):

- Escolhas bastante comuns para B_n são a matriz Hessiana de f em x_n , ou seja, $B_n = \nabla^2 f_n$ ou uma aproximação. No primeiro caso, fica definido o método de Newton para regiões de confiança. Devido à condição imposta pela região de confiança sobre v_n , a saber, $\|v_n\| \leq \Delta_n$, para o método de Newton, para regiões de confiança não há mais a exigência de que $\nabla^2 f_n$ seja positiva definida.

Se $B_n = 0$, o vetor de procura tal que (2.63) seja válida é dado por:

$$v_n = -\Delta_n \frac{\nabla f_n}{\|\nabla f_n\|},$$

em que Δ_n é o raio da região de confiança e $\nabla f_n \neq 0$. Nesse caso, fica definido o método de máxima descida para regiões de confiança.

Algumas vantagens e desvantagens dos métodos baseados em região de confiança, quando comparados com os métodos de procura unidimensional, são apontadas por Yigui, Qian e Hauchan (2009, p. 318) e Papalambros e Wilde (2000, 163):

- Nos métodos baseados em região de confiança, não há exigência de a matriz Hessiana da função objetivo f ser positiva definida. Pode também ocorrer convergência do algoritmo para mínimos locais, não somente para pontos KKT (vera próxima seção). No caso de procura unidimensional, a exigência de a matriz Hessiana ser positiva definida e limitada garante que a direção de procura seja de descida.

- Aproximações de segunda ordem podem trazer problemas para os métodos de procura unidimensional, como convergência extremamente vagarosa ou mesmo a não convergência. Nos métodos baseados em região de confiança, devido ao controle que se pode ter sobre o raio da região, o domínio sobre o qual deverá haver uma aproximação de f por

uma forma quadrática pode ser reduzido. Isso reduz o efeito que informações de segunda ordem podem ter.

2.3.5. Métodos de otimização com restrição e baseados em gradiente

Um problema de otimização com restrição pode ser enunciado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^k} f(x) \text{ sujeito a} \\ c_i(x) = 0, \quad i \in E, \\ c_i(x) \geq 0, \quad i \in I, \end{aligned} \tag{2.65}$$

em que $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ é a função objetivo e $c_i: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ são as *restrições*. O conjunto $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^k \mid c_i(x) = 0, i \in E \text{ e } c_i(x) \geq 0, i \in I\}$ é denominado *região factível*. Outro conjunto importante é o *conjunto ativo em x* definido por $A(x) = \{i \in E \cup I \mid c_i(x) = 0\}$. As restrições cujos índices não fazem parte do conjunto ativo em x são denominadas *inativas* nesse ponto. As demais são chamadas *ativas*.

O conjunto ativo constitui a fronteira da região factível. Em geral, os algoritmos de otimização com restrição procuram um candidato a mínimo local da função objetivo no conjunto ativo. Isso ocorre porque as propriedades locais de um ponto factível não são alteradas pelas restrições inativas nesse ponto (isso pode ser entendido melhor através das condições (2.67)-(2.71) a seguir. Dessa forma, estarão sendo trabalhadas apenas restrições que constituem igualdades (CONN, GOULD e TOINT, 2000, p. 39).

Se as restrições de (2.65) fossem apenas igualdades, supondo que sejam m restrições, poderiam ser eliminadas, em tese, m variáveis dessas igualdades. Ao substituir essas variáveis em f , seria obtido um problema de otimização sem restrição com $n-m$ variáveis. Alguns problemas com essa abordagem são os seguintes:

- Nem sempre há uma expressão analítica para f .
- Nem sempre é possível explicitar as variáveis das restrições.

Uma maneira mais geral de se tratar (2.65) para qualquer tipo de restrição é utilizar as *condições de Karush-Kuhn-Tucker*, ou *condições KKT*, que estabelecem condições necessárias para um ponto \bar{x} factível ser um ponto de mínimo local. Para tanto, define-se:

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i \in E \cup I} \lambda_i c_i(x), \tag{2.66}$$

que é o Lagrangeano para (2.65).

Suponha que \bar{x} seja uma solução de (2.65), sendo a função objetivo f e as m restrições c_i continuamente diferenciáveis. Além disso, suponha que os gradientes ∇c_i , para $i \in A(\bar{x})$, sejam linearmente independentes. Então, existe um vetor de multiplicadores de Lagrange $\bar{\lambda}$ cujas componentes $\bar{\lambda}_i$ satisfazem as seguintes condições:

$$" L(\bar{x}, \bar{\lambda}_i) = 0, \quad (2.67)$$

$$c_i(\bar{x}) = 0, \text{ se } i \in E, \quad (2.68)$$

$$c_i(\bar{x}) \geq 0, \text{ se } i \in I, \quad (2.69)$$

$$\bar{\lambda}_i \geq 0, \text{ se } i \in I, \quad (2.70)$$

$$\bar{\lambda}_i c_i(\bar{x}) = 0, \text{ se } i \in E \cup I. \quad (2.71)$$

A condição (2.67) pode ser reescrita como:

$$" f(\bar{x}) = \sum_{i \in E \cup I} \bar{\lambda}_i c_i(\bar{x}). \quad (2.72)$$

Outra observação importante é que (2.71) estabelece as chamadas *condições de complementaridade*, que afirmam que $\bar{\lambda}_i = 0$, se $i \in A(\bar{x}) \cup E$ e $\bar{\lambda}_i > 0$, se $i \in I$. A demonstração do resultado sobre a existência do vetor de multiplicadores de Lagrange que satisfaz (2.67)-(2.71) pode ser encontrada em Luenberger e Ye (2008, p. 342 e ss.).

Pontos que satisfazem as condições (2.67)-(2.71) de Karush-Kuhn-Tucker são chamados de pontos de KKT. É sabido que nem todos os pontos que satisfazem as condições do teorema acima (condições KKT) são soluções de (2.65). Por outro lado, de acordo com Conn, Gould e Toint (2000, p. 43), situações em que essas condições são contrariadas são raras e atinentes a problemas muito específicos. Assim, para a construção de algoritmos de interesse geral, as condições KKT podem ser consideradas satisfatórias para que seja estabelecida uma solução de (2.65). Essa ideia foi a que balizou a construção do algoritmo apresentado em Li (2013). Esse algoritmo foi, em um primeiro momento, o solver para o problema de otimização empregado no presente trabalho. Nesse algoritmo, faz-se uma modificação do MGC não linear para problemas com restrição da forma:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ sujeito a} \\ x \geq 0, \end{aligned} \quad (2.73)$$

onde $x \geq 0$ significa que todas as coordenadas do vetor x são positivas ou nulas. Nele, são determinados coeficientes de gradiente conjugado e direções v_k semelhantes às mostradas em (2.61), levando-se em consideração os índices de x_n que estão em seu conjunto ativo e aqueles que não estão. Ao final, o autor conclui pela convergência global do algoritmo, afirmando que as direções construídas são direções de descida. Mais ainda, ele prova que, se x_n é um ponto KKT de (2.73) se, e somente se (LI, 2013, p. 3):

$$" f_k v_k = 0, \quad (2.74)$$

que seria uma condição de parada do algoritmo proposto pelo autor.

2.3.6. Métodos de otimização não baseados em gradiente ou livres de derivadas

Para alguns casos de funções objetivo $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, as derivadas podem não estar disponíveis em alguns pontos ou, mesmo estando disponíveis, é difícil calculá-las. Isto ocorre nos casos de simulação, em que os valores das funções são fornecidos após certo número de sub-rotinas ser executado, podendo incluir a resolução de problemas de autovalores ou métodos de resolução de sistemas de equações diferenciais, por exemplo (MORÉ e WILD, 2009, p.172).

A não possibilidade do cálculo das derivadas de f pode residir nos seguintes fatores:

- Dificuldade do resgate da expressão analítica da função objetivo. Mesmo que essa expressão analítica esteja disponível, pode ser custoso, do ponto de vista computacional, o cálculo da derivada (NOCEDAL e WRIGHT, 2006, p. 221).
- Métodos de diferenciação automática funcionam bem caso se tenha algum acesso às rotinas que fornecem os valores da função objetivo. Pode acontecer que essas rotinas estejam inseridas em um código antigo não mantido pelo desenvolvedor. Reescrevê-las de modo a torná-las acessíveis ao cálculo de diferenciação automática pode ser um trabalho proibitivo. Além disso, pode haver uso de diferentes linguagens computacionais em um mesmo código ou o código ser proprietário, o que, eventualmente, também inviabiliza o uso de diferenciação automática.

Muitas vezes, o cálculo dos valores da função objetivo é custoso do ponto de vista computacional ou pode conter erros. O primeiro caso inviabiliza o uso de diferenças finitas para o cálculo das derivadas, pois requerem o cálculo repetido de valores da função objetivo. O segundo caso pode produzir um gradiente com valores de derivadas pouco precisos (CONN, SCHEINBERG e VICENTE, 2009, p. 2; RIOS e SAHINIDIS, 2013, p. 1.248).

Em todos esses casos, não se recomenda o uso de métodos baseados em gradiente.

Os algoritmos livres de derivadas são aqueles a serem aplicados em situações nas quais o uso de derivadas da função objetivo é impraticável ou mesmo impossível. Esses algoritmos são bastante antigos, sendo que os primeiros foram criados ainda na década de 1960. Um dos pioneiros é o famoso algoritmo de Nelder-Mead (NELDER e MEAD, 1965), baseado em transformações geométricas de simplexos.

Ao longo do tempo, o número de aplicações dos algoritmos livres de derivadas tem crescido. Eles têm sido empregados nas mais diversas áreas, como Medicina, Engenharia, Química, Biologia, entre outras. Além disso, resultados matemáticos a respeito da convergência dos algoritmos têm conferido mais robustez a estes.

2.3.7. Pontos fracos dos algoritmos não baseados em gradiente

Quando comparados com os métodos baseados em gradiente, os métodos livres de derivada apresentam algumas desvantagens:

Conn, Scheinberg e Vicente (2009, p. 5 e ss.) apontam que os algoritmos não baseados em gradiente não podem ser utilizados em problemas com um número muito grande de variáveis. Apesar disso, em implementações mais recentes desse tipo de algoritmo, o número de variáveis já alcançou o patamar de umas poucas centenas.

Esses mesmos autores nos dizem que a convergência dos métodos livres de derivadas costuma ser bastante lenta. Isso acontece porque a evolução do algoritmo se baseia no cálculo direto de valores da função em diversos pontos e na respectiva comparação. Esses cálculos

podem custar muito do ponto de vista computacional, o que leva à convergência vagarosa do algoritmo. A utilização de recursos computacionais como a paralelização pode melhorar esse processo.

Analisando aspectos teóricos da convergência dos algoritmos baseados e não baseados em gradiente, Jamieson, Nowak e Recht (2012, p. 2.672 e ss.) mostram que os métodos não baseados em gradiente apresentam praticamente a mesma taxa de convergência que os baseados em gradiente, quando aplicados em funções cujos valores são calculados sem erro. Isso já não acontece nos casos em que os valores da função são calculados com erro, hipótese em que os métodos livres de derivadas apresentam uma taxa de convergência menor.

Outro aspecto negativo dos algoritmos livres de derivadas é que, mesmo para problemas relativamente simples e bem-postos, pode acontecer que as soluções encontradas não sejam muito precisas (CONN, SCHEINBERG e VICENTE, 2009, p. 5).

2.3.8. Alguns tipos de algoritmos que são livres de derivadas

a) Algoritmo de Nelder-Mead

Como visto, o algoritmo de Nelder-Mead é um dos mais antigos métodos livres de derivadas conhecidos. Todo o trabalho do algoritmo gira em torno dos vértices de simplexo. Portanto, em um espaço dimensão n , são necessários $n+1$ pontos que formem um simplexo não degenerado para iniciar o algoritmo.

O algoritmo procura pelo vértice em que a função objetivo f tenha o seu maior valor. Por meio de transformações geométricas em torno do centroide do simplexo, ele substitui esse vértice por outro em que o valor de f esteja melhorado, isto é, o vértice inicial é substituído por outro em que o valor de f seja menor: através de uma reflexão na face oposta, um vértice em que a função objetivo assume seu pior valor pode ser transformado em outro no qual ela assume um valor melhor, garantindo-se que o simplexo transformado não seja degenerado; se, em determinada iteração, houve melhoria do valor da função objetivo em determinado vértice, esse valor pode melhorar ainda mais por meio de uma ampliação do simplexo; caso o algoritmo esteja preso a um vale do gráfico da função objetivo, o simplexo pode escorrer para fora dele através de contrações ao longo da direção transversal ao vale; o simplexo pode ser contraído em todas as direções ao redor do vértice com menor valor para f , caso o algoritmo tenha de avançar em regiões muito estreitas (PRESS et al., 2007, p. 503).

O algoritmo de Nelder-Mead, em seu formato tradicional, apresenta convergência lenta e é sujeito a processos de estagnação, em que não há avanço nos valores obtidos para a função objetivo sem que se tenha alcançado um valor razoável para ela. Vários aperfeiçoamentos ao algoritmo vêm sendo apresentados ao longo do tempo de forma a aprimorar sua convergência (RIOS e SAHINIDIS, 2013, p. 1.250).

b) Métodos de busca direta

Esse método contém duas etapas básicas. Na primeira, chamada de *searchstep*, o algoritmo faz uma exploração do espaço de procura: em determinada interação, faz-se a procura em um conjunto de pontos de modo a encontrar em ponto y tal que $f(y) < f(x_n)$, sendo que o conjunto de pontos é determinado, em geral, heurísticamente. Caso essa procura

tenha sido bem-sucedida, o algoritmo prossegue para a próxima iteração, sendo $x_{n+1} = y$. Caso contrário, faz-se $x_{n+1} = x_n$ e utiliza-se a segunda etapa.

A segunda etapa do algoritmo, chamada de *pollstep*, tem como fundamento uma base positiva do \square^k , digamos $G = \{d_1, d_2, \dots, d_p\}$, com $k+1 \leq p \leq 2k$. Dado esse conjunto específico de direções em determinada ordem, o algoritmo avalia a função objetivo em um conjunto de pontos P da forma $y = x_n + \alpha_n d_n$ até encontrar um ponto tal que $f(y) < f(x_n) - \rho \alpha_n$, sendo $\rho = \rho(t)$ contínua e decrescente tal que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(t)}{t} = 0$. Caso isso ocorra, fica estabelecido que $x_{n+1} = f(x_n + \alpha_n d_n)$, e as etapas são repetidas já na próxima iteração. Caso o ponto y não seja encontrado, fica estabelecido que $x_{n+1} = x_n$. (RIOS e SAHINIDIS, 2013, p. 1.250).

No caso de sucesso do *pollstep*, o tamanho do passo α_k pode ser mantido ou aumentado. No caso de insucesso, o tamanho do passo é reduzido (AUDET e DENNIS JR., 2003, p.891 e ss.).

Os algoritmos que serão descritos na próxima seção são muito semelhantes aos que foram descritos no subitem 2.3.4. Contudo, serão postos em destaque aqui porque o algoritmo escolhido como solver para o problema deste trabalho é um algoritmo livre de derivadas e que pertence a essa classe. O algoritmo escolhido trabalha com restrições em caixas.

c) Métodos baseados em região de confiança

Nos métodos baseados em região de confiança, dado um iterando x_n , a função objetivo f é aproximada por uma forma quadrática em uma região de confiança que é uma bola fechada B_n centrada em x_n e com raio Δ_n . A forma quadrática é dada por:

$$m_n(x_n + v_n) = f(x_n) + v_n^T g(x_n) + \frac{1}{2} v_n^T B(x_n) v_n, \quad (2.75)$$

em que g é um vetor de \square^k e B , uma matriz simétrica $k \times k$.

Para a determinação da forma quadrática (2.75), é utilizado o conjunto $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ formado por pontos em que os valores de f são conhecidos. Nesses pontos, deverão valer as seguintes igualdades:

$$m_n(y_i) = f(y_i), \text{ para } 1 \leq i \leq p, \quad (2.76)$$

o que mostra que m_n interpola a função objetivo nos pontos de Y . Ora, para que a forma quadrática (2.75) fique bem determinada, o conjunto Y deve ter, pelo menos, $p = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ pontos. É claro que esse número de pontos pode tornar-se excessivo para problemas de dimensão maior. No entanto, no caso de problemas com dimensão dessa ordem de grandeza, os desenvolvedores têm aplicado algumas estratégias para solucioná-lo (AROUXET, ECHEBEST e PILOTTA, 2011, p. 175 e ss.).

Note que o sistema (2.76) é um sistema com $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ equações e idêntico número de incógnitas. Para que a forma quadrática (2.75) fique perfeitamente determinada, a geometria dos pontos de Y deve ser tal que as colunas da matriz dos coeficientes do sistema (2.76) sejam linearmente independentes. Dessa forma, se $\{\phi_i\}_{i=1}^p$ for uma base para o espaço das formas quadráticas m_n :

$$m_n(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \phi_i(x), \text{ com } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^k. \quad (2.77)$$

De (2.76) e (2.77), valem as igualdades:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \phi_i(y_i) = f(y_i). \quad (2.78)$$

Ora, para que o sistema (2.78) tenha uma única solução, o conjunto de pontos Y deve ser tal que:

$$\begin{vmatrix} \phi_1(y_1) & \phi_2(y_1) & \dots & \phi_p(y_1) \\ \phi_1(y_2) & \phi_2(y_2) & \dots & \phi_p(y_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1(y_p) & \phi_2(y_p) & \dots & \phi_p(y_p) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.79)$$

Nesse caso, o conjunto Y é dito *bem-posto* (KARAKÖSEN, 2007, p.323).

Karakösen (2007, p. 324 e ss.) destaca alguns pontos adicionais a serem considerados: De modo análogo ao que foi visto em 2.3.4, após serem determinados o conjunto Y e a forma quadrática (2.75), o seguinte problema deve ser resolvido:

$$\min_{v_n \in B_n} m_n(x_n + v_n). \quad (2.80)$$

Como ocorre em 2.3.4, o passo v_n deve ser tal que haja um decréscimo suficiente para a função objetivo. Caso isso ocorra, estará definido o próximo iterando $x_{n+1} = x_n + v_n$ e ele deverá substituir um ponto do conjunto Y . Pode ocorrer, então, que Y deixe de ser bem-posto. No caso presente, o termo x_{n+1} deve ser tal que mantenha ou melhore a geometria do conjunto Y .

Outro ponto importante diz respeito à redução do raio da região de confiança. No subitem 2.3.4, caso exista um v_n solução de (2.64) e que leve a um decréscimo suficiente de f , o raio da região de confiança deve ser aumentado. Caso contrário, deverá ser diminuído. No caso presente, apenas a redução do raio da região de confiança não é garantia de que será obtido um decréscimo suficiente de f . A geometria do conjunto Y é fundamental para isso. Assim, em determinada iteração, ao ser aceito x_{n+1} como substituto de um ponto de Y , a

geometria desse conjunto deve ser trabalhada de modo a mantê-lo bem-posto. Só então deverá ser efetivada a redução do raio da região de confiança.

Um terceiro ponto é o critério de parada. Nos métodos baseados em gradiente, é comum considerar um possível critério, nos métodos baseados em região de confiança, que o gradiente da função objetivo seja menor que $\delta > 0$, sendo δ suficientemente pequeno. No caso presente, considerando que a forma quadrática m_n seja uma boa aproximação de f na região de confiança, o coeficiente $g_n = g(x_n)$ de (2.75) pode ser considerado uma aproximação para o gradiente de f em x_n . Portanto, um critério da parada pode ser $|g_n| < \delta$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Um dos algoritmos utilizados como “solver” do problema de quadrados mínimos não lineares presente neste trabalho baseia-se em regiões de confiança, sendo livre de derivadas. Ele é denominado BOBYQA (*Bounded Optimization by Quadratic Approximations*), tendo sido programado Fortran 77. Trata-se da extensão de um “solver” anterior desenvolvido pelo mesmo autor, que modificou este último para adaptá-lo a problemas com restrições do tipo caixa (POWELL, 2006, 2009).

Algumas características básicas do BOBYQA são as seguintes (AROUXET, ECHEBEST e PILLOTA, 2011, p. 175-176; POWELL, 2009):

(a) O menor valor r entre o raio da região de confiança e o raio do conjunto de pontos interpoladores é escolhido. Isso é feito de modo que os pontos interpoladores estejam suficientemente distantes, a fim de evitar a influência de erros nos valores da função objetivo. Portanto, o critério de mudança do raio da região de confiança em passos consecutivos do algoritmo obedece a uma estratégia refinada.

(b) O algoritmo tenta construir modelos quadráticos apropriados utilizando menos dados que os algoritmos tradicionais baseados em região de confiança. Supondo que um modelo quadrático m_n tenha $\frac{k(k+1)}{2}$ coeficientes a determinar, esse número ficaria muito elevado para problemas com dimensão alta.

(c) BOBYQA emprega uma adaptação do método do gradiente conjugado para regiões de confiança, a fim de minimizar a forma quadrática m_n nessas regiões.

(d) BOBYQA é aplicado a funções objetivo do tipo “black box”, isto é, funções cujos valores são resultados de uma subrotina. Não é exigida a existência de derivadas para função objetivo.

2.4. Estimativa de Parâmetros

A estimativa de parâmetros é uma técnica bastante antiga. Segundo Farebrother (1997, p. 456), até meados do século XVIII, os métodos de ajuste de problemas lineares e não lineares eram pouco formais e subjetivos. Segundo esse mesmo autor, Boscovich (1711-1787) foi o primeiro a apresentar, em 1760, um procedimento mais formal para o problema consistente na determinação dos parâmetros de uma relação. Estudando um problema relevante para a época, os parâmetros deveriam ser determinados de modo que a soma dos valores absolutos dos resíduos fosse mínima. Os resíduos seriam obtidos pelas diferenças entre os valores teóricos obtidos a partir da relação e os valores experimentais.

Para Boscovich, os valores dos resíduos encontrados eram desproporcionais dentro do contexto do problema estudado. Por seu turno, Laplace(1743-1827), estudando o mesmo problema, propôs, em 1783, uma técnica de estimativa de parâmetros que utilizava a minimização do máximo valor absoluto dos resíduos. Hoje, esse método é conhecido como minimax (FAREBROTHER, 1997, p. 457).

Tudo indica que os trabalhos mais antigos e rigorosos de estimativa de parâmetros foram desenvolvidos para o estudo do movimento planetário e dos cometas com dados obtidos a partir de observações ao telescópio. Ao estudar esses movimentos, que podem ser descritos por completo a partir de seis parâmetros, Gauss (1777-1855) criou o Método dos Quadrados Mínimos, tendo publicado os respectivos resultados em 1809 (SORENSEN, 1970, p. 63 e ss.).

De acordo com Tarantola (2005), considera-se que, ao se ter um sistema completamente determinado, é possível fazer a previsão de algumas medidas. Esse processo é denominado “problema direto”. O problema inverso consiste no seguinte: dados os resultados de algumas medidas, emprega-se alguma metodologia para estabelecer, mesmo que aproximadamente, os parâmetros que caracterizam o sistema. É importante observar que, no caso geral, os dados a partir dos quais devem ser resgatados os parâmetros do sistema que os determinam podem ser de dois tipos: contínuos, como os valores de uma função do tempo, ou discretos, como dados obtidos de experimentos. Neste trabalho, a estimativa de parâmetros será feita a partir de dados discretos.

A estimativa de parâmetros pode ser uma das fases mais importantes e uma das mais difíceis da modelagem matemática, sendo utilizada quando já existe um conjunto de relações matemáticas candidatas a descrever o fenômeno que está sendo modelado. Essas relações podem ser bem complexas, dependendo da multiplicidade e das interdependências existentes entre as variáveis do modelo estudado. Os parâmetros presentes nas relações deverão ajudar a descrever grandezas que ajudarão a compreender aspectos importantes do modelo, que poderão mesmo estar inacessíveis.

Como visto, um método de estimativa de parâmetros é aplicado quando já se conhecem alguns dados referentes às variáveis do sistema. A ideia básica consiste em determinar parâmetros que permitam, a partir das equações, encontrar valores para as variáveis do sistema os mais próximos possíveis dos valores empíricos. Nesse caso, o sistema está ajustado aos dados.

As equações que definem o sistema cujos parâmetros deverão ser inferidos no método de estimativa de parâmetros podem ser algébricas, diferenciais ordinárias, diferenciais parciais ou mesmo equações integrais. Para atacar o problema da estimativa dos parâmetros que ajustem com mais precisão o sistema aos dados empíricos, podem ser utilizados diversos métodos numéricos encontrados em ampla literatura (SCHITTKOWSKY, 2002; BURDEN e FAIRES, 2009; CHAPRA e CANALE, 2008; STOER e BURLIRSCH, 2010).

Muitas são as aplicações da estimativa de parâmetros que podem ser encontradas nos mais diversos campos do conhecimento. De acordo com o interesse do pesquisador, os algoritmos utilizados podem ser determinísticos, estocásticos ou constituídos pela junção de algoritmos de ambos os tipos.

2.5. Estimativa de Parâmetros e Quadrados Mínimos

Para efeito de contextualização e simplicidade, a discussão travada a seguir se baseia no tipo de modelo elaborado neste trabalho.

O modelo a ser desenvolvido aqui é um sistema de equações diferenciais da forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{m}), \quad (2.81)$$

em que $\mathbf{x} = (x_1(t, \mathbf{m}), x_2(t, \mathbf{m}), \dots, x_k(t, \mathbf{m}))$ é a variável de estado, t com $t_{min} \leq t \leq t_{max}$ representa o tempo e $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_q)$ é um vetor de parâmetros associados ao modelo; por último, $\dot{\mathbf{x}}$ é o vetor cujas componentes são as derivadas de x_i em relação a t , $1 \leq i \leq k$ e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{k+q+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma função vetorial cujos componentes são $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{m}) = (f_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{m}), f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{m}), \dots, f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{m}))$. O sistema (2.81) será denominado, daqui em diante, de *sistema fundamental*.

No caso particular em estudo, o vetor $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{m})$ é bidimensional, tendo, portanto, duas componentes, que são a produção de mel $x_1(t, \mathbf{m}) = P$ e o capital humano $x_2(t, \mathbf{m}) = h$ empregado na produção. O sistema (2.81) possuirá, no caso, duas equações.

Suponha que sejam conhecidos os valores de produção e do capital humano em vários instantes t_i , $1 \leq i \leq s$, que definem os vetores $\hat{\mathbf{x}}_i = (\hat{x}_{1,i}, \hat{x}_{2,i})$, com $t_{min} \leq t_i \leq t_{max}$. A ideia do método de estimativa de parâmetros consiste em descobrir um vetor de parâmetros \mathbf{m} de forma que se encontre uma solução de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{m})$ de (2.81) tal que a soma $\sum_{i=1}^s \|\mathbf{x}(t_i, \mathbf{m}) - \hat{\mathbf{x}}_i\|_2^2$ seja mínima, com t_i , $1 \leq i \leq s$ como definidos anteriormente. Em outros termos, o que se deseja minimizar é a seguinte expressão:

$$\left(\sum_{i=1}^s \|\mathbf{x}(t_i, \mathbf{m}) - \hat{\mathbf{x}}_i\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^2 |x_j(t_i, \mathbf{m}) - \hat{x}_{j,i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.82)$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^s \|\mathbf{x}(t_i, \mathbf{m}) - \hat{\mathbf{x}}_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^2 |x_j(t_i, \mathbf{m}) - \hat{x}_{j,i}|^2, \quad (2.83)$$

conforme o vetor de parâmetros \mathbf{m} percorra o espaço dos vetores de parâmetros para os quais faça sentido a equação (2.80).

Desse ponto em diante, será omitido o vetor de parâmetros \mathbf{m} , a não ser quando sua explicitação facilite o entendimento. Assim, por exemplo, $\mathbf{x}(t, \mathbf{m})$ será escrito simplesmente como $\mathbf{x}(t)$.

Existem dois casos a considerar:

a) A solução do sistema fundamental é uma combinação linear de funções básicas, ou seja, funções que formam uma base para o espaço de soluções. Nesse caso, a solução de (2.81) pode ser escrita como:

$$x_j(t) = \sum_{r=1}^l c_{rj} f_r(t), \quad (2.84)$$

sendo $j = 1, 2$. Portanto, para $t = t_i$, com $1 \leq i \leq s$ e $t_{min} \leq t_i \leq t_{max}$, a igualdade (2.84) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$x_j(t_i) = \sum_{r=1}^l c_{rj} f_r(t_i) = \sum_{r=1}^l a_{ir} c_{rj}, \quad (2.85)$$

em que $a_{ir} = f_r(t_i)$. Substituindo (2.85) em (2.84):

$$\sum_{i=1}^s \| \mathbf{x}(t_i, \mathbf{m}) - \hat{\mathbf{x}}_i \|_2^2 = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^2 \left| \sum_{r=1}^l a_{ir} c_{rj} - \hat{x}_{j,i} \right|^2 = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^s | \mathbf{A}_i \mathbf{c}_j - \hat{x}_{j,i} |^2, \quad (2.86)$$

sendo \mathbf{A}_i a i -ésima linha da matriz $s \times l$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sl} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

e \mathbf{c}_j o vetor coluna:

$$\mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{lj} \end{bmatrix}. \quad (2.88)$$

Portanto, a ideia de (2.83) ser minimizada pode ser pensada como a de ser achada uma solução aproximada para o sistema linear de s equações e l incógnitas:

$$\mathbf{A} \mathbf{c}_j = \hat{\mathbf{x}}_j, \quad (2.89)$$

para $j = 1, 2$.

Dessa forma, a minimização de (2.83) pode ser reinterpretada como encontrar-se um vetor \mathbf{c}_j de forma que o vetor $\mathbf{A} \mathbf{c}_j$ esteja o mais próximo possível de $\hat{\mathbf{x}}$.

O problema que consiste em minimizar (2.83) pode ser reduzido ao de se encontrar uma solução para o sistema de equações normais:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{c}_j = \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{x}}, \quad (2.90)$$

em que A^T representa a transposta da matriz A (ASTER, BORCHERS e THURBER, 2011, p. 298 e ss.).

Se a matriz A for quadrada e invertível, a solução de (2.90) é também uma solução de (2.88). Contudo, no caso geral, A não precisa ser invertível, nem mesmo quadrada.

Se A for tal que $s \geq l$, ou seja, se o sistema (2.89) tiver um número de equações maior que – ou igual a– o número de incógnitas, é um resultado conhecido de Álgebra Linear que, nesse caso, a matriz $A^T A$ é invertível. Portanto, estará garantida a existência de uma solução de (2.82) (STRANG, 2006, p. 107-109). De acordo com Schewchuk (1994, p. 41), nesse caso pode ser utilizado o MGC linear para resolver (2.89).

b) A solução do sistema fundamental não é uma combinação linear de funções que formam uma base para o espaço de soluções. Trata-se do caso mais comum no trabalho com equações diferenciais. Aqui, o processo de se calcular o mínimo de (2.82) caracteriza-se por ser não linear, ou seja, não pode ser reduzido ao cálculo de soluções aproximadas de sistemas lineares.

Para a solução de problemas desse tipo, existem vários métodos já consagrados na literatura, como os métodos de Gauss-Newton e o de Levenberg-Marquardt (NOCEDAL e WRIGHT, 2006, p. 254-259), que são casos particulares do método de Newton descrito na Seção 2.3.1. Há também os métodos do Gradiente Conjugado não lineares, descritos na mesma seção. No presente trabalho, além de um Método do Gradiente Conjugado não linear, também foi utilizado o algoritmo baseado em região de confiança BOBYQA (ver Seção 2.3.4).

2.6. A Produção Apícola no Brasil: breve histórico e problemas de produtividade

No Brasil pré-colonial, já havia cultivo de abelhas nativas, sem ferrão, para a obtenção de mel. Eram os primórdios do que hoje conhecemos como meliponicultura.

Segundo Silva (2010), abelhas com ferrão foram introduzidas no país pelo padre jesuíta Antônio José Pinto Carneiro. Ele importou as abelhas da cidade do Porto (Portugal), mediante autorização do Decreto nº 72, de 12 de julho de 1839, com o intuito de se criar o Apiário Imperial na Vila Formosa, Rio de Janeiro. Esse seria o início da apicultura no país.

No sul do país, ainda na década de 1840, imigrantes alemães introduziram abelhas do tipo *Apismellifera*. Essas abelhas são conhecidas como abelhas pretas ou alemãs e foram as mesmas trazidas pelo padre Antônio José Pinto Carneiro, algum tempo antes.

Na década de 1870, foram introduzidas, no sul da Bahia, as abelhas do tipo italiano ou *Apismelliferalingustica* (EMBRAPA, 2003).

Paula (2008) relata que não há como negar a importância dos imigrantes para o desenvolvimento da apicultura no país. Porém, nessa fase inicial de sua implantação, a atividade não tinha finalidade econômica, sendo encarada apenas como um *hobby*.

De acordo com Soares (2004), foi em 1956 que a situação recém-exposta começou a mudar. Nesse ano, as abelhas africanas foram introduzidas no Brasil com a finalidade de se realizarem experimentos de melhoria genética. A *Apismelliferascutellata* é conhecida por sua alta produtividade e poder de adaptação. Por outro lado, podem ser muito agressivas e dispersarem-se facilmente por enxameação ou abandono da colmeia, havendo, em ambos os casos, queda na produtividade. O trabalho de melhoria genética da *Apismelliferascutellata* tinha por objetivo diminuir a agressividade dessas abelhas, aproveitando seu alto potencial de produtividade.

Segundo o mesmo autor, por um manejo equivocado das abelhas africanas mantidas em confinamento, muitas de suas colmeias foram abandonadas. Ao se espalharem pelas várias regiões do país, essas abelhas miscigenaram-se com as abelhas aqui existentes, dando origem à abelha poli-híbrida africanizada.

No início, pela falta de experiência dos apicultores em lidar com as abelhas africanizadas, houve um quase abandono da atividade apícola no país. Aconteceram vários acidentes, com a morte de animais e pessoas. O aspecto positivo desse processo foi que toda uma base de conhecimento foi e tem sido gerada na tentativa de melhor compreender o comportamento dessas abelhas. É importante mencionar que investimentos têm sido feitos em pesquisas para que se entenda o comportamento também de outras espécies.

De maneira geral, a apicultura no país tem sido praticada, ao longo dos anos, por pequenos e médios produtores. Muitos formaram associações e cooperativas, recebendo autorização do Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento (MAPA) para participar do mercado de mel fracionado e demais produtos apícolas no país (GOLINSKY, 2009).

Várias práticas indicam o bom nível tecnológico da produção apícola, as quais servem como referentes para o nível de produtividade da atividade específica. A seguir, são mencionados dois casos de pesquisa que exemplificam o uso de tecnologia na apicultura. No primeiro caso, são apontadas algumas razões para o uso insuficiente das tecnologias e as consequências que esse pouco uso pode trazer.

Golinsky (2009) aponta a lotação de colmeias por apicultor como um indicador da quantidade de colmeias por produtor. Quanto maior o número de colmeias por região (e, portanto, por apicultor), melhor será o aproveitamento de mão de obra, transporte, beneficiamento e comercialização da produção apícola, tudo isso respeitada a capacidade de suporte do pasto apícola. Assim, uma alta lotação de colmeias em determinada região é indicador de um bom gerenciamento da produção pelos apicultores. Nesse caso, há uma boa aplicação de tecnologia de gerenciamento de produção ou logística. No caso do estado do Rio de Janeiro, o autor reporta baixa lotação de colmeias.

Referendando o que já foi dito, o mesmo autor indica que própolis é um subproduto das atividades das abelhas nas colmeias que requer conhecimento e tecnologia em seu processamento. A produção de própolis não foi apresentada na maioria dos municípios que foram objeto do estudo. Há também baixa produção de geleia real e cera. Esses produtos também requerem maior conhecimento e tecnologia em seu processamento. Segundo o autor, a baixa produção reflete o baixo nível tecnológico e a pouca instrução dos produtores. Isso refletiria na dificuldade de acesso a crédito e assistência técnica.

Alguns insumos, como cera alveolada e alimentos proteicos, podem servir para manter a produtividade dos apiários, em períodos de oferta escassa, na natureza, de forragem para as abelhas. A pesquisa do autor mostrou pouco impacto nos custos de produção desse tipo de insumo. A quase ausência da utilização dessa tecnologia reflete na baixa produtividade dos apiários nos períodos de pouca florada e na perda de enxames.

A pesquisa levou o autor a concluir que o nível de assistência técnica recebida pelos produtores é muito baixo. Segundo ele, esse é um indicador importante do nível tecnológico dos pequenos produtores. Tal situação apontaria para baixa produtividade na atividade e pouca diversificação na produção, haja vista que a produção de mel foi praticamente exclusiva na maior parte dos municípios estudados.

Khan, Matos e Lima (2009), ao fazerem uma análise do desempenho da apicultura no estado do Ceará,⁹ também traçam o perfil tecnológico de produtores naquele estado. Vale lembrar que a pesquisa foi realizada nos municípios considerados maiores produtores de mel.

Os autores mostraram maior presença, entre os produtores, das tecnologias ligadas à colheita do produto. Algumas dessas tecnologias consistem em: uso de fumaça na melgueira durante a colheita; uso de garfo desorpeculador; existência de casa do mel, entre outras.

A pesquisa detectou que a maioria dos apicultores pesquisados não faz uso de tecnologias de manejo, quais sejam: substituição de abelhas-rainhas; divisão dos enxames;¹⁰ construção de espaços para ventilação das colmeias etc.

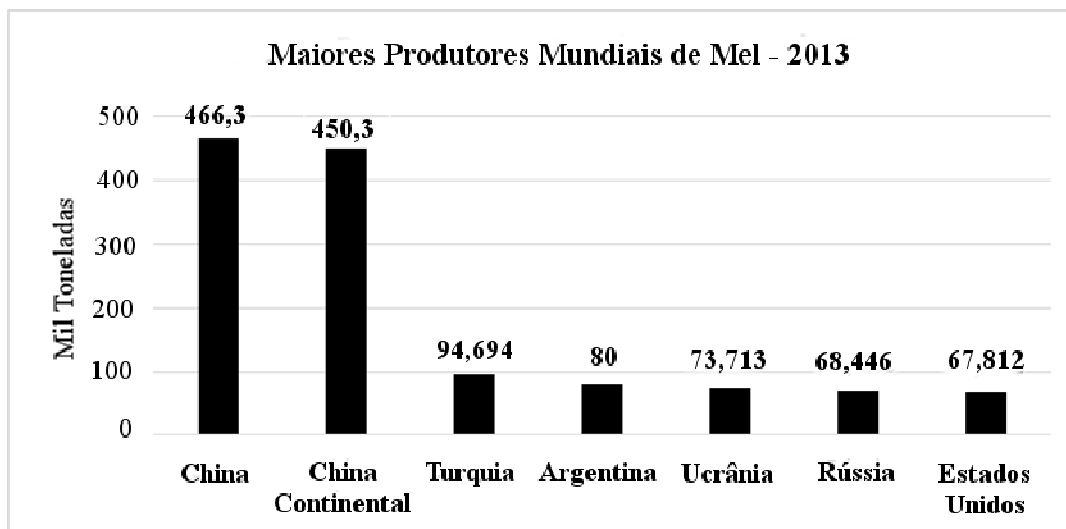
Nos municípios pesquisados, há também um baixo índice de aplicação do que os autores chamam de tecnologias pós-colheita. Nesse caso, não há cuidado com a estocagem do mel, que é armazenado em locais com níveis de calor e umidade não recomendados. Além disso, na maioria dos casos, o mel é fracionado manualmente, o que revela uma pequena produção para a maioria dos apicultores.

A pesquisa aponta ainda o baixo nível no uso das tecnologias de gestão, como, por exemplo, uso precário de informática; ausência de parceria com instituições de pesquisa; não contratação de serviços de marketing e falta de treinamento dos empregados.

Outros pontos de estrangulamento importantes para a produção apícola, que certamente têm reflexo no uso insuficiente de certas tecnologias, foram: baixo nível de assistência técnica; baixo nível de escolaridade dos apicultores; baixo nível de capital social na formação do empreendimento e dificuldade de acesso a crédito.

2.7. A Produção de Mel no Estado do Rio de Janeiro: Contexto e Situação Atual

O mercado mundial de mel é bastante competitivo, envolvendo quantidades e montantes bem significativos (ver Figura 6).



Fonte: FAOSTAT.

Figura 6. Sete maiores produtores de mel.

⁹ O Ceará está entre os oito maiores produtores de mel do Brasil (IBGE, 2014).

¹⁰ A divisão de enxames é uma técnica que deve ser empregada quando o produtor percebe que uma colmeia está muito populosa (EMBRAPA, 2003).

Nesse ano, o Brasil ficou situado em décimo segundo lugar, com uma produção da ordem de 35 mil toneladas.

A Tabela 1 dá uma ideia do volume exportado da commodity pelos seis exportadores. Nela, também estão incluídos os montantes envolvidos. Os países estão ordenados pelo valor das exportações de cada país no ano de 2011.

Tabela 1. Seis maiores exportadores ordenados pelo valor das exportações.

País	Volume Exportado (Toneladas)	Valor (Mil Dólares)
Argentina	72.356	223.448
China	101.463	205.511
China Continental	99.988	201.375
Alemanha	18.496	114.152
México	26.888	90.359
Espanha	18.771	80.280
Índia	28.940	76.377

Fonte: FAOSTAT.

É interessante notar nessa tabela que a Argentina está situada em primeiro lugar em termos do montante auferido em exportações, embora, em relação à China, o volume exportado tenha sido menor. Tudo indica que essa situação resulta das exigências feitas pelo mercado com relação à qualidade do mel. Em valor exportado, o Brasil ficaria situado, em 2011, em sétimo lugar, logo após a Índia.

Números mais atualizados, divulgados pela Associação Brasileira dos Exportadores de Mel (Abemel), apontam que as exportações brasileiras de mel foram bastante significativas em 2014, na ordem de aproximadamente 25.317 toneladas, correspondentes a um montante estimado em cerca de US\$ 98 milhões. Esse valor correspondeu a um aumento de 82% em comparação a 2013. Ainda segundo a Abemel, esse aumento significativo das exportações desse produto no país deveu-se não só ao câmbio favorável, como também à qualidade do mel produzido (ABEMEL, 2015).

No país, a maior região produtora é a região Sul, com uma produção média, entre 2000 e 2013, de aproximadamente 15.385 toneladas. Em segundo e terceiro lugares, estão as regiões Nordeste e Sudeste, nessa ordem, com uma produção média, no mesmo período, de 10.046 e 5.714 toneladas, respectivamente (IBGE, 2015).

Tomando ainda como base a produção média de 2000 a 2013, o maior estado produtor do país é o Rio Grande do Sul, seguido de Paraná, Santa Catarina e Piauí. O estado do Rio de Janeiro aparece somente em décimo quarto lugar, com aproximadamente 360 toneladas. Na região Sudeste, esse estado fica em quarto lugar (IBGE, 2015).

Algumas poucas variáveis servem para esclarecer a modesta posição do Rio de Janeiro na produção nacional de mel.

Em primeiro lugar, a economia do Rio de Janeiro está fundamentalmente baseada no setor de serviços, que respondeu em 2012, por 67,38% do PIB estadual. Nesse setor, é possível destacar as atividades de seguridade social, educação pública e saúde, responsáveis por 17,93% desse total. O segundo setor com maior peso no PIB do estado, no mesmo ano, foi o industrial, com uma fatia de 32,19% do PIB, tendo na indústria de extração de petróleo e outros minerais sua principal fonte de receita. O setor agropecuário respondeu por apenas 0,43% do PIB estadual (CEPERJ, 2014).

A produção agropecuária estadual está centrada na produção animal, que ocupa uma área de aproximadamente 1.545.000 hectares. Os cultivos de maracujá, feijão, arroz e milho ocupam uma área de, aproximadamente, 337.000 hectares. A apicultura, apesar de todo o seu potencial de renda para o pequeno e médio produtor, e de ser um instrumento de fixação do homem nas áreas rurais, ainda é pouco desenvolvida no estado (TASSINARI, LORENZÓN e PEIXOTO, 2013, p. 554).

Segundo Golinski (2009, p. 20), em 2004 o governo do estado do Rio de Janeiro criou a Câmara Setorial de Apicultura. Formada por vários órgãos ligados ao setor, suas atribuições estariam ligadas à procura de soluções de déficits endêmicos do setor apícola do estado, como baixa produtividade, dificuldade de comercialização da produção e falta de profissionalização dos produtores.

Segundo estudos recentes, a situação do setor apícola no estado pouco tem mudado desde a criação dessa Câmara. De acordo com levantamento feito por Lorenzón et al. (2012), a maioria dos apicultores do estado é considerada de porte pequeno ou muito pequeno, com menos de cinquenta colmeias. A maioria dos produtores exerce essa atividade há pouco tempo, tendo a pesquisa sugerido que se registra alto índice de evasão na atividade. Um importante indicador é que 92% dos produtores têm a apicultura como atividade complementar.

A produtividade do setor tem continuado baixa. A maioria dos apicultores está abaixo da média do estado na produção por colmeia, assim como na produção por apicultor. De acordo com o levantamento já apontado, 48% dos municípios pesquisados têm uma produtividade de 10kg de mel/colmeia/ano, bem abaixo da média nacional, que é de 15 kg de mel/colmeia/ano. Segundo o estudo, esses indicadores apontam para a alta porcentagem de diletantes entre os apicultores, desvinculados de órgãos de classe e com pouco ou nenhum suporte tecnológico (LORENZÓN et al., 2012, p. 87).

3. MATERIAIS E MÉTODOS

Neste trabalho, o processo de determinação dos parâmetros é iniciado pelo estabelecimento dos valores iniciais para a produção e o capital humano. No caso, esses valores foram escolhidos de modo que coincidisse com os valores dessas variáveis no valor de t inicial. Também são fixados valores iniciais para componentes do vetor de parâmetros \mathbf{m} . Foi utilizado um método de Runge-Kutta de quarta ordem para resolver um problema de valor inicial do tipo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (f_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{m}), f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{m})) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

e outro, derivado do primeiro:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{(-1)^\sigma}{K} f_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{m}), f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{m}) \right), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

onde, de maneira inteiramente análoga ao que ficou definido em (2.4.1), $\mathbf{x}(t, \mathbf{m}) = (x_1(t, \mathbf{m}), x_2(t, \mathbf{m}))$ é o vetor cuja primeira componente é a produção de mel e a segunda componente é o capital humano, sendo \mathbf{m} o vetor de parâmetros a ser determinado e $t_{min} \leq t \leq t_{max}$. $f_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{m})$ e $f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{m})$ são funções vetoriais dependentes de t , \mathbf{x} e \mathbf{m} .

Seja $\hat{\mathbf{x}}_i = (\hat{x}_{1,i}, \hat{x}_{2,i})$, $t_{min} \leq t_i \leq t_{max}$, $1 \leq i \leq s$ vetores com valores já conhecidos da produção de mel e do capital humano. No caso do sistema (3.2), se $\bar{x}_{1,i+1} - \bar{x}_{1,i} \geq 0$, será posto $\sigma = 2$. Se for $\bar{x}_{1,i+1} - \bar{x}_{1,i} < 0$, será usado o valor $\sigma = 1$. A constante K é sempre positiva.

Como $\hat{\mathbf{x}}_i = (\hat{x}_{1,i}, \hat{x}_{2,i})$, $t_{min} \leq t_i \leq t_{max}$, $1 \leq i \leq s$ são vetores com valores já conhecidos da produção de mel e do capital humano, espera-se que as soluções de (3.1) e (3.2) satisfaça a:

$$\min_{\mathbf{m} \in M} \sum_{i=1}^s \|\mathbf{x}(t_i, \mathbf{m}) - \hat{\mathbf{x}}_i\|_2^2, \quad (3.3)$$

para $t_{min} \leq t_i \leq t_{max}$, sendo M o conjunto dos vetores de parâmetros \mathbf{m} . Isso é feito verificando-se se a soma $\sum_{i=1}^s \|\mathbf{x}(t_i, \mathbf{m}) - \hat{\mathbf{x}}_i\|_2^2$ é menor que uma margem de erro preestabelecida.

Caso essa diferença seja menor que a margem de erro considerada, o vetor de parâmetros \mathbf{m} fixado determina os parâmetros procurados. Aqui, há duas possibilidades a

considerar: quando, em um primeiro momento, foi aplicado o Método do Gradiente Conjugado não linear, se não ocorreu a diferença ser menor que a margem de erro considerada, o vetor de parâmetros fixado será o valor inicial \mathbf{m}_0 de um processo de minimização, que consiste em encontrar um vetor de parâmetros \mathbf{m} que minimize (3.3).

Nesse processo de minimização, foi empregada uma variação do Método do Gradiente Conjugado não linear aplicado a problemas de otimização com restrições não negativas (LI, 2013).

Em um segundo momento, como “solver” para (3.3), com \mathbf{m} percorrendo todo o espaço de vetores possíveis de parâmetros, foi utilizado o programa BOBYQA (ver Seção 2.3.4).

Portanto, neste trabalho, após ser aplicado um dos “solvers”, seja o MGC não linear ou o BOBYQA, a (3.3), um novo conjunto de parâmetros é encontrado para (3.1) ou (3.2), conforme o caso.

Os diagramas das Figuras 7 e 8 ilustram todo o processo.

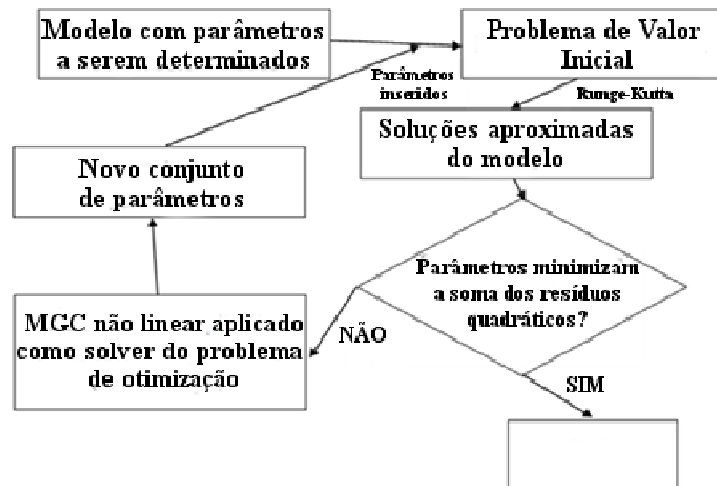


Figura 7. Fluxograma do algoritmo desenvolvido com o MGCL não linear.

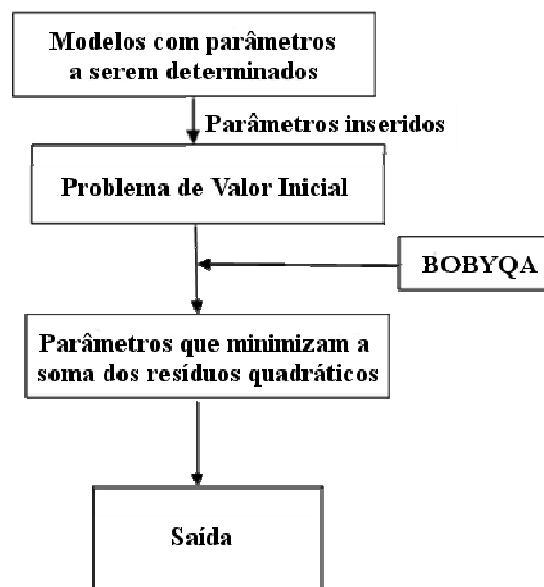


Figura 8. Fluxograma do algoritmo desenvolvido com o BOBYQA.

Todo esse procedimento foi codificado na linguagem Fortran 95. Como Ambientes de Desenvolvimento Iterativos, foram utilizados (IDE), o Visual Studio™ 2010, quando em ambiente Windows, e o Codeblocks versão 3.12, quando em ambiente GNU Linux. Os compiladores empregados foram o Intel Visual Fortran Composer XE™ 2011, quando no Windows, e o GNU Fortran versão 4.9.1, quando no Linux.

3.1. Construção do Modelo Matemático

O modelo que será proposto a seguir tem os mesmos pressupostos do Modelo de Lucas, apresentado na Seção 2.1.3. As equações desse modelo serão escritas novamente aqui para facilitar a consulta:

$$N(t)c(t) + \dot{K}(t) = AK(t)^\alpha [u(t)H(t)]^{1-\alpha} h_a^\gamma(t), \quad (3.4)$$

$$\dot{h}(t) = B(1-u(t))h(t), \quad (3.5)$$

sendo K o capital físico, N é a força de trabalho, H é o capital humano total disponível, u é a força de trabalho aplicada na produção. Mais ainda, c representa o consumo, h é o capital humano *per-capita*, A é o índice de tecnologia aplicado à produção e B é o índice de tecnologia aplicado à produção de capital humano. Por último, h_a^γ representa os efeitos externos do capital humano.

As equações (3.4) e (3.5) foram escolhidas como base para o trabalho aqui desenvolvido pelas seguintes razões: conseguem descrever a evolução de economias ao longo do tempo e, com algumas simplificações, é possível chegar a uma equação que tenha como variável a produção. Outra razão para a adoção dessas equações foi considerar a importância do capital humano para a evolução econômica. Outrossim, apesar do modelo de Lucas ser tido como função precípua a descrição de uma economia no sentido macroeconômico, ele é micro-referenciado. Isso significa que ele também é útil para descrever fenômenos microeconômicos, como no caso deste estudo.

O modelo empregado no presente trabalho tem como foco a produção de mel, portanto a parcela mais à esquerda no primeiro membro da primeira equação de (3.4) será desconsiderada, pois está relacionada ao consumo. Além disso, o fator $h_a(t)$ no segundo membro da mesma equação refere-se ao efeito do capital humano sobre a economia como um todo. Como o foco deste trabalho é estudar a produção de mel em nível microeconômico, esse fator será desprezado. Para tanto, basta fazer, em (3.4), $\gamma=0$, substituição que produzirá $h_a(t)^\gamma = 1$.

Assim, reescrevendo-se a equação (3.4) já sem os termos $N(t)c(t)$ e $h_a(t)^\gamma$, ela assume a seguinte forma:

$$\dot{K} = AK^\alpha [uH]^{1-\alpha}, \quad (3.6)$$

em que a variável t foi omitida por questão de simplicidade. Aliás, daqui em diante, essa variável será omitida com frequência.

Por outro lado, como a apicultura é uma atividade não intensiva de mão-de-obra, pode-se considerar que $\dot{N} = 0$, ou seja, a variação da mão de obra é desprezível ao longo do tempo.

Como $H = hN$, a variável h pode ser explicitada como: $h = \frac{H}{N}$. Portanto, ao substituir em (3.5), obtém-se a seguinte igualdade:

$$\overbrace{\left(\frac{H}{N}\right)}^{\dot{\quad}} = B(1-u) \frac{H}{N} \quad (3.7)$$

Em que a fração como um todo, dentro dos parênteses, está sendo derivada.

Como a mão de obra N empregada na produção é constante, a equação (3.7) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\dot{H}}{N} = B(1-u) \frac{H}{N}. \quad (3.8)$$

Ao cancelar N em ambos os membros de (3.8), obtém-se a seguinte equação:

$$\dot{H} = B(1-u)H. \quad (3.9)$$

A partir das equações (3.6) e (3.9) será deduzido o modelo utilizado.

Seja $P = P(t)$ a produção no instante t . De acordo com Varian (2012, p. 355 e ss.), o segundo membro de (3.6) é a função de produção de Cobb-Douglas $P(t) = AK^\alpha(uH)^{1-\alpha}$, que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P = AK^\alpha u^{1-\alpha} H^{1-\alpha}. \quad (3.10)$$

Portanto, expressando o valor de K em (3.10):

$$K = P^{\frac{1}{\alpha}} A^{-\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}. \quad (3.11)$$

Ao derivar os dois membros de (3.11), segue que:

$$\dot{K} = A^{-\frac{1}{\alpha}} \overbrace{\left(P^{\frac{1}{\alpha}}\right)}^{\dot{\quad}} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + A^{-\frac{1}{\alpha}} P^{\frac{1}{\alpha}} \overbrace{\left(u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)}^{\dot{\quad}} H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + A^{-\frac{1}{\alpha}} P^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \overbrace{\left(H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)}^{\dot{\quad}}, \quad (3.12)$$

em que foi utilizado o fato, mencionado anteriormente, de que o índice de tecnologia A é constante.

Ao desenvolver as derivadas do segundo membro de (3.12), obtém-se a seguinte igualdade:

$$\dot{K} = \frac{1}{\alpha} P^{\frac{1}{\alpha}-1} \dot{P} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right) P^{\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \dot{u} H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right) P^{\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \dot{H}. \quad (3.13)$$

Por outro lado, ao substituir \dot{K} obtido em(3.13) no primeiro membro de (3.6), fica estabelecida a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{\alpha} P^{\frac{1}{\alpha}-1} \dot{P} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right) P^{\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \dot{u} H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right) P^{\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \dot{H} = P, \quad (3.14)$$

em que o segundo membro de (3.6) é a função de produção de Cobb-Douglas P .

Se os dois membros (3.14) forem multiplicados por $\alpha P^{1-\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} H^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$, será obtido:

$$\begin{aligned} & \alpha P^{1-\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} H^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(\frac{1}{\alpha} P^{\frac{1}{\alpha}-1} \dot{P} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right) P^{\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \dot{u} H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right) P^{\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \dot{H} \right) \\ & = \alpha P^{1-\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} H^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} P. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ora, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma, (3.15) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \alpha P^{1-\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} H^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(\frac{1}{\alpha} P^{\frac{1}{\alpha}-1} \dot{P} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) + \alpha P^{1-\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} H^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(\left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right) P^{\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \dot{u} H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) \\ & + \alpha P^{1-\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} H^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(\left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right) P^{\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \dot{H} \right) = \alpha A^{\frac{1}{\alpha}} P^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}} (uH)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

No segundo membro de (3.16), os termos em u e H foram agrupados sob o mesmo expoente e os termos em P foram multiplicados.

Efetuando as multiplicações dos termos semelhantes em (3.16), já desprezando os termos resultantes com expoentes nulos, fica estabelecida a equação seguinte:

$$\dot{P} + (\alpha - 1)P \frac{\dot{H}}{H} + (\alpha - 1)P \frac{\dot{u}}{u} = \alpha P^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} (uH)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}. \quad (3.17)$$

Considerando H_p o capital humano utilizado na produção de mel, como u é a porcentagem do capital humano utilizada na produção, vale que $u = \frac{H_p}{H}$. Se os dois membros dessa igualdade forem derivados, segue que:

$$\dot{u} = \frac{\dot{\left(\frac{H_p}{H}\right)}}{\left(\frac{H_p}{H}\right)} = \frac{\dot{H}_p H - H_p \dot{H}}{H^2}. \quad (3.18)$$

Portanto, segue de (3.18):

$$\dot{u} = \frac{\dot{H}_p H}{H^2} - \frac{H_p \dot{H}}{H^2} = \frac{\dot{H}_p}{H} - \frac{H_p}{H} \frac{\dot{H}}{H}. \quad (3.19)$$

Como a apicultura é desenvolvida ainda com dificuldade no país e basicamente por pequenos e médios apicultores, o capital humano aplicado à produção pode ser considerado constante, o que significa que \dot{H}_p pode ser tido como nulo. Como $u = \frac{H_p}{H}$, a igualdade (3.19) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{u} = -\frac{\overbrace{H_p}^u}{H} \frac{\dot{H}}{H}, \quad (3.20)$$

ou seja:

$$\frac{\dot{H}}{H} = -\frac{\dot{u}}{u}. \quad (3.21)$$

Levando (3.21) em (3.17):

$$\dot{P} - (\alpha - 1)P \frac{\dot{u}}{u} + (\alpha - 1)P \frac{\dot{u}}{u} = \alpha P^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} (uH)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad (3.22)$$

de onde se deduz que:

$$\dot{P} = \alpha A^{\frac{1}{\alpha}} (uH)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} P^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}, \quad (3.23)$$

ou seja, a equação que relaciona produção e capital humano que será adotada. A equação que representa a variação do capital humano é a mesma de (3.9).

Escrevendo (3.23) e (3.9) em um mesmo sistema:

$$\begin{cases} \dot{P} = \alpha A^{\frac{1}{\alpha}} (uH)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} P^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}} \\ \dot{H} = B(1-u)H \end{cases}. \quad (3.24)$$

Esse será um dos modelos a serem trabalhados.

Para que se leve em consideração, em (3.24), a possibilidade de a produção P ser decrescente em certo intervalo de tempo, será introduzida a *produção média* no instante t . A produção média P_{med} no instante t é definida como:

$$P_{med}(t) = (-1)^{\sigma} \frac{P(t)}{N_{op}}, \quad (3.25)$$

Em que N_{op} é o número de médio de trabalhadores na produção no instante t , sendo σ par se a produção for crescente no instante t e σ ímpar se a produção for decrescente em dado instante.

É razoável supor que, ao se considerarem A e H constantes, quanto maior for P_{med} em certo intervalo, maior será a taxa de crescimento da produção. Ao contrário, se a produção média for decrescente em certo intervalo de tempo, sendo, portanto, negativa nesse intervalo, maior será a taxa de decrescimento da produção, sendo, portanto, negativa. Portanto, ao introduzir o fator P_{med} no segundo membro da equação de produção de (3.24), o outro modelo matemático a ser trabalhado assume a seguinte forma:

$$(3.26) \quad \begin{cases} \dot{P} = \frac{\alpha(-1)^{\sigma} A^{\frac{1}{\alpha}} (uH)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} P^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}}}{N_{op}} \\ \dot{H} = B(1-u)H \end{cases}.$$

3.2. Validação dos Modelos

Daqui em diante, o modelo representado pelas equações (3.24) será denominado Modelo A. Somente para facilitar a consulta às equações, o modelo será reescrito aqui:

$$\text{Modelo A: } \begin{cases} \dot{P} = \alpha A^{\frac{1}{\alpha}} (uH)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} P^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}} \\ \dot{H} = B(1-u)H \end{cases}$$

É importante observar que essas equações apresentam parâmetros e variáveis todos positivos. Assim, esse modelo deverá modelar bem os processos produtivos com produções crescentes ao longo do tempo, com retornos decrescentes à medida que o tempo for passando. Isto estaria bem de acordo com a teoria apregoada pela teoria econômica mais ortodoxa.

As equações (3.26) serão denominadas, daqui em diante, de Modelo B:

$$\text{Modelo B: } \begin{cases} \dot{P} = \frac{\alpha(-1)^{\sigma} A^{\frac{1}{\alpha}} (uH)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} P^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}}}{N_{op}} \\ \dot{H} = B(1-u)H \end{cases}$$

Como visto anteriormente, devido ao fator $\frac{(-1)^{\sigma} P}{N_{op}}$, a produção $P = P(t)$ pode ser crescente ou decrescente, conforme a derivada \dot{P} seja positiva ou negativa.

A validação dos modelos teve duas etapas:

Na primeira, fez-se o ajustado do Modelo B para dados simulados, de forma a que fossem obtidos dados sobre capital humano para os onze anos abordados neste estudo. Essa estratégia foi utilizada pela dificuldade de se obter dados a respeito dos apicultores por um período tão grande. A propósito, a dificuldade de avaliação do capital humano é reconhecida na literaturana medida em que, em geral, ocorrem problemas de coleta, acesso e qualidade dos dados obtidos. Além do mais, há dificuldade no estabelecimento de *proxies* eficientes que permitam estabelecer uma conexão entre as variáveis que constituem o capital humano e as informações disponíveis (ARRAES, MARIANO e BARROS, 2008, p. 1).

Os dados simulados foram obtidos através de conjuntos de dados de produção e capital humano *gedanken*, que simularam a produção de mel em intervalos de 11 anos, assim como o capital humano dos trabalhadores. Esses dados foram gerados no Matlab™, sendo utilizadas apenas funções básicas do ambiente, como, por exemplo, a função *rand*, a qual gera um número uniformemente distribuído no intervalo [0,1]. O programa aplicou valores aleatórios para os parâmetros α , A , B , u e para N_{op} e gerou, sem ruído, os valores correspondentes da produção e do capital humano através do Modelo B. No caso, foram gerados 73 conjuntos de dados simulados. É importante observar que o intervalo máximo de 11 anos foi escolhido, a princípio, pela estabilidade apresentada pelo algoritmo do Gradiente Conjugado não

linearnessa margem de anos. Preferiu-se, então, manter a mesma margem de anos para o BOBYQA.

O algoritmo correspondente ao Modelo B foi aplicado aos diversos conjuntos de dados gedanken e feita a recuperação dos cinco parâmetros, α , A , B , u e N_{op} . A essas recuperações não foram adicionados ruídos.

Dentre os 73 conjuntos de dados simulados em que se aplicou a recuperação dos parâmetros, foi escolhido o conjunto que forneceu melhor recuperação do parâmetro A , que representa o índice de tecnologia aplicada à produção. Essa escolha foi feita devido ao interesse desse parâmetro para o presente trabalho, além de não ter se mostrado um parâmetro de fácil recuperação¹¹. Os valores desses conjuntos, correspondentes ao capital humano, foram utilizados na validação dos modelos A e B, quando da verificação de seu ajuste aos dados reais de produção.

A segunda etapa utilizou dados de produção de 18 municípios do estado do Rio de Janeiro. Esses municípios foram selecionados de forma a terem uma produção próxima à produção média de cada uma das microrregiões geográficas¹² onde estão inseridos (IBGE, 1990).

Os dados de produção foram obtidos do banco de dados SIDRA do IBGE (IBGE, 2014). Foram considerados 11 anos de produção de mel de cada um dos municípios selecionados no período de 2001 a 2011.

As microrregiões trabalhadas, situadas nas respectivas mesorregiões,¹³ e os municípios escolhidos estão presentes na Tabela 2.

Tabela 2. Mesorregiões e microrregiões, com os municípios selecionados.

Mesorregião	Microrregião	Município
	Rio de Janeiro	Rio de Janeiro
Metropolitana do Rio de Janeiro	Itaguaí	Itaguaí
	Serrana	São José do Vale do Rio Preto
	Vassouras	Miguel Pereira
	Macacu-Caceribu	Rio Bonito
Noroeste Fluminense	Itaperuna	Varre-Sai
	Santo Antônio de Pádua	Itaocara
Norte Fluminense	Campo dos Goytacazes	Campo dos Goytacazes
	Macaé	Macaé
Centro Fluminense	Nova Friburgo	Nova Friburgo
	Santa Maria Madalena	Santa Maria Madalena
	Cantagalo-Cordeiro	Carmo

Continua...

¹¹ A dificuldade de recuperação do parâmetro A sugeriu também que o critério adotado poderia possibilitar boas recuperações de alguns dos demais parâmetros, quando do ajustes feitos utilizando-se dados reais.

¹² Microrregião geográfica é um conjunto de municípios contíguos e contidos na mesma unidade da federação, definidos com base em características do quadro natural da organização da produção e de sua integração (IBGE, 1990).

¹³ Mesorregião geográfica é um conjunto de microrregiões contíguas e contidas na mesma unidade da federação, definidas com base no quadro natural, no processo social e na rede de comunicações e lugares (IBGE, 1990).

Continuação da **Tabela 2.**

Mesorregião	Microrregião	Município
CentroFluminense	Três Rios	Paraíba do Sul
Baixadas	Dos Lagos Bacia de São João	São Pedro da Aldeia Casimiru de Abreu
Sul Fluminense	Vale do Paraíba Fluminense Barra do Piráí Baía da Ilha Grande	Piráí Barra do Piráí Angra dos Reis

Fonte: IBGE.

Conforme já mencionado, para o ajuste dos modelos a esses municípios, foram considerados os valores do capital humano pertencentes ao conjunto de dados gedanken que tiveram melhor recuperação do parâmetro A, correspondente ao índice de tecnologia. No caso, foi considerado que todos os municípios apresentam, em média, esses mesmos valores de capital humano ao longo do tempo.

Ao se verificar se determinado modelo teve um bom ajuste aos dados de produção de certo município, são dados como entrada no software desenvolvido conjuntos de 22 dados: os 11 primeiros dados correspondem à produção de 2001 a 2011 dos municípios. Os 11 últimos correspondem aos dados gedanken do capital humano recém-mencionado (ver Figura 9). São considerados com bom ajuste todos os pontos gerados pelo modelo que estiverem a uma margem de erro relativo de 30% dos pontos correspondentes de produção do município.

Em todos os municípios, houve aplicação de um teste que mediu a porcentagem de intervalos em que houve aumento de produção nos anos consecutivos. Esse teste foi elaborado para tentar verificar, de antemão, se o Modelo A forneceria um bom ajuste para os dados de certo município. A elaboração desse teste deveu-se à estrutura desse modelo, que o mantém não decrescente ao longo do tempo.

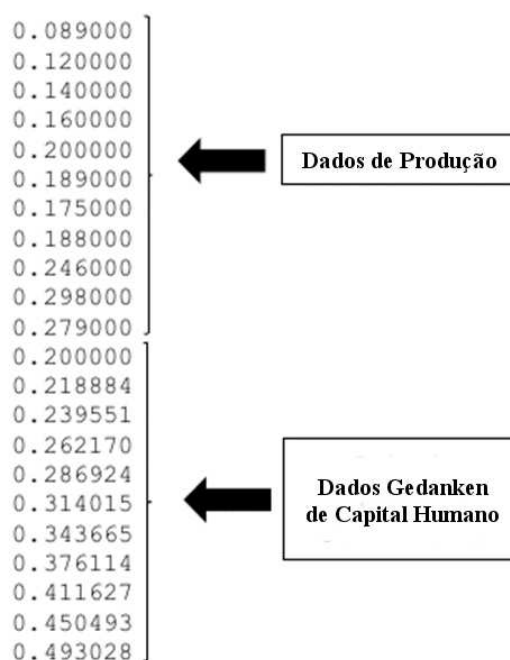


Figura 9. Exemplo de conjunto de dados de entrada para o software desenvolvido.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1. Resultados Preliminares

Com o intuito de testar algoritmos disponíveis, foi aplicado inicialmente o Método do Gradiente Conjugado Linear. Para tanto, tentou-se o ajuste de polinômios de diversos graus aos de 15 anos de produção de mel no município de Petrópolis, no Rio de Janeiro.

Se n é o grau do polinômio a ser ajustado, deverá ser encontrada uma solução aproximada para um sistema linear do tipo:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (4.1)$$

em que \mathbf{A} é uma matriz de Gramm $(n+1) \times 15$, \mathbf{x} é o vetor cujas componentes são os coeficientes do polinômio e \mathbf{b} é o vetor formado pelos valores da produção de mel durante os 15 anos estudados.

De maneira geral, observou-se que, quanto maior for a precisão exigida, melhor será o ajuste obtido. No entanto, no caso de polinômios de graus menores, foram obtidos bons ajustes nos primeiros anos de produção, como ilustrado na Figura 10, para o caso de polinômios de grau 6.

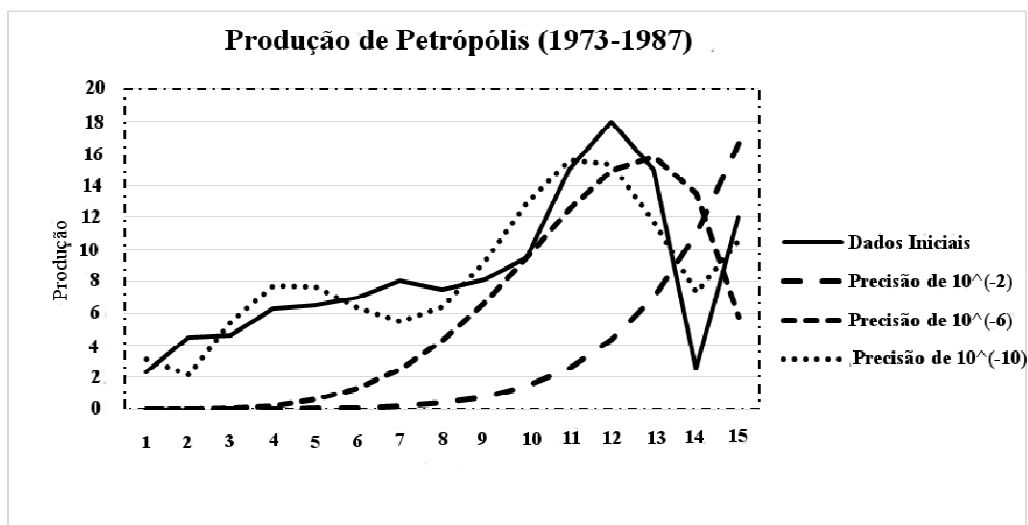


Figura 10. Ajuste de polinômios de grau 6 para várias margens de erro.

4.2. O Algoritmo do Gradiente Conjugado não Linear

Uma modalidade do Método do Gradiente Conjugado não linear também foi utilizada como “solver” para o caso da produção do município de Petrópolis. Esse algoritmo é de autoria de Li (2013) e foi comentado ao final da Seção 2.3.3.

Os resultados obtidos com esse algoritmo não foram satisfatórios: o algoritmo parecia perder as propriedades de rapidez de convergência, características do caso linear. Por isso, tentou-se a implementação de reinicializações (*restarts*) periódicas. As reinicializações

periódicas tentam manter os gradientes consecutivos ortogonais. No caso da implementação em tela, o algoritmo era submetido a uma reinicialização sempre que (NOCEDAL e WRIGHT, 2006, p. 125):

$$\frac{\|f_k^T f_{k-1}\|}{\|f_k\|^2} > 0,2, \quad (4.2)$$

ou seja, a reinicialização acontecia sempre que dois gradientes consecutivos deixavam, em uma boa medida, de ser ortogonais. A reinicialização consistiu em fazer com que a direção de procura no k -ésimo passo e f_k passassem a ser vetores opostos.

Mesmo com o acréscimo da condição (4.2), não foi possível fazer com que a condição de parada do algoritmo **Erro! Fonte de referência não encontrada.** ocorresse. No caso, pretendia-se que fosse:

$$\|f_k^T v_k\| < \delta, \quad (4.3)$$

em que $\delta = 10^{-3}$ ou menos e v_k é a direção conjugada do passo k .

No caso, apesar de o algoritmo empregado permitir controle dos parâmetros chave do mesmo, o máximo que se conseguiu impor foi $\delta = 0,015$. Para as margens pretendidas, o algoritmo apresentou erros de *underflow*.¹⁴ Esses erros aconteciam na procura de um número α , de forma que, se em determinado passo são conhecidos x_n e v_n , $x_n + \alpha v_n$ satisfizesse as condições **Erro! Fonte de referência não encontrada.** de decrescimento suficiente de f . Os erros de *underflow* ocorreram mesmo havendo a garantia de que v_n era uma direção de descida (LI, 2013, p. 3)

O algoritmo do Método do Gradiente Conjugado não linear sempre apresentou instabilidade, exibindo erros tanto de *underflow* quanto de *overflow*.¹⁵ Em muitos casos de mudança dos parâmetros internos do algoritmo, alcançou-se o limite do número de iterações para que ele terminasse.

No processo de investigação das razões dos sucessivos fracassos do algoritmo até então empregado, aventou-se a possibilidade de a função objetivo definida em (2.92) não possuir derivadas (veja (4.4)):

Ao olhar o problema a ser resolvido com um pouco mais de cuidado, as possíveis oscilações bruscas nos valores de produção sugeriram que, caso essa derivada existisse, poderia apresentar descontinuidades. Além disso, como a função a ser minimizada era definida por uma série de sub-rotinas, só ficou reforçada a ideia da inexistência de suas derivadas. Houve mesmo um esforço de se tentar recuperar uma expressão analítica da função f , esforço que se revelou infrutífero.

Pelas razões recém-apontadas, optou-se por abandonar o algoritmo do Gradiente Conjugado não linear. O algoritmo que o substituiu, o BOBYQA, foi escolhido pelos bons resultados fornecidos e apontados na literatura e pelo fato de o problema apresentar, no máximo, cinco variáveis (RIOS e SAHINIDIS, 2013).

¹⁴ Erros de *underflow* ocorrem quando os expoentes dos números presentes no algoritmo são menores que o menor expoente permitido no sistema de representação dos números em ponto flutuante.

¹⁵ Os erros de *overflow* ocorrem quando os expoentes dos números presentes no algoritmo são maiores que o maior dos expoentes permitidos no sistema de representação dos números em ponto flutuante.

4.3. Resultados Obtidos com o Software BOBYQA¹⁶

Somente para facilitar a referência, os resultados a seguir foram obtidos a partir da obtenção de soluções aproximadas para o seguinte problema de minimização:

$$\min_{\mathbf{m} \in M} \sum_{i=1}^s \|\mathbf{x}(t_i, \mathbf{m}) - \hat{\mathbf{x}}_i\|_2^2, \quad (4.4)$$

Em que \mathbf{x} é um vetor solução de (2.113) ou (2.115). Os valores desses vetores solução são calculados em 11 anos de produção de mel, representados pelos pontos t_i . O vetor \mathbf{m} é o vetor cujas componentes são os parâmetros α , A , B , u e N_{op} , como definidos em (3.1.1), sendo M o espaço desses vetores. No caso presente, os parâmetros foram definidos nos seguintes intervalos:

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 1 \\ 2 < A \leq 10 \\ 0 < B \leq 1 \\ 0 < u < 1 \\ 0 < N_{op} \leq 10 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Na aplicação do algoritmo, os valores iniciais dos parâmetros foram escolhidos como sendo os pontos médios dos intervalos de (4.5).

É importante ressaltar que não foi feita a análise dimensional do Modelo B. No entanto, do ponto de vista econômico, isso não invalida a recuperação feita do índice de tecnologia A , que é o índice de fundamental importância para o presente trabalho. No caso, o índice de tecnologia tem origem numa função de produção do tipo (2.32)¹⁷. Portanto, apesar de expresso segundo dimensões diferentes no Modelo A e no Modelo B, ainda assim o parâmetro A , em ambos os modelos, expressará um índice de tecnologia. Nesse sentido, o Modelo B deve servir como alternativa para recuperação do parâmetro A no caso de conjuntos de dados onde não houver bons ajustes do Modelo A. No entanto, cabe observar que não há como comparar os índices de tecnologia dos modelos A e B.

Nos resultados a seguir, serão apresentados os gráficos do modelo de melhor ajuste à produção dos municípios por microrregião geográfica – caso os dois modelos tenham obtido ajustes razoáveis, os gráficos referentes aos dois modelos serão exibidos. Além disso, serão expostos os dados de produção real, produção gerada pelos modelos A e B e os erros relativos correspondentes. Também serão expostos os índices de tecnologia referentes aos Modelos A e B: no primeiro caso o índice de tecnologia será denominado A_1 . No segundo caso, esse índice será denominado A_2 .

¹⁶ Foram feitos vários ajustes com o software de otimização global DIRECT (Jones, Pertunnen e Stuckman, 1993; Gablonsky, 2000). Como os resultados obtidos foram equivalentes ou piores que os resultados obtidos pelo BOBYQA, optou-se por efetuar todos os ajustes com este último.

¹⁷ Para ser mais específico, o Modelo de Lucas é utiliza uma função de produção do tipo $P(t) = AK^\alpha (uH)^{1-\alpha}$

4.4. Municípios por Microrregião: Resultados Obtidos

A Figura 11 dá uma ideia aproximada do desempenho dos Modelos A e B em 17 dos dezoito municípios estudados. Nele estão plotados os logaritmos dos erros relativos máximos da produção gerada em relação à produção real em cada município, considerados ambos os modelos. É importante ressaltar que um ajuste seria considerado bom se o erro relativo obtido fosse menor ou igual a 0,30. Os municípios considerados encontram-se na Tabela 3.

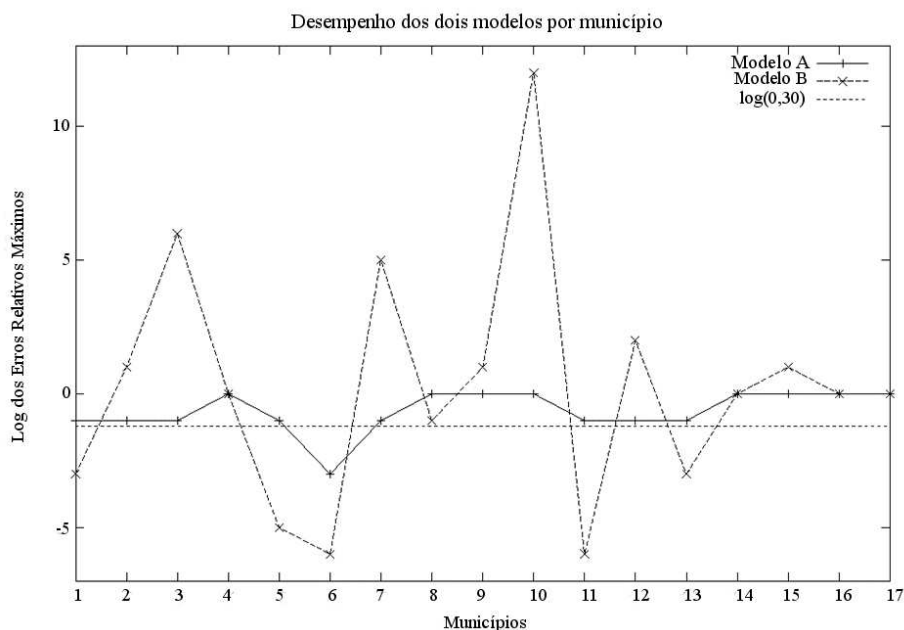


Figura 11. Gráfico com desempenho aproximado dos modelos A e B, por município.

Tabela 3. Municípios com o desempenho dos modelos plotados na Figura 11.

Nível de Desempenho	Município
1°	Rio de Janeiro
2°	Itaguaí
3°	Vassouras
4°	Itaocara
5°	Campos dos Goytacazes
6°	Nova Friburgo
7°	Santa Maria Madalena
8°	Paraíba do Sul
9°	São Pedro da Aldeia
10°	Casimiro de Abreu
11°	Piraí
12°	Barra do Piraí
13°	Angra dos Reis

Continua...

Continuação da **Tabela 3.**

Nível de Desempenho	Município
14°	Rio Bonito
15°	Carmo
16°	São José do Vale do Rio Preto
17°	Varre-Sai

A análise será iniciada pelos municípios e microrregiões da Mesorregião do Rio de Janeiro. É importante observar que os valores de produção gerados pelos modelos estão todos divididos por 10^4 .

-Caso 1 - Microrregião do Rio de Janeiro: município do Rio de Janeiro

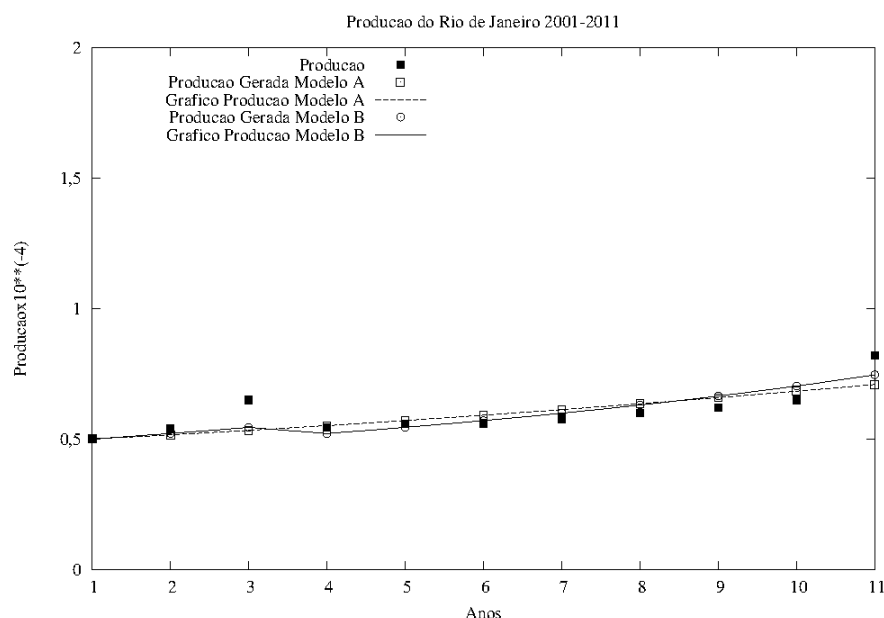


Figura 12.Gráfico do ajuste obtido para o Rio de Janeiro.

Tabela 4. Produções real e gerada para o Rio de Janeiro.

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
1	0,5000000	0,5000000	0,0000000	0,5000000	0,0000000
2	0,5400000	0,5160680	0,0443186	0,5215118	0,0011722
3	0,6500000	0,5333025	0,1795346	0,5449230	0,0261330
4	0,5450000	0,5516531	0,0122075	0,5213326	0,0018859
5	0,5580000	0,5710778	0,0234370	0,5449846	0,0005441
6	0,5600000	0,5915451	0,0563305	0,5708362	0,0003744

Continua...

Continuação da **Tabela 4.**

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
7	0,5770000	0,6130336	0,0624499	0,5991997	0,0014803
8	0,6000000	0,6355320	0,0592200	0,6304481	0,0025752
9	0,6200000	0,6590378	0,0629641	0,6650313	0,0052753
10	0,6500000	0,6835564	0,0516252	0,7034957	0,0067735
11	0,8200000	0,7091000	0,1352439	0,7465122	0,0080316
Média	0,6018182	0,5967188		0,59522977	
Desvio-padrão	0,086186795	0,06958623		0,081455763	

O índice de tecnologia recuperado pelo Modelo A foi $A_1 = 5,896347$. O valor recuperado pelo Modelo B foi $A_2 = 2,000000$.

Para o Rio de Janeiro, os dois modelos obtiveram 100% de ajuste. O teste de não decrescimento mostrou que, em 70% dos intervalos de anos consecutivos, a produção não decresceu. Esse fato, por si só, já apontava para um bom ajuste do modelo A.

Apesar dos comportamentos distintos dos dois modelos, ocorreu ajuste. Isso pode ser vislumbrado observando-se a quase coincidência das médias e dos desvios-padrão da produção e dos modelos.

-Caso 2 - Microrregião de Itaguaí: município de Itaguaí

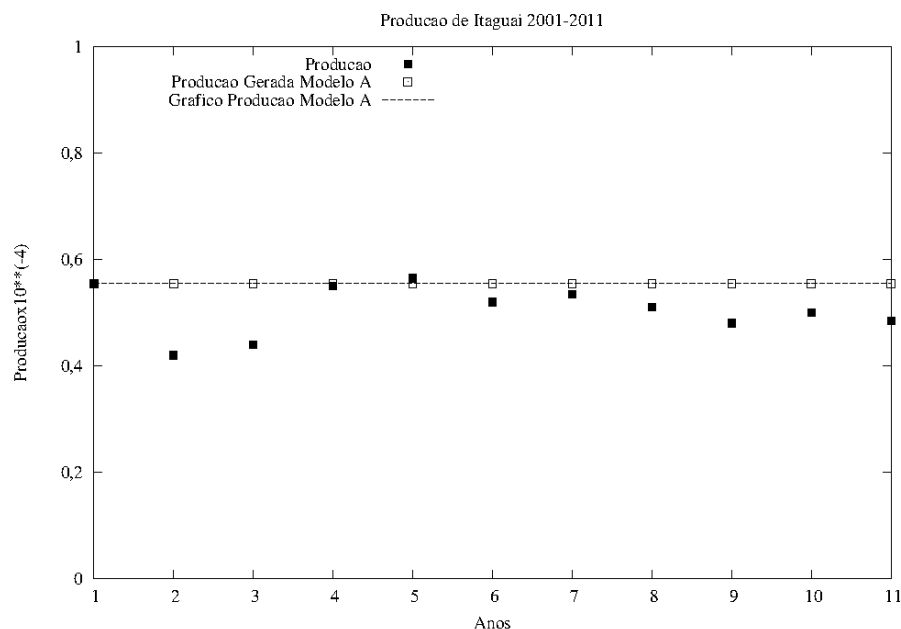


Figura 13. Ajuste do Modelo A para o município de Itaguaí.

Tabela 5. Dados de produção e valores gerados para o município de Itaguaí.

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
1	0,5550000	0,5550000000000000	0,0000000	0,5550000	0,0000000
2	0,4200000	0,5550000000000000	0,3214286	0,3689913	0,0147499
3	0,4400000	0,5550000000000000	0,2613636	0,6019016	0,1353932
4	0,5500000	0,5550000000000000	0,0090909	0,9829606	0,6196856
5	0,5650000	0,5550000000000000	0,0176991	1,6067790	3,3998090
6	0,5200000	0,5550000000000000	0,0673077	0,8571324	0,4203338
7	0,5350000	0,5550000000000000	0,0373832	1,8036310	5,6229400
8	0,5100000	0,5550000000000001	0,0882353	0,6810647	0,1125073
9	0,4800000	0,5550000000000017	0,1562500	0,0645132	0,7492589
10	0,5000000	0,5550000000000501	0,1100000	0,8710974	0,5508531
11	0,4850000	0,555000000014593	0,1443299	0,0070377	0,9711891
Média	0,5054545	0,5550000		0,763646267	
Desvio-padrão	0,046661255	4,38686E-12		0,561634722	

Nesse caso, vale que $A_1 = 5,905033$ e $A_2 = 5,948847$.

Para o município de Itaguaí, apenas o Modelo A forneceu um bom ajuste. É interessante notar que os intervalos anuais em que houve não decrescimento da produção foram da ordem de 60%. Portanto, era de se esperar que o Modelo A não fornecesse um bom ajuste, já que tende a modelar bem as produções em crescimento. Ocorre que a maioria dos valores de produção estão em uma média de $0,5 \times 10^4$ quilogramas. Nesse caso, o Modelo A assumiu uma forma de crescimento bem suave a partir de 0,555, com a diferença entre os valores gerados consecutivos abaixo da décima terceira casa decimal. Esse fato é corroborado pelo desvio-padrão praticamente nulo. Os dez pontos com bom ajuste foram obtidos dessa forma.

A média da produção gerada do Modelo B e o desvio-padrão estão totalmente discrepantes o que explica o baixo grau de ajuste desse modelo.

– Caso 3 - Microrregião Serrana: município de São José do Vale do Rio Preto

Para uma análise desse caso, ver Tabela 28 e Figura 33 (Anexos, pg. 110).

– Caso 4 - Microrregião de Vassouras: município de Miguel Pereira

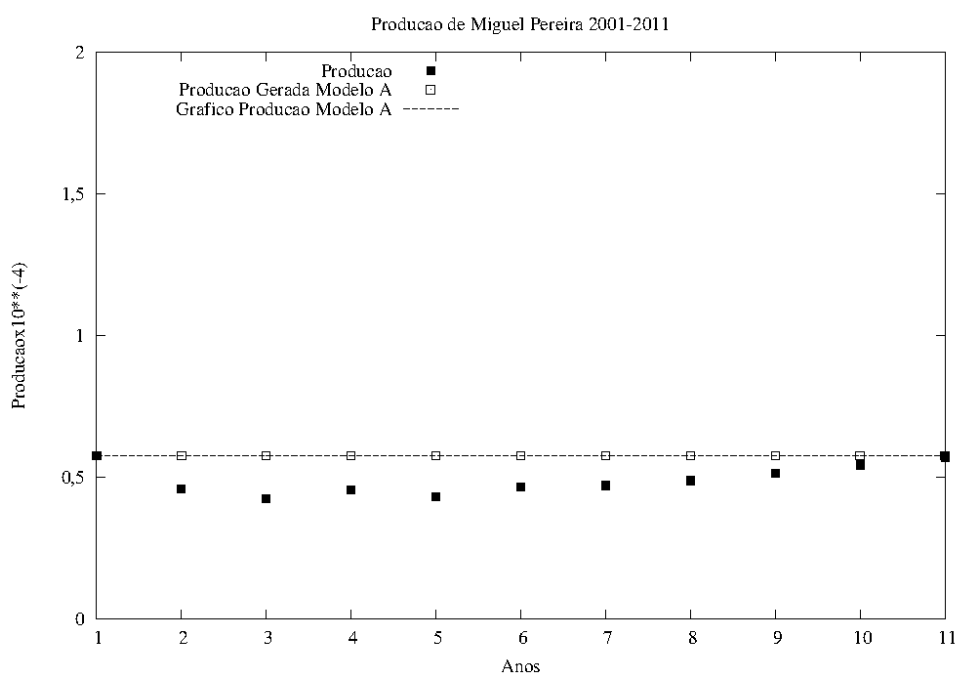


Figura 14. Ajuste obtido pelo Modelo A no caso de Miguel Pereira.

Tabela 6. Dados de produção e valores gerados para o município de Miguel Pereira.

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
1	0,5760000	0,5760000000000000	0,0000000	0,576	0
2	0,4590000	0,5760000000000000	0,2549020	0,3829143	0,02747776
3	0,4230000	0,5760000000000000	0,3617021	0,1280485	0,4862061
4	0,4550000	0,5760000000000000	0,2659341	0,4843866	0,00417134
5	0,4300000	0,5760000000000000	0,3395349	0,0046115	0,9786662
6	0,4640000	0,5760000000000000	0,2413793	0,6783991	0,2135059
7	0,4700000	0,5760000000000000	0,2255319	1,730379	7,191285
8	0,4882000	0,5760000000000006	0,1798443	3,271584	32,50503
9	0,5126000	0,5760000000000194	0,1236832	5,498873	94,62262
10	0,5433000	0,5760000000005664	0,0601877	8,697765	225,2742
11	0,5699000	0,5760000000165016	0,0107036	13,27641	497,1132
Média	0,4900909	0,5760000		3,1572155	
Desvio-padrão	0,0533721	4,96063E-11		4,3288661	

Nesse caso, vale que $A_1 = 5,636451$ e $A_2 = 5,951932$.

Apenas o Modelo A obteve um bom ajuste no caso desse município. A porcentagem de não decrescimento de produção em intervalos de anos consecutivos é de 70%. Isso já sugere um bom ajuste desse modelo.

Como a variabilidade da produção gerada pelo Modelo A é muito pequena, os valores gerados pelo modelo ao longo do tempo tendem a não se distanciar muito dos 17,5% dos valores de produção, em face da baixíssima variabilidade do modelo. Isso justifica o bom ajuste obtido pelo Modelo A.

O ajuste do Modelo B foi muito ruim, o que pode ser depreendido dos valores da média e do desvio-padrão da produção gerados por esse modelo.

– Caso 5 - Microrregião de Macacu-Caceribu: município de Rio Bonito

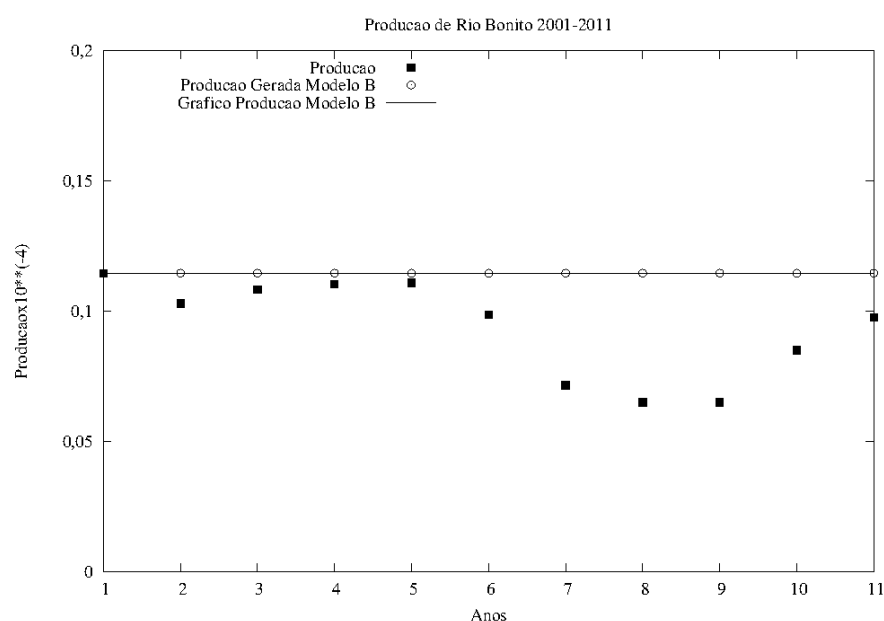


Figura 15. Gráfico de ajuste obtido para Rio Bonito.

Tabela 7. Produção e valores gerados parao município de Rio Bonito.

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
1	0,1146000	0,1146000000000000	0,0000000	0,1146000000000000	0,0000000
2	0,1029000	0,1146000000000010	0,1137026	0,114599991782000	0,0129283
3	0,1084000	0,1146000000000026	0,0571956	0,114600001620000	0,0032713
4	0,1103000	0,1146000000000056	0,0389846	0,114600013399000	0,0015198
5	0,1109000	0,1146000000000106	0,0333634	0,114600027500000	0,0011131
6	0,0987000	0,1146000000000194	0,1610942	0,114600010618000	0,0259514
7	0,0715000	0,1146000000000346	0,6027972	0,114599990408000	0,3633643

Continua...

Continuação da **Tabela 7.**

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
8	0,0650000	0,114600000001068	0,7630769	0,114599995179000	0,5822863
9	0,0850000	0,114600000001863	0,3482353	0,114600029858000	0,1212681
10	0,0976000	0,114600000003243	0,1741803	0,114600071375000	0,0303390
11	0,093627273	0,1146000		0,114600008904636	
Média	0,093627273	0,1146000		0,114600008904636	
Desvio-padrão	0,018881212	1,02613E-12		2,73665E-08	

Os índices de tecnologia obtidos são $A_1 = 4,607706$ e $A_2 = 5,349443$.

Nesse caso, ambos os modelos têm um comportamento praticamente constante ao longo do tempo, como é mostrado pelos respectivos desvios-padrão. Apenas o Modelo B apresenta uma variabilidade um pouco maior, como é de sua característica. De qualquer forma, essa variabilidade maior do modelo B explica as ordens de grandeza menores dos erros relativos correspondentes a esse modelo.

As próximas análises serão feitas a respeito de microrregiões e municípios da Mesorregião do Noroeste Fluminense.

–Caso 6 - Microrregião de Itaperuna: município de Varre-Sai

A análise desse município consta na Tabela 29 e Figura 34 (Anexos, pg. 111).

–Caso 7 - Microrregião de Santo Antônio de Pádua: município de Itaocara

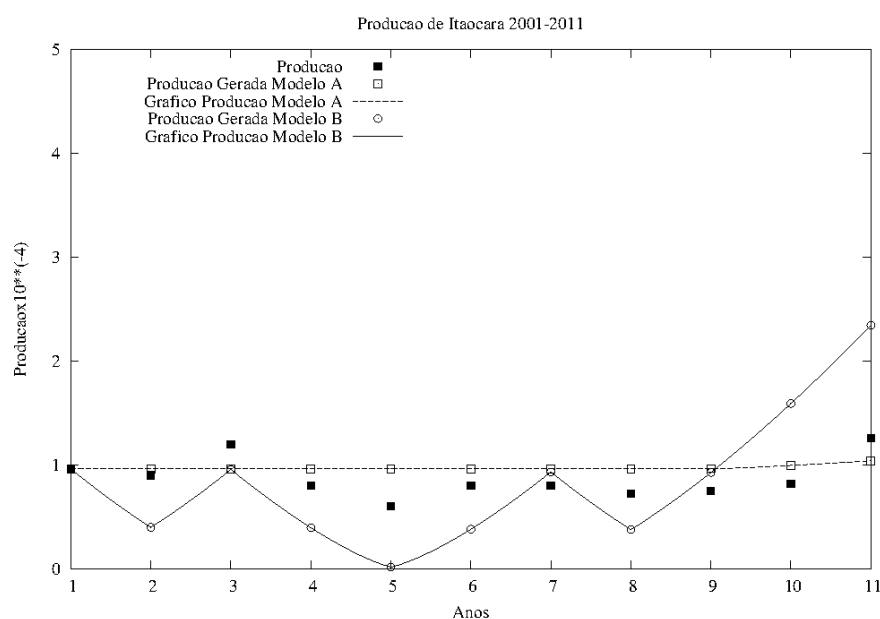


Figura 16.Gráfico do ajuste obtido pelos modelos em Itaocara.

Tabela 8.Produção e valores gerados para Itaocara.

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
1	0,9600000	0,9600000000000000	0,0000000	0,96	0
2	0,9000000	0,9600000000000000	0,0666667	0,3983526	0,3106792
3	1,2000000	0,9600000000000019	0,2000000	0,9550634	0,04166247
4	0,8000000	0,9600000000001452	0,2000000	0,3944595	0,2569736
5	0,6000000	0,960000000111300	0,6000000	0,0141049	0,9535363
6	0,8000000	0,960000008529475	0,2000000	0,3801758	0,2753943
7	0,8000000	0,960000653634894	0,2000008	0,9318692	0,02717106
8	0,7200000	0,960049973888213	0,3334027	0,3762343	0,2279607
9	0,7500000	0,963269676557094	0,2843596	0,9268206	0,05558313
10	0,8200000	0,994571592311680	0,2128922	1,5912	0,8845169
11	1,2600000	1,038882555829250	0,1754900	2,343414	0,7393466
Média	0,8736364	0,9706159		0,8428813	
Desvio-padrão	0,1992121	0,0248771		0,661079384	

Os índices de tecnologia obtidos foram $A_1 = 4,957370$ e $A_2 = 6,214098$.

No caso desse município, o Modelo A forneceu melhor ajuste que o modelo B, apesar de a porcentagem de intervalos anuais em que a produção não decresce ser da ordem de apenas 60%. Ocorre que a média dos valores de produção é da ordem de $0,87 \times 10^4$ quilogramas, e a maioria dos dados está em torno desse valor. O Modelo A assumiu uma taxa de crescimento pequena a partir do valor inicial, que se reflete no baixo desvio-padrão. Esse valor inicial apresenta um desvio de 10% em relação ao valor médio, diferença que foi diminuindo à medida que o modelo evoluía. Dessa forma, o modelo ajustou-se bem a quase todos os valores de produção.

Nesse caso, o Modelo B também forneceu um bom ajuste, devido à razoável variabilidade dos dados de produção. Ocorre que o valor médio dos dados gerados por esse modelo é de $0,84 \times 10^4$ quilogramas, bem próximo da média dos valores reais de produção. A dispersão dos dados gerados (desvio-padrão = $0,66 \times 10^4$) é maior que a dispersão da produção real (desvio-padrão = $0,19 \times 10^4$). Dessa forma, se a variabilidade dos dados de produção fosse um pouco maior, talvez o Modelo B fornecesse melhor ajuste que o Modelo A.

As duas próximas análises dizem respeito a microrregiões e municípios da Mesorregião do Norte Fluminense.

– Caso 8 - Microrregião de Campos dos Goytacazes:município de Campos de Goytacazes

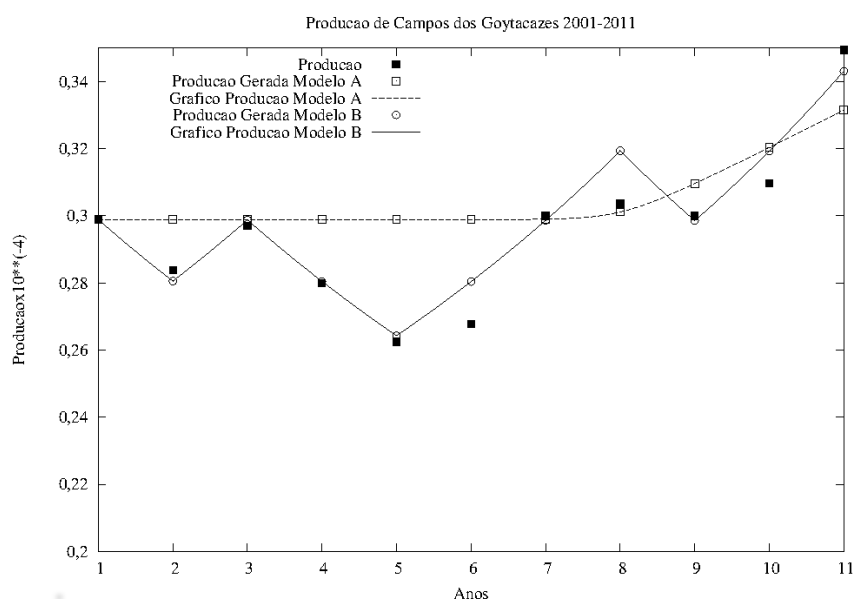


Figura 17. Gráficos dos ajustes obtidos para Campos dos Goytacazes.

Tabela 9. Produção e valores gerados pelos Modelos A e B.

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
1	0,2989000	0,2989000000000000	0,0000000	0,2989000	0,0000000
2	0,2838000	0,298900000011022	0,0532065	0,2805633	0,0001301
3	0,2971000	0,298900000292886	0,0060586	0,2988179	0,0000334
4	0,2799000	0,298900007501200	0,0678814	0,2804910	0,0000045
5	0,2625000	0,298900191839616	0,1386674	0,2642841	0,0000462
6	0,2677000	0,298904902649312	0,1165667	0,2804231	0,0022588
7	0,3000000	0,299023194917182	0,0032560	0,2986588	0,0000200
8	0,3036000	0,301150433354187	0,0080684	0,3194282	0,0027181
9	0,3000000	0,309656677291670	0,0321889	0,2985714	0,0000227
10	0,3097000	0,320383273961500	0,0344956	0,3193282	0,0009665
11	0,3495000	0,331581210617865	0,0512698	0,3431825	0,0003267
Média	0,2957000	0,3050182		0,2984226	
Desvio-padrão	0,0234084	0,011129358		0,022388	

Para esse município, os índices de tecnologia obtidos foram $A_1 = 5,668863$ e $A_2 = 2,003197$.

Ambos os modelos tiveram ótimo nível de ajuste, dentro da margem de erro relativo considerada. No entanto, considerando-se o percentual de 60% de intervalos com não decrescimento, é possível notar certa variabilidade da produção no todo. Talvez isso justifique os melhores ajustes obtidos pelo Modelo B em comparação aos ajustes do Modelo A: na grande maioria dos anos, os ajustes fornecidos pelo Modelo B foram, pelo menos, duas ordens de grandeza menores que os fornecidos pelo Modelo A.

O gráfico referente à produção desse município ilustra bem os comportamentos típicos dos Modelos A e B. Como se observa, o Modelo A apresenta um comportamento uniforme de crescimento ao longo dos anos, como mostra a linha pontilhada. Nos anos de 1 a 7, em que há maior variação da produção, o gráfico do Modelo B acompanha bem esse comportamento, como é ilustrado pela linha contínua. Nos anos de 8 a 11, foi plotado apenas o gráfico do Modelo A, pois, nesse intervalo, há uma tendência de crescimento da produção, sendo ali semelhantes os comportamentos de ambos os modelos.

O Modelo B tem um comportamento que o distingue do Modelo A, exatamente por ser apto a descrever um comportamento de produção com maior variação.

É importante notar que, embora os dois modelos tenham médias de produção gerada semelhantes à média de produção real, o desvio-padrão do Modelo B é menor que o do modelo A. Isso pode explicar os melhores ajustes obtidos por esse modelo.

– Caso 9 - Microrregião de Macaé: município de Macaé

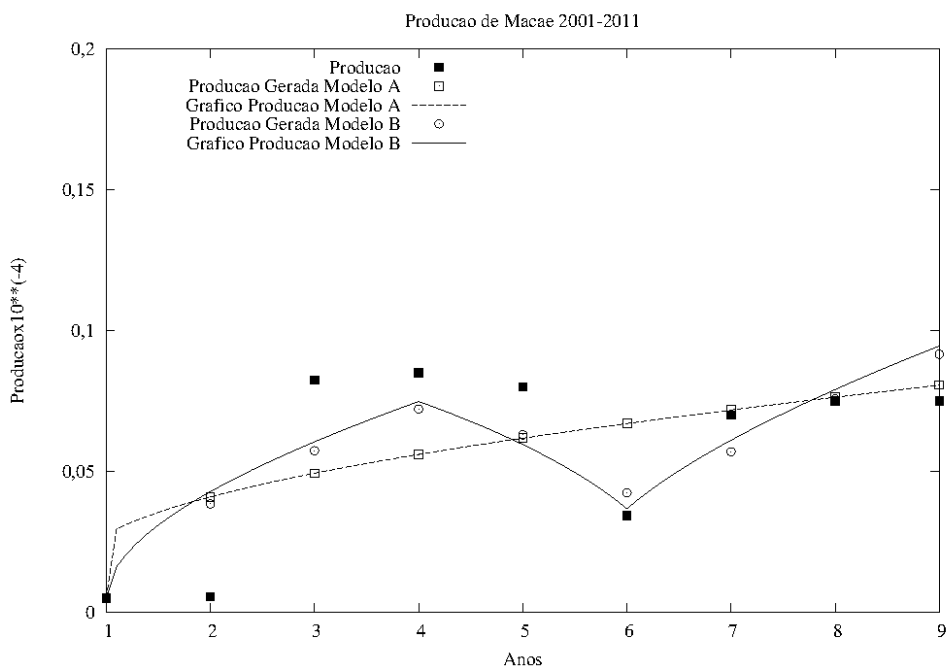


Figura 18.Gráfico dos ajustes obtidos para o município de Macaé.

Tabela 10.Dados de produção e valores gerados para o município de Macaé.

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
1	0,0825000	0,0825000000000000	0,0000000	0,0825	0
2	0,0850000	0,082500277184634	0,0294085	0,085709323	6,96386E-05
3	0,0800000	0,082500924113132	0,0312616	0,084600315	0,003306703
4	0,0343000	0,082502432907720	1,4053190	0,078658472	1,672495
5	0,0700000	0,082505945880316	0,1786564	0,080015404	0,02047109
6	0,0750000	0,082514093479706	0,1001879	0,086208048	0,02233251
7	0,0750000	0,082532822209515	0,1004376	0,091924263	0,05092101
Média	0,0716857	0,0825081		0,084230832	
Desvio-padrão	0,017252288	1,19872E-05		0,00442036	

Os índices de tecnologia obtidos foram $A_1 = 5,535088$ e $A_2 = 2,563121$.

O município de Macaé foi tomado como exemplo de que os modelos funcionam para um número menor de anos. No caso desse município, o intervalo considerado foi de sete anos, que compreende o período de 2005 a 2011.

No período considerado, ambos os modelos obtiveram ótimos ajustes para a produção desse município. Os dados gerados pelo Modelo A apresenta uma variabilidade quase nula, o que indica que seus valores mudam muito pouco em relação ao valor da média. O mesmo ocorre com os dados de produção, devido ao desvio-padrão de 0,015972515. Mais ainda, o erro relativo da média dos dados gerados pelo Modelo A em relação à média da produção ficou em torno de 7,2%. Segue que os dados gerados pelo Modelo A estarão, em média, dentro dessa margem de erro dos dados de produção. Isso significa que o Modelo A teve um bom ajuste em relação aos dados de produção do município em estudo.

Analisando de forma análoga o caso do Modelo B, basta notar que a variabilidade de seus dados é bem pequena. A média dos dados gerados por esse modelo apresenta um erro relativo quanto à média da produção próximo de 7,2%, pois as médias do Modelo B e do Modelo A são praticamente idênticas. Portanto, os dados gerados por esse modelo estarão, em média, a uma margem de 7,2% de erro relativo em relação aos dados de produção. Por essa razão, pode-se inferir que o Modelo B também teve um bom ajuste relativamente aos dados de produção.

As próximas quatro análises se referem a microrregiões e municípios pertencentes à Mesorregião do Centro Fluminense.

–Caso 10 - Microrregião de Nova Friburgo: município de Nova Friburgo

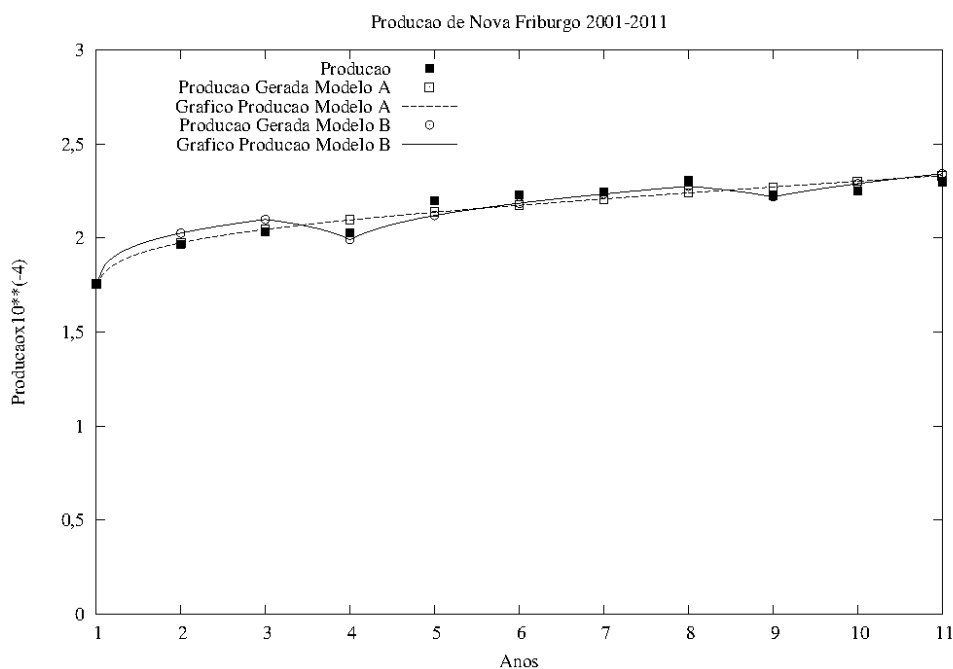


Figura 19. Gráfico dos ajustes obtidos para a produção de Nova Friburgo.

Tabela 11. Dados de produção e gerados para o município de Nova Friburgo.

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
1	1,7550000	1,7550000	0,0000000	1,7550000	0,0000000
2	1,9670000	1,9756484	0,0043967	2,0268220	0,0009249
3	2,0347000	2,0467454	0,0059200	2,0996910	0,0010202
4	2,0300000	2,0968238	0,0329181	1,9924150	0,0003428
5	2,2000000	2,1381557	0,0281111	2,1206210	0,0013019
6	2,2300000	2,1748605	0,0247262	2,1860130	0,0003891
7	2,2470000	2,2088369	0,0169840	2,2350380	0,0000283
8	2,3050000	2,2411174	0,0277148	2,2766100	0,0001517
9	2,2270000	2,2723242	0,0203521	2,2194150	0,0000116
10	2,2500000	2,3028592	0,0234930	2,2903480	0,0003216
11	2,3011000	2,3329953	0,0138609	2,3427140	0,0003270
Média	2,1406182	2,1404879		2,1404261	
Desvio-padrão	0,172433783	0,168302211		0,1687098	

Nesse caso, vale que $A_1 = 9,097927$ e $A_2 = 9,787594$.

Tanto o Modelo A quanto o Modelo B ajustaram 100% dos pontos que geraram, sendo o Modelo B o que obteve os melhores ajustes: na maioria dos pontos, seus ajustes são duas ordens de grandeza menores que os ajustes do Modelo A. As médias e os desvios-padrão bem próximos da média e do desvio-padrão da produção refletem o bom ajuste obtido por ambos os modelos.

A produção nesse município mostra tendência ao crescimento, pois, em 80% dos casos, não decresce em anos consecutivos. Mesmo assim, o Modelo B teve um comportamento mais que razoável ao acompanhar a variabilidade modesta da produção ao longo do tempo. O bom comportamento do Modelo A já era esperado, em razão de sua própria estrutura.

-Caso 11 - Microrregião de Santa Maria Madalena: município de Santa Maria Madalena

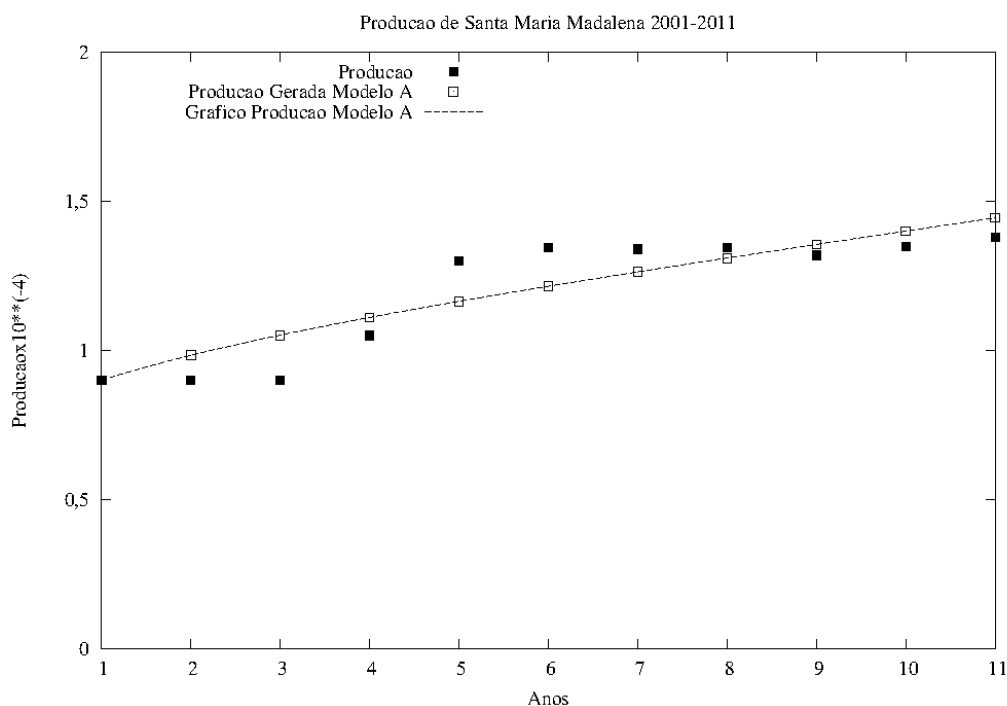


Figura 20. Gráfico do ajuste obtido para a produção de Santa Maria Madalena.

Tabela 12. Produção e valores gerados para Santa Maria Madalena.

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
1	0,9000000	0,9000000000000000	0,0000000	0.9000000	0
2	0,9000000	0,983807134905184	0,0931190	1,084393	4,20E-02
3	0,9000000	1,051771202711210	0,1686347	1,384123	0,2893521
4	1,0500000	1,111108776373510	0,0581988	1,87319	0,6146411
5	1,3000000	1,165145815563490	0,1037340	2,674115	1,117274
6	1,3450000	1,215712366761840	0,0961246	3,989916	3,867046
7	1,3400000	1,263933428784530	0,0567661	1,897359	0,173006
8	1,3450000	1,310556113315780	0,0256088	5,284199	8,577708
9	1,3200000	1,356106017208990	0,0273530	3,39E-02	0,9493417
10	1,3500000	1,400969985741860	0,0377555	8,635278	29,12224
11	1,3800000	1,445443391732370	0,0474228	24,02182	269,1935
Média	1,1936364	1,2004140		5,0878262	
Desvio-padrão	0,2080876	0,1758929		7,1020408	

Nesse caso, vale que $A_1 = 5,574126$ e $A_2 = 5,984280$.

No caso desse município, o Modelo A forneceu ajuste na margem considerada em 100% dos pontos. É interessante observar que há não decrescimento da produção em aproximadamente 80% dos intervalos de anos consecutivos. Houve também proximidade das médias da produção e do modelo, assim como dos respectivos desvios-padrão. Portanto, no global, a produção e o modelo apresentaram variações semelhantes, o que permitiu o ótimo ajuste obtido.

A simples observação da enorme discrepância entre as médias e os desvios-padrão do Modelo B e da produção já mostra o ajuste sofrível que foi obtido por esse modelo.

-Caso 12 - Microrregião de Cantagalo-Cordeiro: Carmo

A análise desse município consta na Tabela 27 e Figura 32 (Anexos, pg. 109).

–Caso 13 - Microrregião de Três Rios: município de Paraíba do Sul

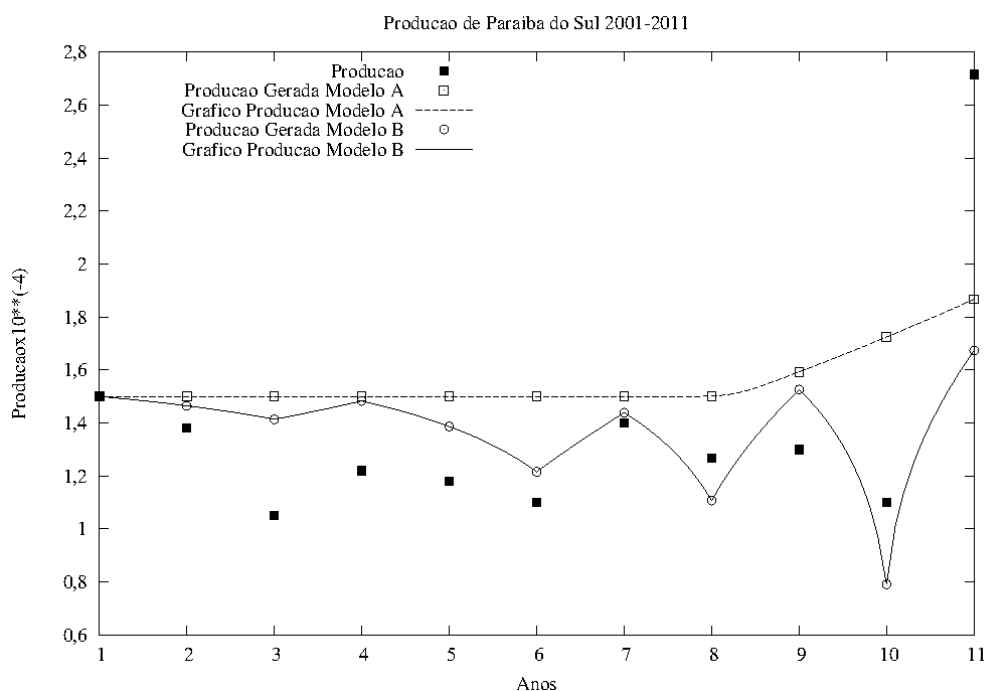


Figura 21. Gráfico com os ajustes obtidos para a produção de Paraíba do Sul.

Tabela 13. Dados de produção e valores gerados para o município de Paraíba do Sul.

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
1	1,500000	1,5000000000000000	0,0000000	1,5	0
2	1,380000	1,5000000000000000	0,0869565	1,465243	0,00381559
3	1,050000	1,5000000000000000	0,4285714	1,41385	0,120079
4	1,220000	1,5000000000000000	0,2295082	1,482936	0,04644954
5	1,180000	1,5000000000000110	0,2711864	1,386872	0,0307353
6	1,100000	1,500000000282640	0,3636364	1,215792	0,01108087
7	1,400000	1,500000745619930	0,0714291	1,438916	0,000772671
8	1,268000	1,501863742856100	0,1844351	1,106622	0,01619766
9	1,300000	1,592893554841740	0,2253027	1,526778	0,03043084
10	1,100000	1,724801770223100	0,5680016	0,7907665	0,07902921
11	2,716000	1,867659545804900	0,3123492	1,674069	0,1471698
Média	1,3830909	1,5624745		1,363804045	
Desvio-padrão	0,463663	0,123048115		0,243096114	

Os índices de tecnologia recuperados foram $A_1 = 5,607910$ e $A_2 = 5,435226$.

Os Modelos A e B obtiveram bons ajustes para o caso desse município. Tais resultados mais ou menos contrariam o resultado do teste de não decrescimento, o qual estabeleceu que, em 40% dos intervalos anuais de produção, haveria não decrescimento. Isso sugeriria baixo desempenho do Modelo A.

O bom desempenho do Modelo A pode ser explicado pela baixa variabilidade de seus valores de produção gerados em relação à variabilidade da produção. O erro relativo entre as médias do Modelo A e da produção é de cerca de 12,9%. Como a maioria dos valores da produção gerada e da produção real está em uma vizinhança de suas médias, a margem de erro relativo obtida será, em média, não muito distante dos 12,9%, considerando a baixa variabilidade, em relação à variabilidade da produção, dos resultados do modelo.

O Modelo B apresentou ajuste de 100% dos pontos, dentro da margem de erro relativo de 30%. Observe-se que as médias de produção e as de produção gerada são praticamente as mesmas. No entanto, a variabilidade média dos resultados obtidos a partir do Modelo B corresponde, praticamente, à metade da variabilidade média da produção. Poderia haver perda de ajuste em alguns pontos caso o Modelo B apresentasse um comportamento mais uniforme, semelhante ao do Modelo A. No entanto, como o Modelo B acompanha o comportamento da produção, isso representaria uma espécie de compensação à variabilidade média de seus resultados, possibilitando o ótimo ajuste obtido.

As duas próximas análises dizem respeito a microrregiões e municípios pertencentes à Mesorregião das Baixadas.

– Caso 14 – Microrregião dos Lagos: município de São Pedro da Aldeia

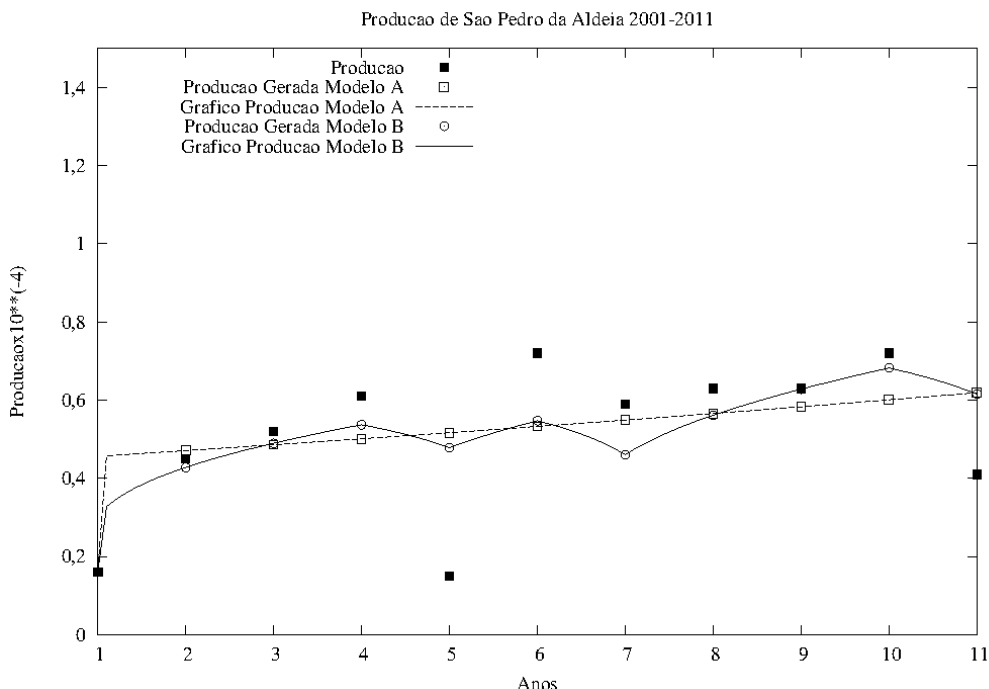


Figura 22. Gráfico com ajuste obtido para a produção de São Pedro da Aldeia.

Tabela 14.Produção e valores gerados para São Pedro da Aldeia.

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
1	0,1600000	0,1600000	0	0,1600000	0
2	0,4500000	0,470954338	0,0465652	0,4277731	0,00243967
3	0,5200000	0,485852518	0,0656682	0,489596	0,003418641
4	0,6100000	0,501077082	0,1785622	0,5370852	0,014288
5	0,1500000	0,516658488	2,44439	0,4782588	4,789058
6	0,7200000	0,532624347	0,260244	0,5473035	0,05753103
7	0,5900000	0,549000104	0,0694914	0,4604026	0,04824906
8	0,6300000	0,565809559	0,1018896	0,5614025	0,01185593
9	0,6300000	0,583075266	0,0744837	0,628027	9,80823E-06
10	0,7200000	0,600818857	0,1655294	0,6824617	0,002718218
11	0,4100000	0,619061299	0,5099056	0,6152515	0,2506137
Média	0,5081818	0,5077211		0,507960173	
Desvio-padrão	0,199791	0,1246212		0,138786846	

Os índices de tecnologia, nesse caso, são $A_1 = 5,823298$ e $A_2 = 5,599363$.

Para esse município, ambos os modelos obtiveram ótimos ajustes. No caso, houve 70% de intervalos com não decréscimo da produção em anos consecutivos. A proximidade das médias e dos desvios-padrão dos dois modelos aponta para comportamentos semelhantes. No entanto, há uma variabilidade ligeiramente maior da produção, que foi provocada, por exemplo, pela perda de produção de mais de 75%, ocorrida entre os anos 6 e 7.

–Caso 15 - Microrregião da Bacia de São João: município de Casimiro de Abreu

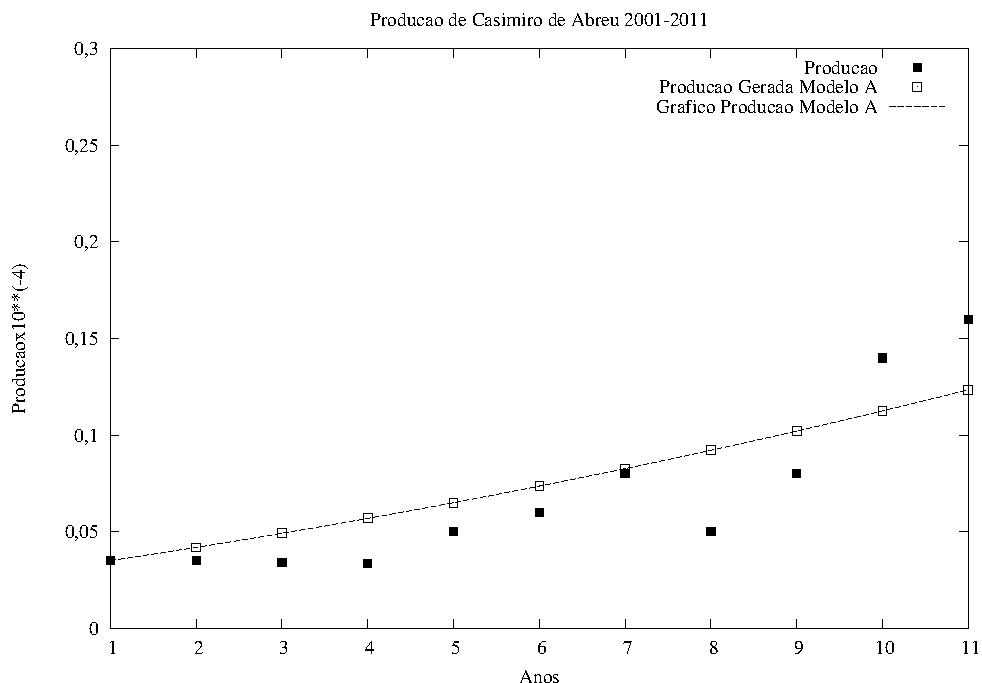


Figura 23. Gráfico do ajuste obtido para o município de Casimiro de Abreu.

Tabela 15. Produção e valores gerados para de Casimiro de Abreu.

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
1	0,0350000	0,0350000000000000	0,0000000	0,035	0
2	0,0350000	0,041869417823233	0,1962691	0,08122163	1,744032
3	0,0340000	0,049163620270101	0,4459888	0,02266246	0,1111937
4	0,0335000	0,056884559142999	0,6980465	0,000286636	0,9829606
5	0,0500000	0,065036643026394	0,3007329	0,03828648	0,05488259
6	0,0600000	0,073626217022155	0,2271036	0,3645471	25,76359
7	0,0800000	0,082661216110644	0,0332652	1,868174	499,6195
8	0,0500000	0,092150927339591	0,8430185	0,1101492	1,447172
9	0,0800000	0,102105823188322	0,2763228	3,039976	1368,978
10	0,1400000	0,112537443181248	0,1961611	21,55624	23400,77
11	0,1600000	0,123458309236385	0,2283856	98,05565	374357,7
Média	0,0688636	0,0758631		11,37929032	
Desvio-	0,043776758	0,029378778		29,44163312	

padrão

Nesse caso, os índices de tecnologia recuperados foram $A_1 = 2,000000$ e $A_1 = 6,058648$.

A produção no município de Casimiro de Abreu apresentou uma porcentagem de intervalos de não decrescimento, nos 11 anos considerados, de aproximadamente 70%. Portanto, há forte tendência de a produção manter-se em crescimento. Dessa forma, o Modelo B, devido à sua tendência de acompanhar comportamentos de produção com maior variabilidade, não forneceu um bom ajuste para o caso desse município. O Modelo A mostrou-se, mais uma vez, melhor estruturado para fornecer bons ajustes no caso de produções com fortes tendências ao crescimento. Observe que a média e o desvio-padrão referentes ao Modelo A estão muito mais próximos da média e do desvio-padrão da produção, quando comparados às mesmas medidas do Modelo B.

As próximas três análises são as últimas e estão relacionadas a microrregiões e municípios pertencentes à Mesorregião do Sul Fluminense.

-Caso 16 - Microrregião do Vale do Paraíba Fluminense: município de Pirai

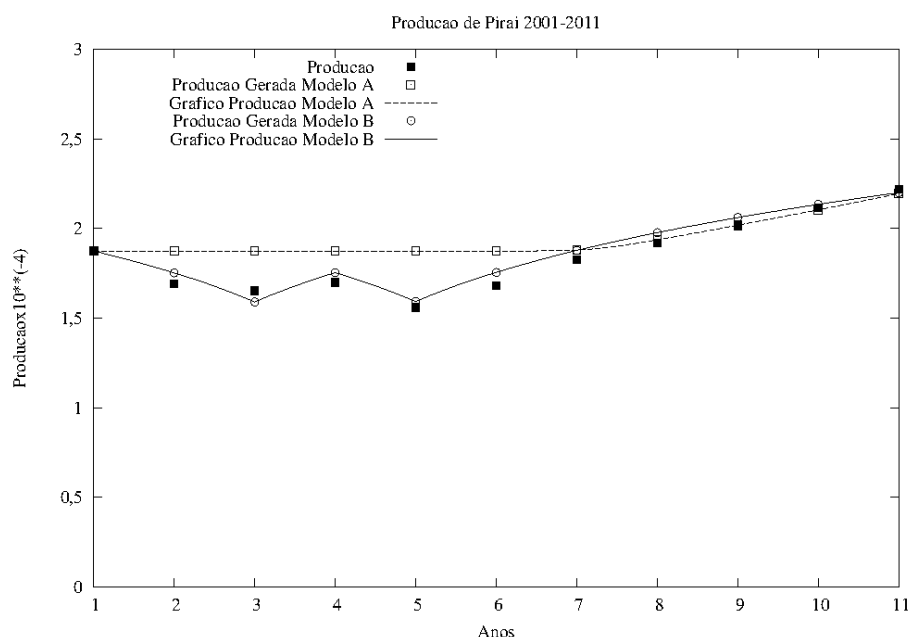


Figura 24. Gráfico dos ajustes obtidos para o município de Pirai.

Tabela 16. Produção e valores gerados para de Pirai.

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
1	1,8750000	1,8750000000000000	0,0000000	1,875	0
2	1,6930000	1,8750000000007450	0,1075015	1,752836	0,001249155

3	1,6530000	1,875000000472090	0,1343013	1,590459	0,001431463
---	-----------	-------------------	-----------	----------	-------------

Continua...

Continuação da **Tabela 16.**

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
4	1,7000000	1,875000029432540	0,1029412	1,754426	0,001024984
5	1,5600000	1,875001834450110	0,2019243	1,592692	0,000439165
6	1,6800000	1,875114027922180	0,1161393	1,756003	0,002046633
7	1,8278000	1,881110891659090	0,0291667	1,87836	0,000765163
8	1,9191000	1,937577800388340	0,0096284	1,977635	0,000930331
9	2,0150000	2,019525954789850	0,0022461	2,061874	0,000541134
10	2,1157000	2,105600418053530	0,0047736	2,135446	8,71028E-05
11	2,2193000	2,195352052095340	0,0107908	2,201012	0,000067906
Média	1,8416273	1,9444803		1,870522091	
Desvio-padrão	0,20935222	0,112933824		0,2058267	

Os índices de tecnologia recuperados foram $A_1 = 7,517100$ e $A_2 = 6,636497$.

Ambos os modelos apresentaram excelentes ajustes, sendo a porcentagem de intervalos de não decrescimento da ordem de 70%.

No caso do Modelo A, o erro relativo entre as médias de produção gerada e de produção é de 0,5%. Essa diferença mínima foi acompanhada por um não decrescimento do modelo bem suave, em virtude de o desvio-padrão ser pequeno. Isso indica uma tendência de, em média, os valores gerados pelo modelo estarem bem próximos dos valores de produção. Dessa forma, ficaria justificado o ótimo ajuste obtido.

Para compreender o excelente ajuste obtido pelo Modelo B, basta observar que a média de valores de produção e a dos gerados pelo modelo são praticamente idênticas. O mesmo ocorre com o desvio-padrão dessas grandezas.

– Caso 17 - Microrregião de Barra do Piraí: município de Barra do Piraí

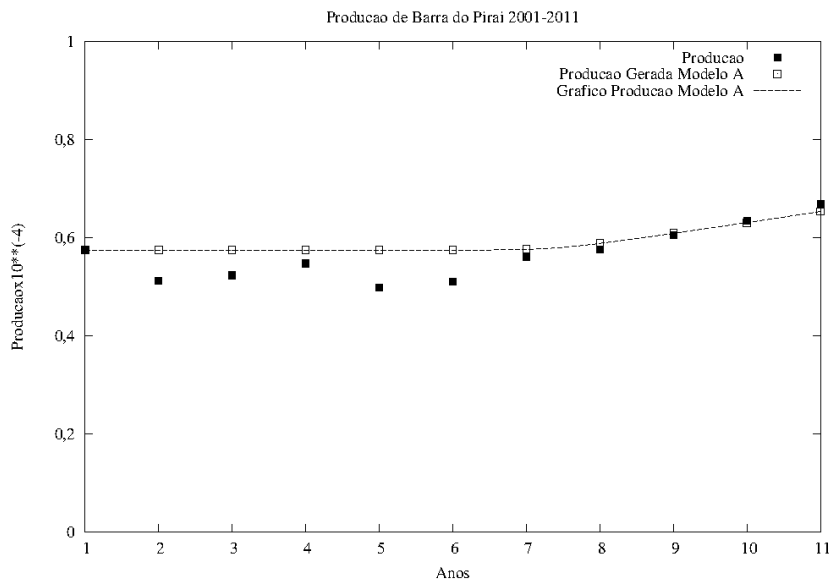


Figura 25. Gráfico do ajuste obtido para o município de Barra do Piraí.

Tabela 17. Produção e valores gerados para o município de Barra do Piraí.

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
1	0,5750000	0,5750000000000000	0,0000000	0,575	0
2	0,5120000	0,575000000038701	0,1230469	0,1314974	0,5523005
3	0,5235000	0,575000001312714	0,0983763	0,6059766	0,02482152
4	0,5475000	0,575000043252401	0,0502284	0,978931	0,6209469
5	0,4990000	0,575001423726571	0,1523075	0,5813807	0,02725525
6	0,5100000	0,575046697811758	0,1275425	1,005409	0,9435993
7	0,5600000	0,576377747571972	0,0292460	1,392361	2,209264
8	0,5756000	0,588595973672043	0,0225781	1,764673	4,267522
9	0,6049000	0,609195587150482	0,0071013	2,131737	6,371152
10	0,6350000	0,631065378164593	0,0061963	2,49878	8,61473
11	0,6681000	0,653735253494483	0,0215009	2,869214	10,8543
Média	0,5646000	0,5917289		1,321359973	
Desvio-padrão	0,054383564	0,027604767		0,888239832	

Nesse caso, os índices de tecnologia recuperados foram $A_1=6,113212$ e $A_2=6,027149$.

Para esse município, apenas o Modelo A forneceu um bom ajuste. Todos os pontos gerados pelo modelo nos 11 anos estão a uma margem de 30% ou menos dos dados de produção. Uma possível explicação para esse comportamento pode ser buscada no número de intervalos anuais em que há crescimento de produção: o teste de não decrescimento aplicado mostra que, em mais de 80% dos 11 intervalos de produção anual, houve não decrescimento de produção. O Modelo A, com sua tendência a fornecer valores de produção sempre crescentes, descreveu melhor o comportamento do fenômeno no mundo real.

É importante notar a discrepância existente entre a média e o desvio-padrão do modelo B para as mesmas medidas da produção. O mesmo já não acontece com o Modelo A.

– Caso 18 - Microrregião da Baía da Ilha Grande: município de Angra dos Reis

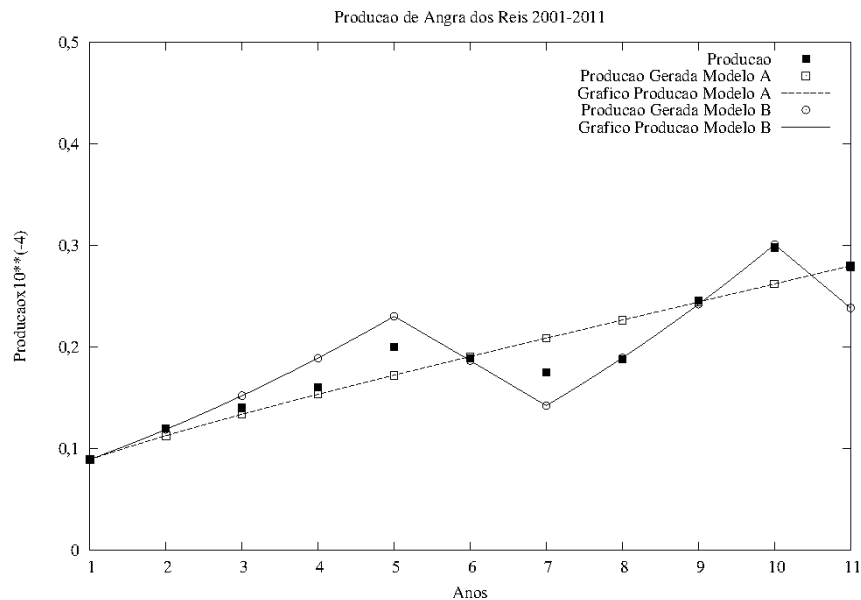


Figura 26. Gráfico para o ajuste obtido para o município de Angra dos Reis.

Tabela 18. Produção e valores gerados para o município de Angra dos Reis.

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
1	0,0890000	0,0890000000000000	0,0000000	0,089	0
2	0,1200000	0,112492691567658	0,0625609	0,118694	0,000118456
3	0,1400000	0,133607407016251	0,0456614	0,1520004	0,007347435
4	0,1600000	0,153351685060265	0,0415520	0,1891021	0,03308326
5	0,2000000	0,172248114138505	0,1387594	0,2302238	0,02283701
6	0,1890000	0,190611553426871	0,0085267	0,1865026	0,000174607

7	0,1750000	0,208651092569435	0,1922920	0,1421879	0,03515546
8	0,1880000	0,226515680681068	0,2048706	0,1892894	4,70389E-05

Continua...

Continuação da **Tabela 18.**

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
9	0,2460000	0,244317338305161	0,0068401	0,2421054	0,000250645
10	0,2980000	0,262144096291747	0,1203218	0,3009271	9,64826E-05
11	0,2790000	0,280067723710656	0,0038270	0,238387	0,02118957
Média	0,1894545	0,1884552		0,188947245	
Desvio-padrão	0,0644583	0,0624255		0,061640826	

Os índices de tecnologia obtidos foram $A_1 = 5,800478$ e $A_1 = 6,146850$.

O município de Angra dos Reis obteve 100% de ajuste tanto do Modelo A quanto do Modelo B, dentro da margem considerada de 30% ou menos de erro relativo. No entanto, o Modelo B obteve maior precisão, pois todos os pontos tiveram ajustes com erro relativo da ordem de grandeza de 10^{-2} ou menos, enquanto, no Modelo A, por volta de 54% dos pontos apresentaram esse grau de precisão.

As médias de produção e de produção gerada de ambos os modelos e os respectivos desvios-padrão refletem o bom ajuste obtido em ambos os casos.

4.4.1. Estimativa de colheita em períodos de safra

Uma pequena mudança nos programas que geram os resultados dos modelos permite a obtenção de um resultado interessante. A princípio, a integração numérica dos sistemas de equações que constituem tanto o Modelo A quanto o Modelo B era feita utilizando-se um tamanho do passo $h^* = 0,1$. Isso significa que cada intervalo anual de produção estava dividido em dez partes iguais. Se o tamanho do passo for ligeiramente modificado para $h^* = \frac{1}{11}$, o intervalo anual fica dividido em 11 períodos. Portanto, do início ao final desse intervalo, haveria 12 pontos de divisão, ou 12 nós, incluindo o primeiro e o último. Em outros termos, cada nó corresponderia a 1 mês, e o valor de produção gerado em cada nó seria a produção estimada daquele mês.

As safras de mel em dada localidade podem ocorrer vários meses por ano, dependendo do número e da qualidade das floradas nesse período. Em geral, ocorrem nos meses mais quentes, não sendo recomendados os meses de inverno.

A Figura 27 ilustra parte da tabulação da produção de mel do Rio de Janeiro, no período de 2002 a 2003. Estão registradas também as produções mensais. Em destaque, está registrada a produção de uma safra hipotética, abrangendo os meses de agosto a outubro. Esse total é obtido somando-se as produções correspondentes aos nós de números 8 a 10, da divisão do intervalo em questão, em 11 partes iguais.

Jan	2.000000	0.5215105	
Fev	2.090909	0.5235566	
Mar	2.181818	0.5256186	
Abr	2.272727	0.5276966	
Mai	2.363636	0.5297908	
Jun	2.454545	0.5319015	
Jul	2.545455	0.5340287	
Ago	2.636364	0.5361726	} Total da Safra = 1,6150179 × 10 ⁴ quilos
Set	2.727273	0.5383336	
Out	2.818182	0.5405117	
Nov	2.909091	0.5427072	
Dez	3.000000	0.5449202	

Figura 27. Total da safra hipotética no Rio de Janeiro entre os anos 2002 e 2003.

4.4.2. Algumas previsões feitas pelos modelos e breves comentários

Encontrar modelos que façam a previsão de situações variadas tem sido o desejo de muitos. Esforços têm sido despendidos, por exemplo, no sentido de se fazer a previsão da tendência de certas ações na Bolsa de Valores. Também pode ocorrer uma tendência a se buscarem modelos para prever a ocorrência de certos fenômenos naturais, no sentido de, por exemplo, serem evitadas catástrofes. Alguns esforços de construção desses modelos são razoavelmente bem-sucedidos. Ocorre que certos fenômenos apresentam elevadíssimo grau de variabilidade, sofrendo a influência de um grande número de fatores que fogem a quaisquer expectativas. Os fenômenos naturais são eventos dessa natureza, e previsões a seu respeito devem estar, com frequência, acompanhadas de um bom grau de incerteza.

O preâmbulo apresentado serve para situar os resultados e comentários que serão feitos a seguir. Em outras palavras, as previsões foram feitas para os anos de 2012 e 2013, na expectativa de que as condições médias de produção, principalmente para os anos próximos a 2011, tivessem sido mantidas. Com esse pressuposto em mente, alguns municípios possibilitaram previsões bastante boas, como os apresentados a seguir:

a) (M1) Rio de Janeiro

Tabela 19. Valores de produção e previsões para o município do Rio de Janeiro.

Modelo B	2011	2012	2013
Valor Real	0,8200000	0,65	0,575
Valor Esperado	-	0,7031319	0,6639975
Erro Relativo	-	0,0817413	0,1547783
Modelo A	2011	2012	2013
Valor Real	0,8200000	0,65	0,575
Valor Esperado	-	0,72882870	0,75111710
Erro Relativo	-	0,12127492	0,30629061

Para o Rio de Janeiro, houve boas previsões no caso dos Modelos A e B, que obtiveram ótimos ajustes para esse município. No caso, as previsões foram consideradas boas

porque estavam dentro da margem de erro relativo de 30% dos valores reais dos anos de 2012 e 2013. É importante observar que a variabilidade média dos dados reais de 2011 para 2013 foi da ordem de 12%, mais que razoável, no sentido de se inferir certa regularidade de comportamento.

b) (M2) Barra do Pirai

Tabela 20. Valores de produção e previsões para o município de Barra do Pirai.

Modelo A	2011	2012	2013
Valor Real	0,6681000	0,709	0,6341
Valor Esperado	-	0,701548	0,7267503
Erro Relativo	-	0,010510578	0,146113074

Para esse município, apenas o Modelo A forneceu um bom ajuste. Observe-se que a variabilidade média dos dados reais de produção, de 2011 a 2013, foi da ordem de 3,8%, não havendo grande variação de valores em relação à média. Isso mais ou menos justifica as previsões obtidas dentro da margem de erro relativo esperada. É claro que o ajuste de 100% dos pontos, obtido pelo modelo, influenciou nas boas previsões obtidas.

c) (M3) Rio Bonito

Tabela 21. Valores de produção e previsões para o município de Rio Bonito.

Modelo B	2011	2012	2013
Valor Real	0,0976	0,0928	0,1086
Valor Esperado	-	0,1146000503	0,11460011
Erro Relativo	-	0,234914871	0,05525

No geral, não houve casos de municípios com boas previsões apenas para o Modelo B. De qualquer forma, para o município de Rio Bonito, o Modelo B obteve mais pontos que o Modelo A, com ajustes dentro da margem considerada. Por essa razão, as previsões do Modelo B podem tender a ser melhores que as do Modelo A. Essa foi a razão para o Modelo B ter sido escolhido para este exemplo.

4.4.3. Estudo preliminar: ajuste dos modelos para períodos de tempo maiores

Alguns testes foram realizados para se verificar a possibilidade de os modelos desenvolvidos produzirem bom ajustes para períodos superiores a 11 anos. No caso, os testes foram efetuados para um período de vinte anos.

A título de exemplo, a Figura 28 e a Tabela 22 apresentam o bom ajuste obtido para o município de Areal, na Microrregião de Três Rios.

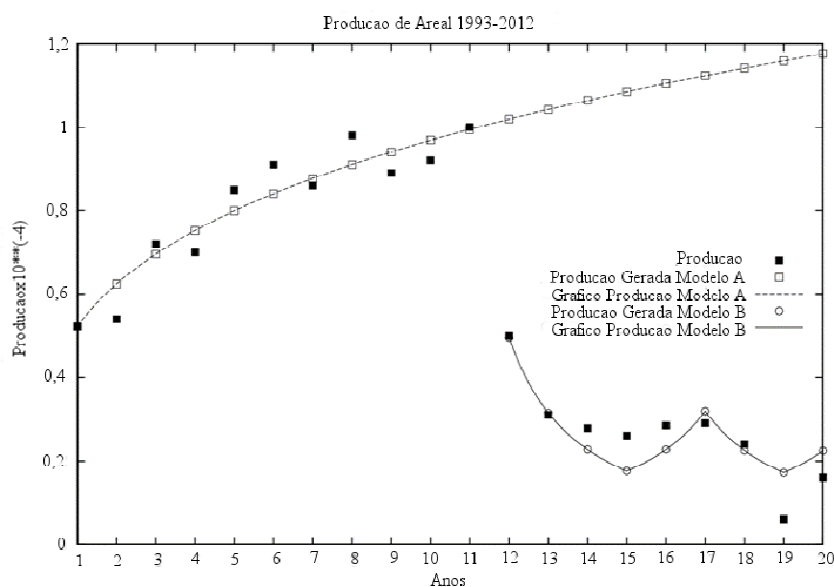


Figura 28. Ajustes obtidos para o município de Areal para vinte anos.

Tabela 22. Produção e valores gerados para o município de Barra do Pirai.

Anos	Modelo A			Modelo B	
	Produção	Valor Gerado	Erro Relativo	Valor Gerado	Erro Relativo
1	0,5220000	0,5220000000000000	0,0000000	0,5220000	0
2	0,5400000	0,624140246393235	0,1558153	0,5813047	0,076490185
3	0,7200000	0,695599001094653	0,0338903	0,6385281	0,113155417
4	0,7000000	0,752096438850325	0,0744235	0,6939812	0,008598286
5	0,8500000	0,799477206559098	0,0594386	0,7479006	0,120116941
6	0,9100000	0,840630320100839	0,0762304	0,8004714	0,120361099
7	0,8600000	0,877218023047903	0,0200210	0,8518422	0,009485814
8	0,9800000	0,910293487393685	0,0711291	0,9021346	0,07945449
9	0,8900000	0,940570321870630	0,0568206	0,9514497	0,069044607
10	0,9200000	0,968556655462730	0,0527790	0,9998727	0,086818152
11	1,0000000	0,994628413626755	0,0053716	1,047476	0,047476
12	0,5000000	1,019072306677960	1,0381450	0,4960483	0,0079034
13	0,3100000	1,042112492268340	2,3616530	0,3153063	0,017117097
14	0,2780000	1,063927871512710	2,8270790	0,2272538	0,182540288
15	0,2600000	1,084663732540920	3,1717840	0,1757517	0,324031923
16	0,2850000	1,104439836516110	2,8752270	0,2273314	0,202345965
17	0,2900000	1,123356183980940	2,8736420	0,3194417	0,101523103
18	0,2400000	1,141497222162570	3,7562380	0,2249917	0,062534583
19	0,0600000	1,158934976614560	18,3155800	0,1720492	1,867486667
20	0,1600000	1,175731423487640	6,3483210	0,2245471	0,403419375
Média	0,5637500	0,9419473		0,55598412	
Desvio-padrão	0,31190516	0,187143101		0,305350627	

O gráfico e a tabela imediatamente acima permitem inferir alguns fatos interessantes: devido à sua tendência ao não decréscimo, o Modelo A só gera bons ajustes até o décimo primeiro ano de produção. A partir de então, como a produção cai vertiginosamente, esse modelo não consegue manter os valores gerados dentro da margem de erro relativo desejada com a produção. Esse quadro é corroborado pelo fato de a média e o desvio-padrão do modelo serem bem diferentes das medidas análogas da produção.

Ao se observarem a média e o desvio-padrão do Modelo B, é fácil observar que ambos estão bem próximos da média e do desvio-padrão da produção. Portanto, esse modelo obteve um bom ajuste, em média, ao longo dos vinte anos de produção. Os erros relativos correspondentes confirmam esse fato.

O gráfico do Modelo B foi esboçado apenas para os nove últimos anos, a fim de destacar seu caráter complementar ao comportamento do Modelo A.

O Modelo B, devido à sua uniformidade de comportamento, pode prestar-se bem a situações de decréscimo, como, por exemplo, a demonstrada no caso desse município.

5. CONCLUSÕES

Os dois modelos desenvolvidos neste trabalho desempenham papéis complementares na modelagem da produção de mel do estado do Rio de Janeiro. O Modelo A mostrou-se mais adequado a variações de produção que apresentaram maior tendência de crescimento ao longo do tempo. O Modelo B, por sua vez, tendeu a mostrar melhores ajustes nos casos em que a produção apresentou comportamento mais variável. Para ser mais preciso, ambos os Modelos – tanto o A quanto o B – forneceram um bom ajuste para seis municípios. Apenas o Modelo A forneceu um bom ajuste em outros seis. Apenas o Modelo B forneceu um bom ajuste em três municípios. De qualquer forma, houve tendência de o modelo A ser mais bem-sucedido quando, dos dez intervalos anuais analisados, a produção era crescente em anos consecutivos em 70% deles. Outro ponto importante a destacar é que, nos municípios em que ambos os modelos forneceram um bom ajuste, a precisão obtida pelo Modelo B foi sempre melhor que a obtida pelo Modelo A.

Dos 18 municípios analisados, escolhidos como representantes das microrregiões geográficas em que está dividido o estado do Rio de Janeiro, apenas três não apresentaram um bom ajuste nos modelos desenvolvidos. Esses três municípios apresentaram, em certos momentos, valores de produção totalmente discrepantes em relação àqueles que vinham sendo apresentados ao longo dos anos.

No caso dos três municípios, para que os modelos pudessem apresentar melhor ajuste para os valores de produção discrepantes, haveria necessidade de uma discretização mais fina dos intervalos em que as discrepâncias ocorreram. Esse procedimento, contudo, tornou-se inviável porque as informações disponíveis eram apenas anuais. De qualquer forma, esses fatos apontam para a necessidade de, nesses casos, se realizarem pesquisas *in loco*, com a finalidade de se obterem informações complementares que permitam melhor compreensão das razões envolvidas nos comportamentos da produção.

Os exemplos mostrados evidenciam que é possível estudar a produção de localidades no caso de intervalos de tempo diferentes de 11 anos. Tudo indica que o Modelo B desempenhará um bom papel quando houver uma razoável mudança de comportamento na produção. Estudos futuros poderão confirmar essas hipóteses.

Os modelos permitem que se façam previsões de valores de produção. É importante observar que as boas previsões serão obtidas se, nos anos em que se deseja avaliar o quanto será produzido, forem mantidas as condições médias de produção dos anos anteriores.

Tudo indica que os Modelos A e B podem fornecer estimativas da produção melífera em certo período de safra. Como se verificou, para se obter essa estimativa, basta efetuar a subdivisão dos intervalos anuais em 12 partes iguais. Parece que o refinamento dessa subdivisão não afeta, de forma significativa, os ajustes obtidos. No entanto, é necessário desenvolver mais estudos a esse respeito.

Por tudo o que foi exposto até aqui, pode-se considerar que os modelos construídos neste trabalho podem ser ferramentas úteis na gestão do agronegócio, em particular no gerenciamento da produção do mel. Razões disso podem ser apontadas na visão global que possibilitam da produção em um determinado período, além de permitirem estimativas de quantidade produzida em períodos de safra. Mais ainda, sob certas condições, devido às previsões razoavelmente boas que podem ser feitas, todo um horizonte possível de decisões pode ser vislumbrado pelo o gerente.

O índice de tecnologia de produção é um dos parâmetros mais importantes presentes nos dois modelos aqui desenvolvidos. Trata-se de um forte indicador da produtividade em certa atividade econômica, durante certo período de tempo. Além do mais, pode ajudar na

avaliação da pertinência dos preços praticados, verificar se deve ou não haver reestruturação produtiva de modo que se aumente a produtividade, entre outros tópicos. Essas razões inspiraram a opção pelo parâmetro A como balizador da escolha de dados neste trabalho.

Somente para exemplificar o tipo de trabalho que o índice de tecnologia pode suscitar, se for tomado o exemplo de Nova Friburgo, que segundo o Modelo A teve um índice de tecnologia de 9,097927. Esse município poderá ser tomado como padrão de produtividade. Dessa forma Casimiro de Abreu, que teve um índice, segundo o mesmo modelo de 2,0000, poderá suscitar do gestor do agronegócio pesquisas e tomadas de decisão que visem à melhoria da produtividade nesse município. Uma outra possibilidade seria, por exemplo, a de se o índice de tecnologia de Nova Friburgo sofresse uma queda significativa em um outro período de tempo. Isso também suscitaria do gestor a tomada de providências para que esse índice voltasse ao patamar anterior. Contudo, algumas questões precisam ser consideradas:

A avaliação precisa do índice de tecnologia de determinada localidade depende de informações adicionais, além de mera informação numérica. Por se tratar de um indicador que, substancialmente, depende de práticas culturais, ponderações a respeito desse índice requerem dados muitas vezes específicos de cada localidade. No entanto, é notória a falta de informações a respeito das práticas agropecuárias no Brasil.¹⁸ A dificuldade para se obterem tais informações, nas várias localidades estudadas, levou a que se postergasse um estudo mais aprofundado do índice de tecnologia ligado à produção de mel.

Em certo sentido, os modelos desenvolvidos neste trabalho apresentam caráter geral. Isso significa que os parâmetros por eles ajustados não se prendem apenas à produção de mel. Pesquisas futuras poderão aplicá-los a outras culturas e localidades diversas das estudadas aqui.

¹⁸ Na tentativa de se obterem dados para a realização de um estudo mais apurado sobre os índices de tecnologia das diversas localidades, foram contatadas as federações de apicultores do Rio de Janeiro, Santa Catarina e Rio Grande do Sul. Além disso, travou-se contato com o Sebrae da área do entorno do Distrito Federal, que demonstrou interesse em colaborar, a princípio, com este trabalho. No entanto, todos esses contatos revelaram-se infrutíferos. Conseguiu-se, contudo, a colaboração da Cooperativa de Apicultores da região de Simplício Mendes, no Piauí. Ocorre que os dados nos foram enviados em uma data que tornou inviável quaisquer estudos mais aprofundados, em razão dos prazos a serem cumpridos.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, M. A. D. de e SOBRAL, C. M. Apicultura: uma oportunidade de negócio sustentável. Salvador: Sebrae Bahia, 2009.
- ARRAES, R. A, MARIANO F. Z., BARROS, S. J. de A. “Medidas de Capital Humano e seus efeitos sobre os Diferenciais de Produtividade: uma comparação entre os estados do Ceará e Santa Catarina”. In: CARVALHO, E. B. S., HOLANDA, M. C., BARBOSA, M. P. (org.) Economia do Ceará em Debate. Fortaleza: IPECE, p. 123-141, 2008.
- AROUXET, M. B., ECHEBEST, N. e PILOTTA, E. A. Active Set Strategy in Powell’s Method for Optimization without Derivatives, Computational and Applied Mathematics, New York, v. 30, n. 1, p. 171-196, 2011.
- ASTER, R. C., BORCHERS, B. e THURBER, C. H. Parameter Estimation and Inverse Problems. 2 ed. Massachussets: Elsevier Inc., 2011. 360 p.
- AUDET, C. DENNIS JR., J. E. “Analysis of Generalized Pattern Searches”, SIAM Journal on Optimization, Philadelphia, v. 3, n. 13, p. 889-903, 2002.
- BERTSEKAS, D. P. Nonlinear Programming. 2 ed. Massachussets: Athena Scientific, 1999.
- BIDDLE, J. “The Introduction of the Cobb-Douglas Regression”, Journal of Economic Perspectives, v. 26, n. 2, Washington D. C., p. 223-236, 2012.
- BUAINAN, A. M. e BATALHA, M. O. “Cadeias Produtivas de Flores e Mel”, Série Agronegócios, v. 9, Brasília: IICA: MAPA, SPA, 2007.
- BURDEN, R. L. e FAIRES, J. D. Análise numérica. 8 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008. 721 p.
- CAMARGO, R. “Produção Orgânica de Mel no Brasil: realidades e gargalos”. In: CONGRESSO ÍBERO-LATINO AMERICANO DE APICULTURA, 10., 2010, Natal. Anais eletrônicos... Natal: FARN/Sebrae, 2010. 1 CD.
- CENTRO UNIVERSITÁRIO DE ESTUDOS SOBRE DESASTRES, “Atlas Brasileiro de Desastres Naturais: 1991 a 2012”, Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2013.
- CHAPRA, S. C. e CANALE, R. P. Métodos numéricos para a engenharia. 5 ed. São Paulo: McGraw Hill, 2008.
- CIOBANU, C.; VASILESCU, M. “Advantages e Disadvantages of Using Neural Networks for Predictions”, “Ovidius” University Annals, Constanta, v. 223, n. 1, p. 444-448, 2013. (Economic Sciences Series.).
- CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE APICULTURA, “Brasil Apícola”. Disponível em <<http://brasilapicola.com.br/sobre-a-cba/>>. Acesso em 07/11/2014.

CONN, A. R., GOULD, N. I. M. e TOINT, P. L. “Trust-Region Methods”, Philadelphia: MPS-SIAM Series on Optimization, SIAM, 2000.

CONN, A. R., SCHEINBERG, K. e VICENTE, L. N. Introduction to Derivative-Free Optimization. Philadelphia: MPS-SIAM Series on Optimization, SIAM, 2013.

DAI, Y.-H. Nonlinear Conjugate Gradient Methods. New Jersey: Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Sciences, 2011.

DATHEIN, R. “O crescimento do desemprego nos países desenvolvidos e sua interpretação pela teoria econômica: as abordagens neoclássica, keynesiana e schumpeteriana”. Campinas. Tese (Doutorado em Economia). Instituto de Economia, Unicamp, 2000.

DE LEVIE, R. “An Improved Numerical Approximation for the First Derivative”, Journal of Chemical Sciences, New York, v. 121, n.5, p. 935-950, 2009.

DOMAR, E. D. “Capital Expansion, Rate of Growth and Employment”, Econometrica, New York, 14, 1946.

DOWSLAND, K. A. e THOMPSON, J. M. “Simulated Annealing”. In: ROZENBERG, G. Handbook of Natural Computing. Heidelberg: Springer-Verlag., p. 1.623-1.655, 2012.

ECKSCHMIDT, T., MORITA, S. S. e BUSO, G. Mel rastreado: transformando o setor apícola. 1 ed. São Paulo: Livraria Varela, 2012.

EMBRAPA. “Produção de Mel, Sistemas de Produção”, n. 3, jul./2003. Disponível em: <<http://sistemasdeproducao.cnptia.embrapa.br/FontesHTML/Mel/SPMel/index.htm>>. Acesso em 10/03/2013.

_____. “Localização Ideal para o Apiário em Agricultura Familiar”, Publicações Embrapa Clima Temperado. Pelotas-RS, 2010. Disponível em: <http://www.cpact.embrapa.br/publicacoes/download/folder/apiario_agricultura.pdf>. Acesso em 24/02/2013.

EXPORTAÇÕES de mel tiveram em 2014 seu melhor ano. ABEMEL – Associação Brasileira dos Produtores de Mel. Rio Claro-SP, 2015. Disponível em: <<http://brazilletsbee.com.br/noticia.aspx?id=98>>. Acesso em 18/02/2015.

FAREBROTHER, R. W. “The Historical Development of the Linear Minimax Absolute Residual Estimation Procedure 1786-1960”, Computational Statistics & Data Analysis. New York, v. 24, n. 4, p. 455-466, jan./1997.

FACERJ. “Associações Comerciais por Município”. Disponível em <<http://www.facerj.org.br/municipios.cfm>>. Acesso em 15/03/2015.

FOOD AND AGRICULTURE ORGANIZATION OF THE UNITED NATIONS-FAOSTAT | © FAO Statistics Division. faostat.fao.org/site/342/default.aspx. Acesso em 2014.

GABLONSKY, J. M. “An Implementation of the DIRECT Algorithm”, Center of Research in Scientific Computation, North Carolina State University, Raleigh, 2003.

GOLINSKY, A. “Avaliação da viabilidade econômica e nível tecnológico da apicultura no estado do Rio de Janeiro. 2009. 101 f. Tese (Doutorado em Produção Vegetal). Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciências e Tecnologias Agropecuárias. Campos dos Goytacazes, RJ, 2009.

GONÇALVES, L. S. “50 anos de abelhas africanizadas no Brasil”. In: XVI Congresso Brasileiro de Apicultura, 2006, Aracaju-SE. Anais... Aracaju: CBA, 2006. 1 CDROM.

HAGEMANN, H. “Solow’s 1956 Contribution in the Context of the Harrod-Domar Model”, History of Political Economy, North Carolina, 41 (ann. Supl.), Duke University Press, 2009.

HAGER, W. W. e ZHANG, H. “A Survey of Nonlinear Conjugate Gradient Methods”, Pacific Journal of Optimization, Yokohama, v. 2, n. 1, p. 35-58, 2006.

_____. “A New Conjugate Gradient Method with Guaranteed Descent and an Efficient Line Search”, SIAM Journal on Optimization, Philadelphia v. 16, p. 1-21, 2005.

HARROD, R. F. “An Essay on Dynamic Theory”, Economic Journal, 49, p. 14-33, 1939.

HUNT, K. J., SBARBARO, D., ZBIKOWSKI, R., GAWTHROP, P. J. “Neural Networks for Control Systems – a survey”, Pergamon Press, Automatica, v. 28, n. 6, p. 1.083-1.112, 1992.

HUYER, W. e NEUMAIER, A. “Global Optimization by Multilevel Coordinate Search”, Journal of Global Optimization, New York, v. 14, n. 4, p. 331-355, 1999.

IBGE, Bando de Dados Agregados. Sistema IBGE de Recuperação Automática. Disponível em <<http://sidra.ibge.gov.br>>. Acesso em períodos variados.

_____. Divisão Regional do Brasil em Mesorregiões e Microrregiões Geográficas, Diretoria de Geociências, Rio de Janeiro, p. 88-90, 1990.

INGBER, L. “Simulated Annealing: Practice versus Theory, Mathematical and Computer Modelling”, Massachusetts, v. 18, n. 11, p. 29-57, 1993.

IRGOIN, C. H. A. “Simulación del Modelo de Solow-Swan”, Contribuciones a la Economía: revista académica virtual, junio, 2011. Disponível em <<http://www.eumed.net/ce/2011a/chai2.htm>>. Acesso em 10/11/2014.

JAIN, T. R., OHRI, V. K. Introductory Macroeconomics. 7 ed. New Delhi: V. K. Publications, 2010, p. 159-178.

JAMIESON, K. G., NOWAK, R. D. e RECHT, B. “Query Complexity of Derivative-Free Optimization”. In: ANNUAL CONFERENCE ON NEURAL INFORMATION PROCESSING SYSTEMS, 16, 2012, Nevada. Proceedings... Nevada: Curran Associates Inc., p. 2.672-2.680, 2013.

JONES, C. I., VOLLRATH, D. Introdução à Teoria do Crescimento Econômico, Rio de Janeiro: Elsevier Editora, 2015.

JONES, D. R., PERTTUNEN, C. D. e STUCKMAN, B. E. “Lipschitzian Optimization without the Lipschitz Constant”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, New York, v. 79, n. 1, 1993.

KALMAN, D. A. “Singularly Valuable Decomposition”, *The College Mathematics*, Washington, v. 27, n. 1, p. 2-23, 1996.

KARAKÖSEN, K. G., NOWAK, R. D. e RECHT, B. “Query Complexity of Derivative-Free Optimization”. In: *ADVANCES IN NEURAL INFORMATION PROCESSING SYSTEMS*, 25., Nevada, 2012, Online Proceedings... Nevada, 2012, Disponível em: <<http://papers.nips.cc/paper/4509-query-complexity-of-derivative-free-optimization>>. Acessado em: 10/06/2014.

KHAN, A. S., MATOS, V. D. e LIMA, P. V. P. S. “Desempenho da Apicultura no Estado do Ceará: competitividade, nível tecnológico e fatores condicionantes”, *Revista de Economia e Sociologia Rural (RESR)*, v. 47, n. 3, jul./set. 2009. Disponível em <<http://www.scielo.br/pdf/resr/v47n3/v47n3a06.pdf>>. Acesso em 05/03/2013.

KIRKPATRICK, J., GELLAT JR. e C. D., VECCHI, M. P. “Optimization by Simulated Annealing”, *Science*, v. 220, n. 4.598, p. 671-680, 1983.

LAWSON, T. “What is this ‘School’ Called Neoclassical Economics”, *Cambridge Journal of Economics*, Cambridge, 37, p. 947-983, 2013.

LEDESMA, S., AVIÑA, G. e SANCHEZ, R. “Practical Considerations on Simulated Annealing Implementation”. In: TAN, C. M., *Simulated Annealing*, Viena: I-Tech Education and Publishing, 2008.

LI, C. “A Conjugate Gradient Type Method for Nonnegative Constraints Optimization Problems”, *Journal of Applied Mathematics*, s.l., 2013.6 p.

LORENZÓN, M. C., KOSHIYAMA, A. S., HAIDAMUS, S. L., MUNIZ JÚNIOR, J. C. B. *Indicadores e desafios da apicultura fluminense: um retrato brasileiro*. Vila Velha-ES: Above Publicações, 2012. 272 p.

LUCAS, R. E. “On the Mechanics of Economic Development”, *Journal of Monetary Economics*, s.l., v. 22, pp. 3-42, jul.-1988.

LUENBERGER, D. G. e YE, Y. *Linear and Nonlinear Programming*. 3 ed. New York: Springer, 2008.

MARDLE, S. e PASCOE, S. “An Overview of Genetic Algorithms for the Solution of Optimization Problems”, *Computer in Higher Education Economics Review*, Economics Network, Bristol, v. 13, n. 1, 1999. Disponível em:

< http://www.economicsnetwork.ac.uk/cheer/ch13_1/ch13_1p16.htm>. Acessado em 11/05/2014.

MATAI, R., SINGH, S. O. e MITALL, M. L. “Travelling Salesman Problem: na overview of applications, formulations and solutions approaches”. In: DAVENDRA, D. *Travelling*

Salesman Problem: theory and applications. Viena: Intech Open Access Publisher, 2010, p. 1-24.

McCULLOCH, W. S. e PITTS, W. A. “Logical Calculus of the Ideas Immanent in the Nervous Activity”, Bulletin of Mathematical Biophysics, New York, v. 5, n. 9, p. 127-147, 1943.

MITCHELL, M. An Introduction to Genetic Algorithms. Massachussets: MIT Press, 1999.

MORÉ, J. J. e THUENTE, D. J. “Line Search Algorithms with Guaranteed Sufficient Decrease”, ACM Transactions on Mathematical Software, New York, v. 20, n. 3, p. 286-307, sept.-1994.

MORÉ, J. J. e WILD, S. M. “Benchmarking Derivative-Free Optimization Algorithms”, SIAM Journal of Optimization, Philadelphia, v. 20, n. 1, p. 172-191, 2009.

NELDER, J. A. e MEAD, R. “A Simplex Method for Function Minimization”, The Computer Journal, Oxford, v. 7, n. 4, p. 308-313, 1965.

NOCEDAL, J. e WRIGHT, S. J. Numerical Optimization. 2 ed. New York: Springer Science+Business, 2006.

PAPADIMITRIOU, C. H. “The Euclidean Travelling Salesman Problem is NP-Complete”, Theoretical Computer Science, Massachussets, v. 4, n. 3, p. 237-244, 1977.

PAPALAMBROS, P. e WILDE, D. J. Principles of Optimal Design: modelling and computation. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

PARK, L. J., PARK, C. H., PARK, C., LEE, T. “Application of Genetic Algorithms to Parameter Estimation of Bioprocesses, Medical and Biological Engineering and Computing”, New York, v. 35., p. 47-49, 1997.

PAULA, J. De. “Mel do Brasil: as exportações brasileiras de mel no período 2000/2006 e o papel do Sebrae”. Brasília: Sebrae, 2008. 98p. Disponível em <<http://www.biblioteca.sebrae.com.br/bds/bds.nsf/DowContador?OpenAgent&unid=2184657E1DFA5F9F832574E8004827D5>>. Acesso em 11/03/2013.

POWELL, M. J. D. “The NEWOA for Unconstrained Optimization without Derivatives, Nonconvex Optimization ansits Applications”, New York, v. 83, p. 255-297, 2006.

_____. “The BOBYQA Algorithm for Bound Constrained Optimization without Derivatives”, Technical Report – Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics. Cambridge, 2009.

PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P. Numerical Recipes: the art of scientific computing. 3 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

PROJETO Contas Regionais do Brasil – PIB do estado do Rio de Janeiro – 2012, CEPERJ – Fundação Centro Estadual de Estatísticas Pesquisas e Formação de Servidores Públicos do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. Disponível

em:<<http://www.ceperj.rj.gov.br/ceep/pib/PIB%20do%20Estado%20do%20Rio%20de%20Janeiro%202012.doc>>. Acesso em 12/02/2015.

RESENDE, R. “O Projeto Apis do SEBRAE e sua contribuição para o desenvolvimento da apicultura no Brasil”. In: CONGRESSO ÍBERO-LATINO-AMERICANO DE APICULTURA, 10., 2010, Natal-RN: Anais Eletrônicos...Disponível em <<http://www.xibla.com.br/palestras.php>>. Acesso em 10/03/2013.

ROMER, D. Advanced Macroeconomics. 4 ed. New York: McGraw-Hill, 2012.

RIOS, L. M. e SAHINIDIS, N. “Derivative-free Optimization: a review of algorithms and comparison of software implementation”, Journal of Global Optimization, New York, v. 56, p. 1.247-1.293, 2013.

RODRIGUES, A. E. “Produtos apícolas: avanços na produção e comercialização”. In: ANAIS DO CONGRESSO DA ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ZOOTECNISTAS, 2., 2006, Águas de Lindoia. Anais eletrônicos...Águas de Lindoia: ABZ, 2006.

SANT’ANA, L. D. “Determinação do conteúdo de substâncias fenólicas e avaliação da capacidade antioxidante de méis de *Apis Mellifera* no Estado do Rio de Janeiro”. 2010. 129 f. Dissertação (Mestrado em Química). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Ciências Exatas, Instituto de Química, Seropédica, RJ, 2010.

SCHITTKOWSKY, K. Numerical Ata Fitting in Dynamical Systems: a practical introduction with applications and software. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 2002.

SHEWCHUK, J. R. “An Introduction to the Conjugate Gradient Method without the agonizing pain”, [s.n.], 1994. Disponível em: <<http://www.cs.cmu.edu/~quake-papers/painless-conjugate-gradient.pdf>>. Acesso em 5 de novembro de 2011.

SILVA, E. A. Da. “Apicultura sustentável: produção e comercialização de mel no sertão sergipano”. 2010. Dissertação (Mestrado em Desenvolvimento e Meio Ambiente). Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão-SE. Disponível em <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=172316>. Acesso em 10/03/2013.

SILVA, P. K. Da. “A evolução das modernas teorias do crescimento econômico, A Economia em Revista, Universidade Estadual de Maringá, v. 16, n. 1, p. 31-41, 2008.

SILVA FILHO, G. E. da, CARVALHO, E. B. S. “A teoria do crescimento endógeno e o desenvolvimento endógeno regional: investigação das convergências em um cenário pós-cepalino”, Revista Econômica do Nordeste, Fortaleza, v. 32, n. especial, p. 467-482, 2001.

SOARES, A. E. E. “Captura de enxames com caixas iscas e sua importância no melhoramento de abelhas africanizadas”. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE APICULTURA, 15., Congresso Brasileiro de Meliponicultura, 1., 2004, Natal, RN. Anais Eletrônicos..., Natal, RN: 1 CD-ROM. Design Évolo, 2004. esp. 1-8.

SOLOW, R. M. A. “Contribution to the Theory of Economic Growth”, The Quarterly Journal of Economics, Oxford, v. 70, n. 1, p. 65-94, feb.-1956.

SORENSEN, H. W. “Least Squares Estimation: from Gauss to Kalman”, Piscataway, IEEE Spectrum, New Jersey, v. 7, n. 7, jul.-1970, p. 63-68.

SOUZA, D. C. A. “Profissionalização da apicultura no Brasil”, Revista Sebrae Agronegócios, Brasília, n. 3, mai.-2006, p. 50-51.

STOER, J. e BURLIRSCH, R. Introduction to Numerical Analysis. New York: Springer-Verlag, 2002.

STRANG, G. Linear Algebra and its Applications. 4 ed. San Diego: Thomson Learning Inc., 2006.

TARANTOLA, A. “Inverse Problem Theory and Methods for Model”, Parameter Estimation, Philadelphia, PA: SIAM, 2004.

TASSINARI, W. S., LORENZÓN, M. C. e PEIXOTO, E. L. “Spatial Regression Models to Evaluate Beekeeping Production in the State of Rio de Janeiro”, Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia, Belo Horizonte, v. 65, n. 2, p. 553-558, 2013.

UZAWA, H. “Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth”, International Economic Review, Pennsylvania-US, v. 6, n. 1, p. 18-31.

WHITLEY, D. “An Overview of Evolutionary Algorithms: practical issues and common pitfalls”, Journal of Information and Software Technology, Massachusetts, v. 43, n. 14, p. 817-831, 2001.

YANG, Xin-She. Nature-inspired Metaheuristic Algorithms. 2ed. Cambridge: Luniver Press, 2010.

YIGUI, O., QIAN, Z. e HAUCHAN, L. “An ODE-based Trust region method for unconstrained optimization problems”, Journal of Computational and Applied Mathematics, Massachusetts, v. 232, n. 2, p. 318-326, 2009.

ZHANG, Li, LI, Dong-Hui e ZHOU, W. A Descent Modified Polak-Ribière-Polyak Conjugate Gradient Method and its Global Convergence, IMA Journal of Numerical Analysis, Oxford, v. 16, p. 629-640, 2006.

7. ANEXOS

7.1. Dados Gedanken: Breve Análise e Descrição de sua Construção

Os dados *gedanken* foram gerados no software livre Octave, sendo utilizadas apenas funções básicas do ambiente, como por exemplo a função *rand*. Esta função, a qual gera um número uniformemente distribuído no intervalo $[0,1]$, foi utilizada para gerar valores aleatórios dos parâmetros α , A , B , u e Nop .

Os parâmetros foram gerados a partir de vetores com m posições, começando no valor vi e terminando em vf . Para isso, foi utilizado o comando `linspace(vi,vf,m)`. Tomando $prec = 0.1$ e $m = 50$:

```
alpha = linspace(0 + prec, 1 - prec, m);
A = linspace(2, 20, m);
B = linspace(0 + prec, 1, m);
u = linspace(0 + prec, 1, m);
Nop = linspace(0 + prec, 10, m);
sendo os valores iniciais da produção gerados a partir dos vetores:
p0 = linspace(0.2, 0.3, m);
h0 = linspace(0.2, 0.2, m);
```

Fixados os valores iniciais e dos parâmetros, são gerados $n+1$ valores para a produção e para o capital humano (no caso presente, $n = 10$). Estes valores são calculados aplicando-se um dos métodos de Runge-Kutta de quarta ordem, com tamanho do passo fixo, ao sistema de equações diferenciais formado pelas equações do Modelo B (veja seção 3.1.2), nas quais são substituídos os parâmetros e valores iniciais estabelecidos.

Todo o processo anterior foi repetido 73 vezes, o que forneceu como resultado 73 conjuntos de dados, cada um com 11 valores correspondentes à produção e 11 correspondentes ao capital humano. A partir desse ponto, o modelo B foi aplicado a cada um dos 73 conjuntos de dados, que foram classificados em ordem crescente. A classificação desses conjuntos foi feita segundo a recuperação obtida do parâmetro A , relativo ao índice de tecnologia. Dessa forma, o conjunto que obteve a melhor recuperação do parâmetro A foi classificado em primeiro lugar; o conjunto que obteve a segunda melhor recuperação do parâmetro A ficou em segundo lugar, e assim por diante.

A seguir (Tabelas 23 a 26), apresentam-se os parâmetros gerados pelos dados *gedanken* segundo o algoritmo acima. Estão juntos também os parâmetros recuperados e os erros relativos aos valores gerados desses parâmetros. Cada um dos setenta e três conjuntos de dados *gedanken* é definido como g_i , $1 \leq i \leq 73$:

Tabela 23. Parâmetros gerados pelos dados gedanken – Conjuntos g1 a g18.

g1					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,85102	8,040816	0,687755	0,522449	8,181633
Dados Recuperados	0,827696	5,996055	0,294418	0,226528	5,004676
Erro Relativo	0,027407	0,254298	0,57191471	0,566411	0,388304
g2					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,508163	4,285714	0,265306	0,173469	6,363265
Dados Recuperados	0,46393	5,992329	0,4598138	0,489495	4,999116
Erro Relativo	0,087044	0,39821	0,73314512	1,821802	0,214379
g3					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,785714	8,857143	0,577551	0,926531	6,161224
Dados Recuperados	0,499477	5,99995	0,4692426	0,540356	4,999959
Erro Relativo	0,364302	0,322586	0,18753045	0,416796	0,18848
g4					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,165306	2	0,246939	0,742857	5,959184
Dados Recuperados	0,129423	6,329256	0,053370	0,201548	5,263258
Erro Relativo	0,217073	2,164628	0,78387229	0,728685	0,116782
g5					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,655102	4,122449	0,577551	0,320408	3,534694
Dados Recuperados	0,590688	6,001751	0,376924	0,270699	5,024358
Erro Relativo	0,098326	0,45587	0,34737608	0,155144	0,421441
g6					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,589796	5,265306	0,246939	0,320408	6,969388
Dados Recuperados	0,369258	6,066763	0,478737	0,574623	4,887099
Erro Relativo	0,373922	0,152215	0,93868405	0,793409	0,298776
g7					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,52449	6,081633	0,118367	0,191837	2,322449
Dados Recuperados	0,472089	5,324796	0,113372	0,456467	4,905993
Erro Relativo	0,099908	0,124446	0,04219757	1,379454	1,112422
g8					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,9	9,510204	0,797959	0,577551	5,353061
Dados Recuperados	0,909128	6,856130	0,838921	0,720830	3,688635
Erro Relativo	0,010143	0,279076	0,05133384	0,24808	0,31093

Continua...

Continuação da **Tabela 23.**

g9					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,704082	2	0,430612	0,357143	7,373469
Dados Recuperados	0,623329	4,796410	0,204539	0,067112	8,928855
Erro Relativo	0,114693	1,398205	0,52500348	0,812088	0,210944
g10					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,508163	4,44898	0,614286	0,797959	3,534694
Dados Recuperados	0,447974	5,948601	0,192159	0,571449	5,186748
Erro Relativo	0,118445	0,337071	0,68718252	0,283862	0,467382
g11					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,540816	5,428571	0,485714	0,338776	7,979592
Dados Recuperados	0,486796	6,002640	0,483318	0,530885	4,998415
Erro Relativo	0,099886	0,10575	0,00493377	0,567068	0,3736
g12					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,785714	7,387755	0,467347	0,283673	8,989796
Dados Recuperados	0,709965	5,990058	0,261451	0,111237	5,115280
Erro Relativo	0,096408	0,189191	0,44056301	0,607871	0,43099
g13					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,671429	6,571429	0,136735	0,797959	8,383673
Dados Recuperados	0,537139	5,766951	0,024191	0,329504	5,091706
Erro Relativo	0,200007	0,122421	0,82308334	0,587067	0,392664
g14					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,85102	8,367347	0,173469	0,302041	9,191837
Dados Recuperados	0,879726	6,003965	0,095754	0,138142	5,647366
Erro Relativo	0,033731	0,282453	0,44800558	0,542639	0,385611
g15					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,557143	7,714286	0,908163	0,926531	7,57551
Dados Recuperados	0,445356	5,901144	0,371693	0,653800	5,052590
Erro Relativo	0,200643	0,235037	0,59072006	0,294358	0,333036
g16					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,589796	3,306122	0,926531	0,834694	8,383673
Dados Recuperados	0,445371	6,040889	0,327896	0,591820	4,978844
Erro Relativo	0,244873	0,827183	0,64610326	0,290973	0,406126

Continua...

Continuação da **Tabela 23.**

g17					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,606122	9,020408	0,136735	0,540816	0,908163
Dados Recuperados	0,494457	6,040825	0,424426	0,949571	4,832196
Erro Relativo	0,184228	0,330316	2,10400044	0,755812	4,320847
g18					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,295918	3,142857	0,155102	0,889796	7,777551
Dados Recuperados	0,292868	6,099250	0,024245	0,280685	4,875969
Erro Relativo	0,010308	0,940671	0,84368641	0,684551	0,373071

Tabela 24. Parâmetros gerados pelos dados gedanken – Conjuntos g19 a g36.

g19					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,818367	2,489796	0,467347	0,302041	6,767347
Dados Recuperados	0,769932	5,276790	0,228499	0,010000	6,124244
Erro Relativo	0,059185	1,119366	0,51107271	0,966892	0,09503
g20					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,622449	2,326531	0,632653	0,522449	7,171429
Dados Recuperados	0,321501	6,043622	0,362888	0,673048	5,122030
Erro Relativo	0,48349	1,597697	0,42640342	0,288255	0,285773
g21					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,491837	3,795918	0,210204	0,430612	3,736735
Dados Recuperados	0,511584	5,631749	0,138042	0,279471	5,159135
Erro Relativo	0,040148	0,483633	0,34329651	0,350992	0,380653
g22					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,671429	3,469388	0,37551	0,834694	4,544898
Dados Recuperados	0,610890	4,762185	0,072986	0,475260	6,135213
Erro Relativo	0,090165	0,37263	0,80563594	0,430618	0,349912
g23					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,459184	5,755102	0,338776	0,908163	7,171429
Dados Recuperados	0,433823	5,875935	0,352031	0,621514	4,907343
Erro Relativo	0,05523	0,020996	0,03912674	0,315636	0,315709

Continua...

Continuação da **Tabela 24.**

g24					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,589796	6,734694	0,614286	0,559184	3,534694
Dados Recuperados	0,442216	6,011512	0,489357	0,498708	4,993869
Erro Relativo	0,250223	0,107382	0,20337253	0,10815	0,412815
g25					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,52449	4,122449	0,706122	0,761224	8,989796
Dados Recuperados	0,472626	5,464011	0,180275	0,351614	7,014681
Erro Relativo	0,098884	0,325428	0,74469723	0,538094	0,219706
g26					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,753061	9,020408	0,283673	0,265306	9,797959
Dados Recuperados	0,723965	6,476290	0,172225	0,168115	5,122679
Erro Relativo	0,038638	0,28204	0,39287384	0,366337	0,477169
g27					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,638776	3,959184	0,65102	0,467347	6,767347
Dados Recuperados	0,377024	5,961044	0,439794	0,643429	5,011600
Erro Relativo	0,409771	0,505624	0,32445455	0,376768	0,259444
g28					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,671429	8,857143	0,228571	0,1	8,989796
Dados Recuperados	0,578931	5,069060	0,179295	0,225369	5,818113
Erro Relativo	0,137762	0,427687	0,21558159	1,25369	0,352809
g29					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,687755	9,346939	0,1	0,853061	6,363265
Dados Recuperados	0,499693	6,001013	0,468686	0,539807	5,000065
Erro Relativo	0,273443	0,35797	3,68686	0,367212	0,21423
g30					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,85102	3,795918	0,320408	0,265306	8,989796
Dados Recuperados	0,803364	2,930102	0,341661	0,530888	7,834001
Erro Relativo	0,055999	0,228091	0,06633168	1,001039	0,128567
g31					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,655102	5,755102	0,155102	0,65102	3,332653
Dados Recuperados	0,613298	5,969438	0,169752	0,806700	4,981260
Erro Relativo	0,063813	0,037243	0,09445462	0,239132	0,494683

Continua...

Continuação da **Tabela 24.**

g32					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,720408	6,571429	0,577551	0,504082	1,716327
Dados Recuperados	0,461994	6,010151	0,418786	0,516500	4,993906
Erro Relativo	0,358706	0,085412	0,27489399	0,024635	1,909647
g33					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,883673	9,836735	0,834694	0,889796	8,181633
Dados Recuperados	0,925556	6,442683	0,435856	0,860641	4,932761
Erro Relativo	0,047396	0,345038	0,47782541	0,032766	0,397093
g34					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,802041	5,918367	0,889796	0,595918	9,191837
Dados Recuperados	0,759577	5,456584	0,287298	0,127826	5,428832
Erro Relativo	0,052946	0,078025	0,67711947	0,785497	0,409386
g35					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,671429	3,632653	0,632653	0,65102	1,514286
Dados Recuperados	0,496906	6,000243	0,469833	0,540547	4,999870
Erro Relativo	0,259927	0,651752	0,25736004	0,169693	2,3018
g36					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,344898	2	0,173469	0,412245	8,989796
Dados Recuperados	0,265125	2,023137	0,120200	0,446860	8,401148
Erro Relativo	0,231294	0,011569	0,30708138	0,083967	0,06548

Tabela 25. Parâmetros gerados pelos dados gedanken – Conjuntos g37 a g54.

g37					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,638776	2,979592	0,908163	0,614286	3,736735
Dados Recuperados	0,551061	5,954867	0,288555	0,154940	4,944736
Erro Relativo	0,137317	0,998551	0,6822653	0,747773	0,323277
g38					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,230612	5,755102	0,191837	0,816327	4,94898
Dados Recuperados	0,303373	5,751405	0,523060	0,758038	5,253976
Erro Relativo	0,31551	0,000642	1,72658611	0,071404	0,061628

Continua...

Continuação da **Tabela 25.**

g39					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,883673	2,816327	0,706122	0,797959	8,787755
Dados Recuperados	0,848724	2,092270	0,774915	0,877948	6,527865
Erro Relativo	0,03955	0,257093	0,09742424	0,100242	0,257164
g40					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,785714	6,897959	0,357143	0,963265	4,140816
Dados Recuperados	0,499122	6,000092	0,469250	0,540332	4,999967
Erro Relativo	0,364754	0,130164	0,31389919	0,439062	0,207484
g41					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,818367	2,653061	0,797959	0,963265	7,777551
Dados Recuperados	0,808894	5,055963	0,018812	0,010000	6,028802
Erro Relativo	0,011575	0,905709	0,97642503	0,989619	0,224846
g42					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,753061	5,428571	0,155102	0,136735	7,57551
Dados Recuperados	0,676344	5,576897	0,094714	0,067360	5,393801
Erro Relativo	0,101873	0,027323	0,38934559	0,507369	0,287995
g43					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,622449	5,265306	0,393878	0,559184	6,363265
Dados Recuperados	0,493943	6,000504	0,469982	0,539787	4,999692
Erro Relativo	0,206453	0,139631	0,19321668	0,034689	0,214288
g44					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,883673	3,306122	0,1	0,338776	4,544898
Dados Recuperados	0,393563	6,017495	0,507104	0,643418	4,996588
Erro Relativo	0,554628	0,820107	4,071039	0,899243	0,099384
g45					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,606122	3,795918	0,44898	0,779592	2,928571
Dados Recuperados	0,592840	6,220042	0,144995	0,517477	5,053827
Erro Relativo	0,021913	0,638613	0,67705688	0,33622	0,725697
g46					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,52449	7,22449	0,1	0,210204	5,555102
Dados Recuperados	0,425685	3,254645	0,281555	0,801769	5,987235
Erro Relativo	0,188383	0,549498	1,815552	2,814243	0,07779

Continua...

Continuação da **Tabela 25.**

g47					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,52449	8,040816	0,853061	0,926531	8,181633
Dados Recuperados	0,470379	5,798008	0,162898	0,719537	5,209832
Erro Relativo	0,103169	0,278928	0,8090432	0,223408	0,363228
g48					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,687755	5,591837	0,412245	0,155102	8,585714
Dados Recuperados	0,624215	3,508141	0,401896	0,397114	6,350270
Erro Relativo	0,092387	0,372632	0,02510376	1,560341	0,260368
g49					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,769388	8,530612	0,834694	0,853061	2,120408
Dados Recuperados	0,467837	6,239952	0,301025	0,676327	4,789593
Erro Relativo	0,391936	0,268522	0,63935862	0,207176	1,258807
g50					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,377551	8,367347	0,228571	0,118367	6,363265
Dados Recuperados	0,678651	5,738445	0,220069	0,342285	5,374471
Erro Relativo	0,797507	0,314186	0,03719719	1,891723	0,155391
g51					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,295918	3,306122	0,155102	0,265306	7,57551
Dados Recuperados	0,179929	5,937717	0,045071	0,333468	4,959860
Erro Relativo	0,391962	0,795976	0,70941	0,256919	0,345277
g52					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,720408	2,489796	0,302041	0,173469	2,52449
Dados Recuperados	0,491610	6,000048	0,470939	0,539639	4,999970
Erro Relativo	0,317595	1,409855	0,55918733	2,110866	0,980586
g53					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,655102	7,55102	0,577551	0,577551	2,52449
Dados Recuperados	0,437617	6,029664	0,431311	0,520000	4,980662
Erro Relativo	0,331987	0,201477	0,25320725	0,099646	0,972938
g54					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,459184	9,836735	0,1	0,155102	5,353061
Dados Recuperados	0,473803	6,183748	0,098364	0,351598	4,948722
Erro Relativo	0,031837	0,371362	0,0163645	1,266884	0,075534

Tabela 26. Parâmetros gerados pelos dados gedanken – Conjuntos g55 a g73.

g55					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,785714	5,918367	0,246939	0,871429	6,363265
Dados Recuperados	0,635497	5,234147	0,028807	0,336604	5,248268
Erro Relativo	0,191186	0,11561	0,88334455	0,613733	0,175224
g55					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,410204	7,061224	0,136735	0,504082	8,787755
Dados Recuperados	0,457364	6,002352	0,432764	0,588874	4,997652
Erro Relativo	0,114966	0,149956	2,16498556	0,168211	0,431294
g57					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,9	5,428571	0,37551	0,761224	6,767347
Dados Recuperados	0,809613	5,100133	0,094013	0,389064	6,533809
Erro Relativo	0,10043	0,060502	0,74963815	0,488897	0,03451
g58					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,491837	4,122449	0,779592	0,577551	2,322449
Dados Recuperados	0,492241	6,033264	0,522897	0,577656	4,970751
Erro Relativo	0,000822	0,463515	0,32926903	0,000181	1,140306
g59					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,867347	2,489796	0,706122	0,614286	1,514286
Dados Recuperados	0,798690	6,163137	0,570947	0,672469	4,974652
Erro Relativo	0,079157	1,475358	0,19143349	0,094717	2,285147
g60					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,720408	3,142857	0,228571	0,283673	1,110204
Dados Recuperados	0,722633	6,498463	0,739674	0,852455	4,374424
Erro Relativo	0,003089	1,067693	2,23607851	2,005061	2,940198
g61					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,589796	3,469388	0,338776	0,504082	6,363265
Dados Recuperados	0,422117	5,928313	0,384349	0,622542	5,045576
Erro Relativo	0,2843	0,708749	0,1345237	0,235001	0,207077
g62					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,655102	5,102041	0,338776	0,72449	5,757143
Dados Recuperados	0,694115	5,882272	0,115104	0,377548	5,033969
Erro Relativo	0,059553	0,152925	0,66023567	0,478877	0,125613

Continua...

Continuação da **Tabela 26.**

g63					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,85102	3,469388	0,393878	0,687755	5,15102
Dados Recuperados	0,497433	5,999811	0,469336	0,540283	5,000121
Erro Relativo	0,415486	0,729357	0,19157683	0,214425	0,029295
g64					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,508163	3,959184	0,136735	0,173469	3,736735
Dados Recuperados	0,329370	5,693574	0,100393	0,212384	4,658810
Erro Relativo	0,351842	0,438068	0,26578564	0,224331	0,24676
g65					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,720408	3,795918	0,65102	0,577551	7,777551
Dados Recuperados	0,642926	3,734786	0,279298	0,322957	6,196558
Erro Relativo	0,107553	0,016105	0,57098338	0,440816	0,203276
g66					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,606122	5,102041	0,37551	0,981633	6,969388
Dados Recuperados	0,642535	4,825141	0,056072	0,876843	5,757916
Erro Relativo	0,060076	0,054272	0,85067897	0,10675	0,173828
g67					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,312245	3,795918	0,173469	0,797959	8,585714
Dados Recuperados	0,323338	6,101280	0,042653	0,325085	5,541382
Erro Relativo	0,035526	0,607327	0,75411964	0,592604	0,354581
g68					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,655102	5,102041	0,72449	0,944898	5,353061
Dados Recuperados	0,499414	6,000029	0,469268	0,540362	4,999978
Erro Relativo	0,237654	0,176006	0,35227802	0,428126	0,065959
g69					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,47551	4,285714	0,742857	0,632653	4,342857
Dados Recuperados	0,447300	5,982410	0,457547	0,541706	5,043492
Erro Relativo	0,059326	0,395896	0,38407163	0,143755	0,16133
g70					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,459184	4,938776	0,1	0,72449	8,585714
Dados Recuperados	0,482162	6,098771	0,028019	0,373932	6,005054
Erro Relativo	0,050041	0,234875	0,7198077	0,483869	0,300576

Continua...

Continuação da **Tabela 26**.

g71					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,671429	8,367347	0,522449	0,816327	0,908163
Dados Recuperados	0,542897	6,073826	0,236491	0,711392	5,035194
Erro Relativo	0,191431	0,274104	0,5473407	0,128545	4,544373
g72					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,834694	4,938776	0,981633	0,65102	5,959184
Dados Recuperados	0,790467	5,612579	0,298434	0,201910	5,507553
Erro Relativo	0,052986	0,136431	0,69598261	0,689856	0,075787
g73					
Parâmetros	α	A	B	u	Nop
Dados Gerados	0,753061	5,918367	0,614286	0,816327	3,736735
Dados Recuperados	0,689575	6,531689	0,513995	0,851174	4,774316
Erro Relativo	0,084304	0,10363	0,16326499	0,042688	0,27767

Metade dos conjuntos de dados gedanken conseguiram recuperações do parâmetro A dentro da margem de 30%. Isso é ilustrado na Figura 29.

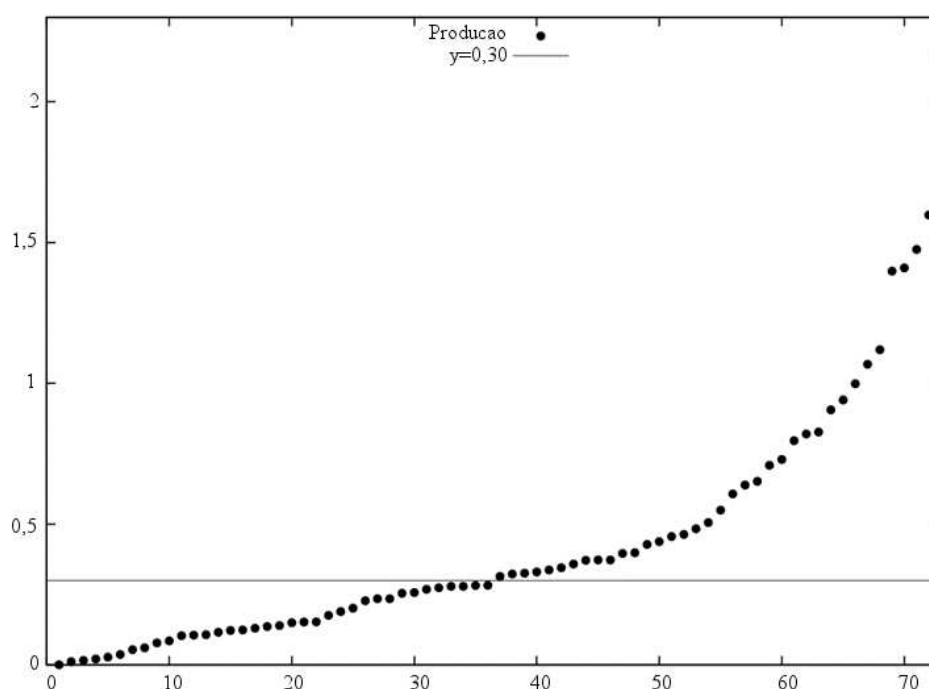


Figura 29. Gráfico mostrando a distribuição dos dados gedanken.

Os conjuntos de dados gedanken que forneceram as duas melhores recuperações do parâmetro A foram os denominados g38 e g36. A Figura 30 ilustra os ajustes obtidos pelo modelo B, quando aplicado a esses conjuntos de dados.

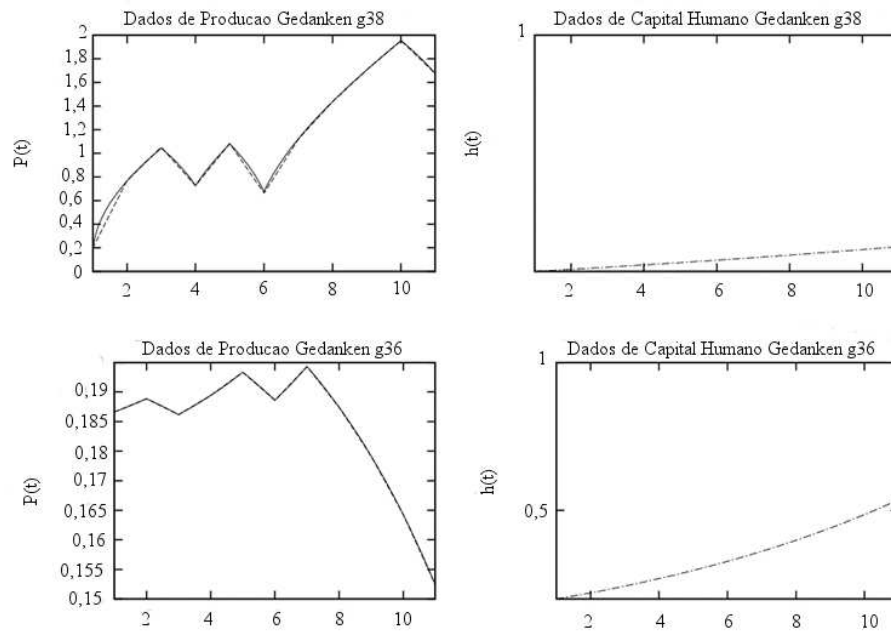


Figura 30. Gráficos dos ajustes obtidos para os conjuntos g38 e g36.

A terceira e quarta melhores posições na classificação dos conjuntos de dados gedanken foram obtidas pelos assim denominados g65 e g23. A Figura 31 ilustra os ajustes obtidos pelo modelo B, para cada um desses conjunto de dados.

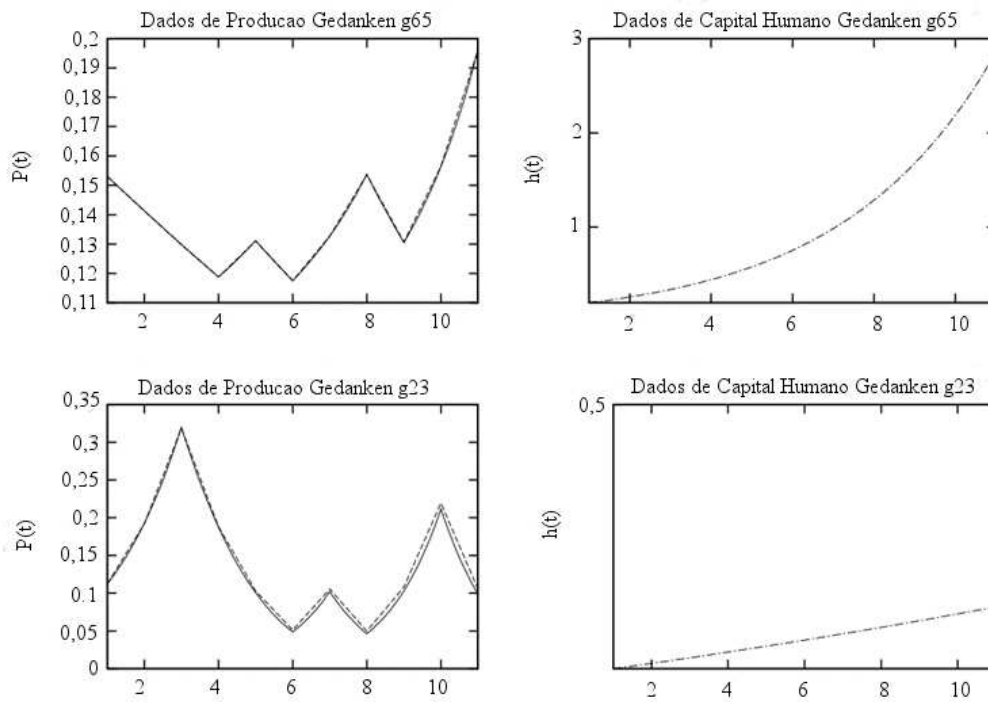


Figura 31. Gráficos dos ajustes obtidos para os dados gedanken g65 e g23.

Ao observar os gráficos anteriores, pode-se concluir que boas recuperações do parâmetro A podem permitir bons ajustes do modelo B aos dados *gedanken*.

7.2.Problemas Encontrados nos Ajustes de Alguns Poucos Municípios

Para alguns municípios não foram obtidos bons ajustes nem para o modelo A, nem para o modelo B. Esses municípios foram os seguintes: Carmo, na Microrregião de Cantagalo-Cordeiro; São José do Vale do Rio Preto, na Microrregião Serrana e Varre-Sai, na Microrregião de Itaperuna.

A Tabela 27 apresenta os dados de ajuste dos modelos A e B, para o município de Carmo.

Tabela 27. Dados dos dos ajustes referentes ao município de Carmo.

Anos	Produção	Modelo A	Erro Relativo	Modelo B	Erro Relativo
		Valor Gerado		Valor Gerado	
1	3,2040000	3,2040000000000000	0	3,2040000000000000	0
2	3,1170000	3,2040000000000010	0,0279115	3,2040000000000000	0,000779049
3	3,2210000	3,2040000000000030	0,0052779	3,2040000000000000	2,78559E-05
4	3,6850000	3,2040000000000060	0,1305292	3,2040000000000100	0,01703786
5	1,2343000	3,2040000000000110	1,5958030	3,2040000000000000	2,546588
6	1,2400000	3,2040000000000200	1,5838710	3,2040000000000100	2,508647
7	1,2700000	3,2040000000000360	1,5228350	3,2040000000000500	2,319025
8	1,2910000	3,2040000000000640	1,4817970	3,2040000000001000	2,195723
9	1,0261000	3,2040000000001140	2,1225030	3,2040000000000000	4,505018
10	1,0410000	3,2040000000002020	2,0778100	3,2040000000001900	4,317294
11	1,0615000	3,2040000000003560	2,0183700	3,2040000000005300	4,073818
Média	1,9446273	3,2040000000000740		3,2040000000000810	
Desv. Padrão	1,092797576	0,0000000000001124		0,0000000000001531	

Ao observar a média e o desvio padrão dos valores gerados pelos modelos A e B, nota-se que há uma discrepância grande entre essas medidas e as medidas correspondentes da produção. Portanto, os ajustes de ambos os modelos não foram bons.

A Figura 32 ilustra o comportamento da produção no município de Carmo ao longo do tempo:

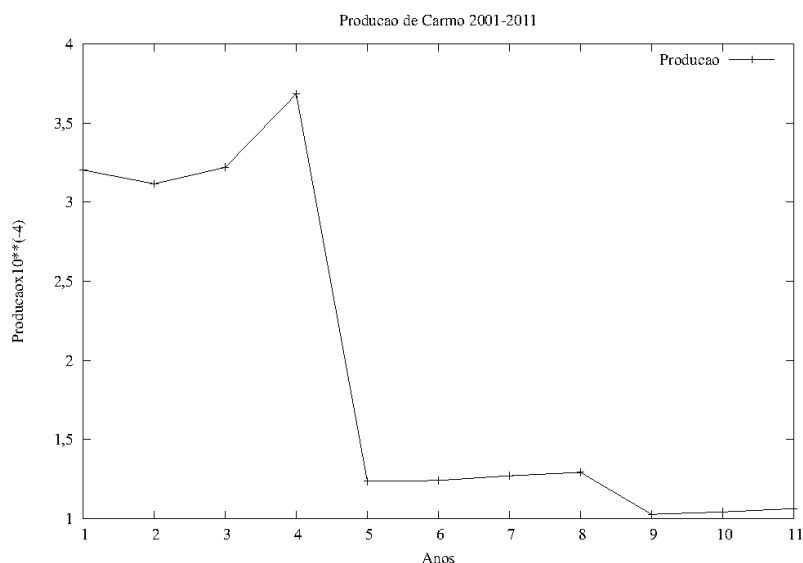


Figura 32. Gráfico da produção no município de Carmo.

O gráfico da Figura 32 mostra um decréscimo acentuado da produção entre os anos 4 e 5. Ocorre que, entre esses dois anos, houve uma queda da produção da ordem de 66,5%. Não é simples para um modelo ajustar-se a tamanha variação negativa na quantidade produzida. Tudo indica que fatores alheios à tecnologia e ao capital humano produziram tal comportamento.

A Tabela 28 apresenta os ajustes obtidos pelos modelos A e B, referentes à produção do município de São José do Vale do Rio Preto.

Tabela 28. Dados dos dos ajustes referentes ao município de São José do Vale do Rio Preto.

Anos	Produção	Modelo A	Erro Relativo	Modelo B	Erro Relativo
		Valor Gerado		Valor Gerado	
1	0,7200000	0,7200000000000000	0,0000000	0,7200000000000000	0,0000000
2	0,8100000	0,7200000000000000	0,1111111	0,7200000000000000	0,0123457
3	0,9160000	0,7200000000000000	0,2139738	0,7200000000000000	0,0457848
4	0,7280000	0,7200000000000000	0,0109890	0,7200000000000000	0,0001208
5	0,2770000	0,7200000000000000	1,5992780	0,7200000000000000	2,5576900
6	0,2770000	0,7200000000000000	1,5992780	0,7200000000000000	2,5576900
7	0,2800000	0,7200000000000000	1,5714290	0,7200000000000000	2,4693880
8	0,3900000	0,7200000000000000	0,8461538	0,7200000000000000	0,7159763
9	0,4000000	0,7200000000000005	0,8000000	0,7200000000000020	0,6400000
10	0,4520000	0,7200000000000150	0,5929204	0,7200000000000460	0,3515545
11	0,4800000	0,72000000000004362	0,5000000	0,72000000000013380	0,2500000
Média	0,5209091	0,7200000000000411		0,7200000000001260	
Desv. Padrão	0,4520000	0,7200000000000150	0,5929204	0,7200000000000460	0,3515545

As médias e os desvios padrão dos dois modelos, A e B, estão bastante discrepantes da média e do desvio padrão da produção do município. Isso permite concluir o ajuste ruim dos modelos.

A Figura 33 mostra o comportamento da produção em São José do Vale do Rio Preto:

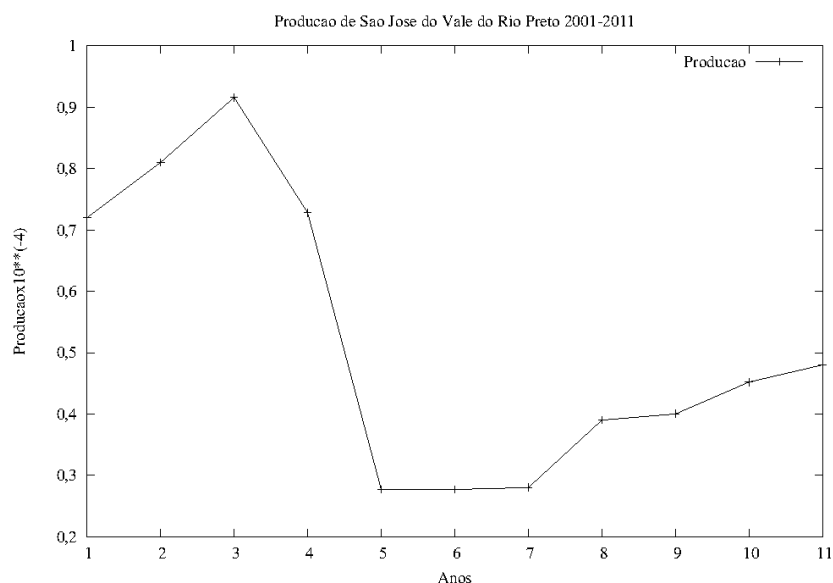


Figura 33. Gráfico da produção para São José do Vale do Rio Preto.

O gráfico da Figura 33 mostra um decréscimo acentuado da produção entre os anos 4 e 5. A variação negativa nesse intervalo de tempo foi da ordem de 62%. Seria praticamente impossível aos modelos ajustarem-se a tamanho decréscimo. Parece que esse comportamento deve-se a fatores alheios aos parâmetros determinantes do modelo, como a tecnologia e o capital humano.

Os maus ajustes dos modelos aos dados de produção do município de Varre-Sai estão ilustrados na Tabela 29 e na Figura 34.

Tabela 29. Dados de ajuste dos modelos para o município de Varre-Sai.

Anos	Produção	Modelo A	Erro Relativo	Modelo B	Erro Relativo
		Valor Gerado		Valor Gerado	
1	0,1600000	0,1600000000000000	0,0000000	0,1600000000000000	0,0000000
2	0,1800000	0,1600000000000273	0,1111111	0,1600000000000000	0,0123457
3	0,1800000	0,1600000000000662	0,1111111	0,1600000000000000	0,0123457
4	0,2500000	0,1600000000001219	0,3600000	0,1600000000000000	0,1296000
5	0,1450000	0,1600000000002014	0,1034483	0,1600000000000000	0,0107016
6	0,1500000	0,1600000000003149	0,0666667	0,1600000000000000	0,0044444
7	0,0734000	0,1600000000004771	1,1798370	0,1599999999999999	1,3920140
8	0,0763000	0,1600000000007088	1,0969860	0,1600000000000020	1,2033770
9	0,0830000	0,1600000000010396	0,9277108	0,1600000000000090	0,8606474
10	0,0910000	0,1600000000015122	0,7582418	0,1600000000000320	0,5749306
11	0,1500000	0,1600000000021872	0,0666667	0,1600000000000960	0,0044444
Média	0,1398818	0,160000000006051		0,160000000000125	
Desv. Padrão	0,0548344	0,000000000007080		0,000000000000293	

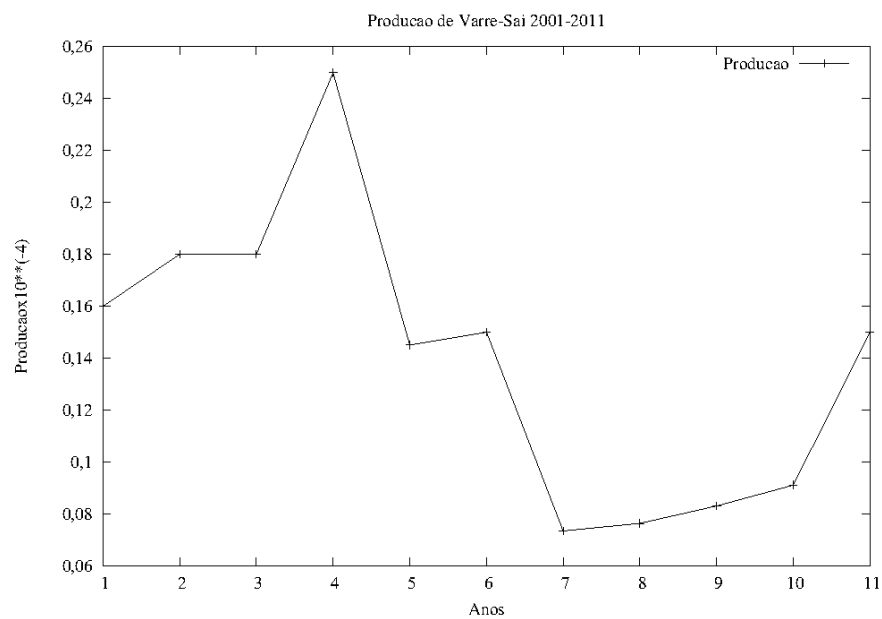


Figura 34.Gráfico da produção para o município de Varre-Sai.

Com respeito a este município, é interessante observar que, até o sexto ano, ambos os modelos vinham ajustando-se bem à produção (vide Tabela 29). O bom ajuste foi perdido na passagem do sexto para o sétimo ano, quando houve um decréscimo de mais de 50% nessa variável (vide Tabela 29 e Figura 34). É pouco provável que se encontre alguma explicação para tal decréscimo, apenas baseando-se em fatores intrínsecos ao modelo.

O caso do presente município é semelhante aos dois casos anteriores. Nos três casos, a produção sofre mudanças bruscas de comportamento que comprometem os ajustes. Ao que tudo indica, fatores inerentes aos modelos não dão conta de explicar tal fato.

Para encontrar uma razão para as anomalias na variação das produções em tela, estudos adicionais precisariam ser feitos. Talvez fosse necessário implementar pesquisas “in loco”. Ao que tudo indica, dessa forma poderia ser feito um levantamento das razões das discrepâncias apresentadas por esses municípios, em suas produções.

7.3. As Mesorregiões do Rio de Janeiro e Resumo de Dados Sócio Econômicos Sobre os Municípios Estudados neste Trabalho

O estado do Rio de Janeiro é dividido em seis mesorregiões geográficas (Figura 35) e 18 microrregiões. De cada uma dessas microrregiões foi escolhido um município, cada um dos quais foi estudado aqui.

Serão apresentados na sequência alguns dados sócio-econômicos a respeito desses municípios (Tabela 30). Os dados foram obtidos, principalmente, da Federação das Associações Comerciais e Empresariais do Estado Rio de Janeiro (FACERJ, 2015).



FONTE: Atlas Brasileiro de Desastres Naturais

Figura 35. Mesorregiões do Rio de Janeiro.

Tabela 30. Dados sócio-econômicos dos municípios estudados (Estado: RJ).

(1) Angra dos Reis	
Localização:	Mesorregião Sul Fluminense
População:	169.511 hab.
Área:	825,1 km ²
PIB:	10.973.424 mil reais
Principais atividades econômicas:	Indústria naval e de pescado; terminal petrolífero; turismo e agricultura (banana).
(2) Barra do Pirai	
Localização:	Mesorregião Sul Fluminense
População:	94.778 hab.
Área:	579 km ²
PIB:	1.493.524 mil reais
Principais atividades econômicas:	Indústria, Comércio e Agropecuária.
(3) Pirai	
Localização:	Mesorregião Sul Fluminense
População:	26.314 hab.
Área:	505,4 km ²
PIB:	1.161.158 mil reais
Principais atividades econômicas:	Indústrias: papel, nozes macadame e energia elétrica; comércio e pecuária leiteira.
(4) Rio Bonito	
Localização:	Mesorregião Metropolitana do Rio de Janeiro
População:	55.551 hab.
Área:	456,5 km ²
PIB:	962.501 mil reais
Principais atividades econômicas:	Comércio e indústria.
(5) Carmo	
Localização:	Mesorregião Centro Fluminense
População:	17.434 hab.
Área:	322,4 km ²
PIB:	291.399 mil reais
Principais atividades econômicas:	Agropecuária (tomate, feijão, manga e bovinos), indústria e comércio.
(6) Casimiro de Abreu	
Localização:	Mesorregião das Baixadas
População:	35.347 hab.
Área:	460,8 km ²
PIB:	3.549.999 mil reais
Principais atividades econômicas:	Agricultura, comércio, indústria e pecuária de corte e de leite.

Continua...

Continuação da Tabela 30.**(7) Campos dos Goytavazes**

Localização:	Mesorregião Norte Fluminense
População:	463.731 hab.
Área:	4.026,7 km ²
PIB:	45.129.215 mil reais
Principais atividades econômicas:	Indústria (açúcar e álcool), comércio, pecuária de leite e corte e agricultura (cana de açúcar)

(8) Itaguaí

Localização:	Mesorregião Metropolitana do Rio de Janeiro
População:	109.091 hab.
Área:	272,9 km ²
PIB:	3.698.896 mil reais
Principais atividades econômicas:	Comércio e agricultura

(9) Itaocara

Localização:	Mesorregião do Noroeste Fluminense
População:	22.899 hab.
Área:	431,3 km ²
PIB:	310.138 mil reais
Principais atividades econômicas:	Pecuária leiteira, agricultura (cana de açúcar), indústria de cana de açúcar e comércio

(10) Macaé

Localização:	Mesorregião do Norte Fluminense
População:	206.728 hab.
Área:	1.216,8 km ²
PIB:	14.459.881 mil reais
Principais atividades econômicas:	Serviços, comércio, indústria (extrativa de petróleo, agricultura e agroindústria de açúcar).

(11) Miguel Pereira

Localização:	Mesorregião Metropolitana do Rio de Janeiro
População:	24.642 hab.
Área:	289,2 km ²
PIB:	345.443 mil reais
Principais atividades econômicas:	Comércio, agricultura (tomate e batata doce) pecuária de leite

(12) Nova Friburgo

Localização:	Mesorregião Centro Fluminense
População:	182.082 hab.
Área:	933,4 km ²
PIB:	3.164.288 mil reais
Principais atividades econômicas:	Indústria (têxtil e metalúrgica), comércio, serviços, turismo

Continua...

Continuação da **Tabela 30.**

(13) Paraíba do Sul

Localização:	Mesorregião Centro Fluminense
População:	41.084 hab.
Área:	580,5 km ²
PIB:	1.408.617 mil reais
Principais atividades econômicas:	Comércio, indústria (cerâmica e móveis de aço), pecuária de leite, aricultura (milho, arroz, tomate, pimentão, abóbora e cana de açúcar)

(14) Santa Maria Madalena

Localização:	Mesorregião Centro Fluminense
População:	10.321 hab.
Área:	580,5 km ²
PIB:	131.003 mil reais
Principais atividades econômicas:	Agropecuária, comércio e serviços

(15) São José do Vale do Rio Preto

Localização:	Mesorregião Metropolitana do Rio de Janeiro
População:	20.251 hab.
Área:	220,4 km ²
PIB:	250.630 mil reais
Principais atividades econômicas:	Avicultura e olericultura

(16) São Pedro da Aldeia

Localização:	Mesorregião das Baixadas
População:	87.875 hab.
Área:	332,8 km ²
PIB:	1.139.841 mil reais
Principais atividades econômicas:	Comércio, agricultura, indústria, turismo e pesca

(17) Varre-Sai

Localização:	Mesorregião do Noroeste Fluminense
População:	9.475 hab.
Área:	190,1 km ²
PIB:	134.378 mil reais
Principais atividades econômicas:	Agricultura (café e milho), pecuária de leite, indústria de vinhos, licores artesanais e torrefação de café

(18) Rio de Janeiro

Localização:	Mesorregião Metropolitana do Rio de Janeiro
População:	6.320.446 hab.
Área:	1.201,3 km ²
PIB:	220.924.561 mil reais
Principais atividades econômicas:	Indústria, comércio, turismo, serviços, construção civil

Fonte: FACERJ, 2015

7.4.Código do Modelo Utilizado em Linguagem Fortran 95

PROGRAMA: XBOBYQA

Objetivo: Algoritmo para ajustar os parâmetros do Modelo B de forma a que se possa avaliar e prever a produção de mel de municípios do Rio de Janeiro, durante certo período de tempo.

As restrições sobre os parâmetros são:

$$0 < \alpha_1 \leq 1, 0 < A \leq 10, !0 < B \leq 1, !0 < u \leq 1, 0 < Nop \leq 1.$$

O solver do problema foi o software BOBYQA (POWELL, 2009)¹⁹.

PROGRAM XBOBYQA

```
USE matrixk  
implicit none
```

Definição da matriz de dados e dos demais matrizes a serem utilizadas pelas subrotinas do programa:

DMTXC ->

Matriz cujas entradas são os valores da produção de um certo município, por um período de imax anos

W, X, XL, XU -> definidos no BOBYQA

PARAM -> vetor de parâmetros

yfp1, yfp2 ->

Matrizes cujas entradas são os valores obtidos pelo método de Runge-Kutta para a função definida pela subrotina CALFUN. A primeira matriz yfp1 possui valores gerados de produção.

Já a matriz yfp2 possui valores gerados de capital humano.

```
REAL(DBL), DIMENSION(1:imax) :: DMTXC
```

```
REAL(DBL), DIMENSION(9000) :: W
```

```
REAL(DBL), DIMENSION(Nre) :: X, XL, XU, PARAM
```

```
REAL(DBL), ALLOCATABLE, DIMENSION (:,:) :: yfp1, yfp2
```

Definição das variáveis a serem utilizadas:

¹⁹ O código do BOBYQA, na linguagem Fortran 77, pode ser encontrado em <http://mat.uc.pt/~zhang/software.html>, acesso em 21/09/2015.

h -> tamanho do passo a ser aplicado no Método de Runge-Kutta
RHOBEG, RHOEND, F -> definidas no BOBYQA

y1, y2 -> valores iniciais para os subintervalos definidos no Método de Runge-Kutta.
O primeiro valor corresponde à produção e o segundo valor, ao capital humano.

```
REAL(DBL):: RHOBEG, RHOEND, h, y1, y2, xin, F  
INTEGER::i,j, status
```

```
ALLOCATE(yfp1(1:10*zstep+1,zlin1),yfp2(1:10*zstep+1,zlin1))  
DMTXC=0.  
status=0  
h=1.0D-01
```

Neste bloco é feita a leitura do arquivo com os dados de produção e é definida a matriz com esses dados.

```
allocatem: IF (status /=0) THEN  
WRITE(*,*) Nao foipossivelexecutar o programa  
ELSE  
OPEN(UNIT=9, FILE='VarreL.txt', STATUS='OLD', ACTION='READ',  
IOSTAT=status)  
open1: IF (status /=0) THEN  
WRITE(*,*) 'Nao foi possivel abrir o arquivo de dados VarreL.txt'  
ELSE  
DO i=1,imax  
READ(9,*, IOSTAT=status) DMTXC(i)  
END DO  
END IF open1  
END IF allocatem
```

Aqui é definida a matriz de parâmetros, assim como os limites inferiores dos mesmos:

```
PARAM= (/alpha1,A, B, u, Nop/)  
X=PARAM  
RHOBEG= 1.0D-04  
RHOEND=1.0D-06*RHOBEG  
XL(1)=0.0D0+eps  
XL(2)=2.0D0
```

```

xL(3)=(0.0D0+eps)
XL(4)=0.0D0+eps
XL(5)=(0.0D0+eps)

```

Nas linhas seguintes estão definidos os limites superiores dos parâmetros:

```

XU(1)=1.0D0
XU(2)= 1.0D01!
XU(3)= 1.0D0
XU(4)=1.0D0
XU(5)=1.0D01

```

Aqui é chamado o solver BOBYQA que fornecerá um valor mínimo local aproximado para a função F, definida pela subrotina CALFUN. Serão fornecidos também valores dos parâmetros que minimizam F.

```

CALL BOBYQA
(DMTXC,N,NPT,X,XL,XU,RHOBEG,RHOEND,IPRINT,MAXFUN,W,F)

```

No bloco seguinte, já com os valores dos parâmetros que minimizam a função objetivo definidos, é aplicado o método de Runge-Kutta para o cálculo dos valores de produção e capital humano, durante o período de tempo [1,imax].

```

j=1
xin=REAL(1)
y1=DMTXC(1)
y2=DMTXC(12)
CALL Runge(DMTXC,X,j, xin, y1, y2, h, yfp1, yfp2)
predx: DO j=2,zlin1
xin = REAL(j)
y1 = yfp1(zlin,j-1)
y2= yfp2(zlin,j-1)
CALL Runge(DMTXC,X,j, xin, y1, y2, h, yfp1, yfp2)
END DO predx

```

No bloco a seguir é criado o arquivo com valores de produção e capital humano no intervalo [1, imax]. É criado também um segundo arquivo com os valores de produção no conjunto discreto 1, 2, imax, sendo impressos em conjunto com os erros relativos entre os valores de produção gerados e aqueles fornecidos inicialmente pela matriz DMTXC.


```

OPEN(UNIT=11,      FILE='resultadoVarreL1N.txt',      STATUS='REPLACE',
ACTION='WRITE', IOSTAT=status)
open2: IF (status /=0) THEN
WRITE(*,*)'Nao foipossivelcriar o arquivo resultado.txt'
else
WRITE(11, 113) X(1), X(2), X(3), X(4), X(5), F
113 FORMAT ('alpha=',G13.7,1X,'A=',G13.7,1X,'B=',G13.7, 'u=',G13.7, 'Nop=',
G13.7, 'F='G13.7)
wrtx:DO j=1,zlin1-1
wrt: DO i=1,zlin
WRITE(11,115) j+(1.0D-01)*(i-1), yfp1(i,j), yfp2(i,j)
115 FORMAT(G13.7,1X,G13.7,1X, G13.7)
END dowrt
END DO wrtx
END IF open2
OPEN(UNIT=13,      FILE='resultadoVarreL21N.txt',      STATUS='REPLACE',
ACTION='WRITE', IOSTAT=status)
open3: IF (status /=0) THEN
WRITE(*,*)'Nao foipossivelcriar o arquivo resultado.txt'
ELSE
WRITE(13,111)
111 FORMAT(5X,'Producao',6X,'Valor Gerado',3X,'Erro Relativo')
wrtx1: DO j=1,zlin1
IF(j==1) THEN
WRITE(13,119) j, DMTXC(j), yfp1(1,1),0
119 FORMAT(I3, 1X,G13.7,2X,G20.14,7X I3)
ELSE
WRITE(13,121)  j,  DMTXC(j),yfp1(zlin1,j-1),  ((DMTXC(j)-yfp1(zlin1,j-
1))*(DMTXC(j)-yfp1(zlin1,j-1)))/(DMTXC(j)*DMTXC(j))
121 FORMAT(I3, 1X,G13.7,2X,G20.14,2X, G13.7)
END IF
END DO wrtx1

```

```

END IF open3
CLOSE(UNIT=13)
CLOSE(UNIT=11)
CLOSE(UNIT=9)
DEALLOCATE(yfp1, yfp2)

END PROGRAM XBOBYQA

```

```

SUBROUTINE CALFUN (DMTXC,Nin,X,F)

```

Função que calcula a soma dos resíduos quadráticos para um vetor X de parâmetros.

```

USE matrix

IMPLICIT NONE
INTEGER, INTENT(IN) :: Nin
REAL(DBL), INTENT(IN), DIMENSION (Nin) :: X
REAL(DBL), INTENT(IN), DIMENSION (1:imax) :: DMTXC
REAL(DBL), INTENT(OUT):: F
REAL(DBL), ALLOCATABLE, DIMENSION (:,:) :: yfp1, yfp2
REAL(DBL) :: rsum2, rsum1
REAL(DBL):: xin, y1, y2, h=1.0D-1
INTEGER:: j
ALLOCATE(yfp1(1:10*zstep+1,zlin1),yfp2(1:10*zstep+1,zlin1))
rsum1=0.
rsum2=0.

```

No bloco a seguir são calculados os valores de profusão e capitalhumano para todos os valores entre [1, imax].

```

j=1
y1=DMTXC(1)
y2=DMTXC(12)
CALL Runge(DMTXC,X,j, xin, y1, y2, h, yfp1, yfp2)
pred: DO j=2,zlin1
xin = REAL(j)
y1 = yfp1(zlin,j-1)

```

```

y2= yfp2(zlin,j-1)
CALL Runge(DMTXC,X,j, xin, y1, y2, h, yfp1, yfp2)
END DO pred

```

Cálculo da soma dos resíduos quadráticos

```

sumres2 : DO j=1,zlin1-1
rsum1=rsum1+(yfp1(10*zstep+1,j)-DMTXC(1+zstep*j))*(yfp1(10*zstep+1,j)-
DMTXC(1+zstep*j))
rsum2=rsum2+(yfp2(10*zstep+1,j)-
DMTXC(zlin1+1+zstep*j))*(yfp2(10*zstep+1,j)-DMTXC(zlin1+1+zstep*j))
END DO sumres2
F=rsum1+rsum2

```

END SUBROUTINE CALFUN

MODULE matrixk

Este módulo serve de interface para as diversas subrotinas utilizadas no programa:

Funções f1, f2 -> Calculam os valores dos segundos membros das equações que definem o Modelo de Lucas.

Função fint -> Retorna um vetor cujas componentes são os valores de f1 e f2.

Runge: Utilizada na solução dos problemas de valor inicial que definem o Modelo B, através do Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem com tamanho do passo fixo.

BOBYQA: solver utilizado

IMPLICIT NONE

save

Definição das diversas variáveis empregadas pelo programa:

Nre -> número de parâmetros econômicos.

zlin1 -> Variável que define o número de intervalos onde será aplicado o Método de Runge-Kutta. Esse valor fica estabelecido pelo número de !anos de produção considerado.

imax -> Número de dados empíricos de produção e capital humano.

N, NPT,NPAR,MAXFUN,IPRINT -> definidos no BOBYQA.

Estão também definidos os valores iniciais dos parâmetros alpha1, A, B, u e Nop.

INTEGER, PARAMETER :: DBL=selected_real_kind(p=15, r=20) definição do tipo das variáveis reais utilizadas.

```

INTEGER, PARAMETER::Nre=5, &
zlin1=11, &
imax=2*zlin1, &
zstep=1, &
N=Nre, &
NPT=11, &
NPAR=N, &
MAXFUN=90000, &
IPRINT=2
REAL(DBL), PARAMETER :: alpha1=5.0D-01, &
A= 6.0D0, &
B= 5.0D-01, &
u= 5.0D-01, &
Nop= 5.0D0
contains
REAL(DBL) FUNCTION f1(DMTXC,jnb,zparam,y1,y2)

```

B. Função que define o segundo membro da equação diferencial da produção, no Modelo B.

Neste bloco são definidas as novas variáveis:

jnb -> extremo inferior de um intervalo anual. Pode receber qualquer valor natural entre 1 e 11.

msigma -> expoente de -1, que vai definir o sinal do segundo membro da equação de produção do Modelo B.

```

REAL(DBL),INTENT(IN) :: y1,y2
INTEGER, INTENT(IN) :: jnb
REAL(DBL), INTENT(IN),DIMENSION (Nre) :: zparam
REAL(DBL), INTENT(IN), DIMENSION(1:imax) :: DMTXC
INTEGER :: msigma

```

Neste bloco é estabelecido o sinal do segundo membro da equação diferencial que define a produção no Modelo B.

```

ext: IF (DMTXC(jnb+1) .LT. DMTXC(jnb)) THEN
msigma=1
ELSE

```

```

msigma=2
END IF ext

```

Este é o segundo membro da equação diferencial que define a produção no Modelo B.

```

f1=(((
1)**msigma)/zparam(5))*(zparam(1)*zparam(2)**(1/zparam(1)))*((zparam(4)*y2)**((1-
zparam(1))/ &
zparam(1)))*(y1**((3*zparam(1)-1)/zparam(1)))

```

```

END FUNCTION

```

```

REAL(DBL) FUNCTION f2(zparam2,y2)

```

Função que define o segundo membro da equação diferencial do capital humano, no Modelo B.

```

REAL(DBL),INTENT(IN) :: y2
REAL(DBL), INTENT(IN),DIMENSION (Nre) :: zparam2

```

Este é o segundo membro da equação diferencial que define o capital humano no Modelo B.

```

f2=(zparam2(3)*(1-zparam2(4)))*y2

```

```

END FUNCTION

```

```

FUNCTION fint(DMTXC,jnb,zparam3,y1,y2)

```

Função cujas componentes são f1 e f2, definidas acima.

```

REAL(DBL),INTENT(IN) :: y1,y2
INTEGER, INTENT(IN) :: jnb
REAL(DBL), INTENT(IN),DIMENSION (Nre) :: zparam3
REAL(DBL), INTENT(IN), DIMENSION(1:imax) :: DMTXC
REAL(DBL), DIMENSION(2):: fint
fint(1)=f1(DMTXC,jnb,zparam3, y1, y2)
fint(2)=f2(zparam3, y2)

```

```

END FUNCTION

```

```
SUBROUTINE Runge(DMTXC,zparam1,j, x, y1, y2, h, yfp1, yfp2)
```

```
implicitnone
```

Subrotina que estabelece o Método de Runge-Kutta de ordem 4, com passo fixo.
Novas variáveis definidas nessa subrotina:

dydx1, dydx2 -> definem as diferenças entre os valores, em nós consecutivos, da solução da equação diferencial integrada pelo Método de Runge-Kutta.

xsub, ysub1, ysub2, ypro1, ypro2, xpro -> variáveis locais definidas para manter a coerência da linguagem de programação.

```
REAL(DBL), INTENT(IN), DIMENSION(Nre) :: zparam1
REAL(DBL), INTENT(IN), DIMENSION(1:imax) :: DMTXC
REAL(DBL), INTENT(IN) :: h
REAL(DBL), INTENT(IN):: x, y1, y2
INTEGER, INTENT(IN):: j
REAL(DBL), INTENT(OUT), DIMENSION(1:10*zstep+1,zlin1) :: yfp1, yfp2
REAL(DBL), SAVE :: xsub, ysub1, ysub2, dydx1, dydx2
REAL(DBL),ALLOCATABLE, DIMENSION (:,:) :: ypro1, ypro2 , xpro
INTEGER::i
ALLOCATE(xpro(1:10*zstep+1,zlin1),
ypro1(1:10*zstep+1,zlin1),ypro2(1:10*zstep+1,zlin1)) !, dydx1(1:10*zstep-1))
xpro=0.
ypro1=0.
ypro2=0.
!dydx1=0.
xpro(1,j)=x
ypro1(1,j)=y1
ypro2(1,j)=y2
xsub=xpro(1,j)
ysub1=ypro1(1,j)
ysub2=ypro2(1,j)
```

Neste bloco são gerados os valores de produção e capital humano no intervalo [1, imax]

```

DO i=2,10*zstep+1
CALL INTERM(DMTXC,j,zparam1,xsub, ysub1, ysub2, h, dydx1, dydx2)
xpro(i,j)=xpro(i-1,j)+h
ypro1(i,j)=ypro1(i-1,j)+dydx1 *(i-1)
ypro2(i,j)=ypro2(i-1,j)+dydx2
xsub=xpro(i,j)
ysub1=ypro1(i,j)!/sumd
ysub2=ypro2(i,j)
END DO

```

Aqui são estabelecidos os valores de saída da subrotina

```

DO i=1,10*zstep+1
yfp1(i,j)=ypro1(i,j)
yfp2(i,j)=ypro2(i,j)
END DO
END SUBROUTINE Runge

```

END MODULE matrixk

```

SUBROUTINE INTERM(DMTXC,jnb,PARAMV,y1, y2, h, dydx1, dydx2)

```

Subrotina que calcula as constantes a serem utilizadas no Método de Runge-Kutta.

USE matrix

```

IMPLICIT NONE
REAL(DBL), INTENT(IN), DIMENSION(1:imax) :: DMTXC
REAL(DBL), INTENT(IN):: y1,y2, h
INTEGER, INTENT(IN) :: jnb
REAL(DBL), INTENT(OUT) :: dydx1, dydx2
REAL(DBL),ALLOCATABLE, DIMENSION(:)::afun
REAL(DBL),ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:):: k
REAL(DBL):: y11, y12, y21, y22
INTEGER :: j
allocate(afun(2),k(4,2))
k=0.
afun=0.
afun=fint(DMTXC, jnb,PARAMV,y1,y2)
DO j=1,2
k(1,j) = h*afun(j)
END DO
!x1=x+(5.0D-1)*h
y11=y1+k(1,1)*(5.0D-1)
y12=y2+k(1,2)*(5.0D-1)
y21=y1+k(2,1)*(5.0D-1)
y22=y2+k(2,2)*(5.0D-1)

```



```

afun=fint(DMTXC,jnb,PARAMV, y11,y12)
DO j=1,2
k(2,j) = h*afun(j)
END DO
afun=fint(DMTXC,jnb,PARAMV,y21,y22)
DO j=1,2
k(3,j) = h*afun(j)
END DO
afun=fint(DMTXC,jnb,PARAMV, y1+k(3,1),y2+k(3,2))
DO j=1,2
k(4,j) = h*afun(j)
END DO
dydx1=(1./6.)*(k(1,1)+2.*k(2,1)+2.*k(3,1)+k(4,1))
dydx2=(1./6.)*(k(1,2)+2.*k(2,2)+2.*k(3,2)+k(4,2))

END SUBROUTINE INTERM

```