

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

UM ESTUDO SOBRE O ÁXION E SUAS POSSÍVEIS IMPLICAÇÕES NA
ELETRODINÂMICA.

RICARDO CIDRINI ENSÁ

Prof. Dr. Ricardo José Scherer Santos

Seropédica

2023

RICARDO CIDRINI ENSÁ

UM ESTUDO SOBRE O ÁXION E SUAS POSSÍVEIS IMPLICAÇÕES NA
ELETRODINÂMICA.

Monografia apresentada ao Curso de
Graduação em Física da UFRRJ, como
requisito parcial para obtenção do título
de Licenciado em Física.

Seropédica

2023

RICARDO CIDRINI ENSÁ

UM ESTUDO SOBRE O ÁXION E SUAS POSSÍVEIS IMPLICAÇÕES NA
ELETRODINÂMICA.

Monografia apresentada ao Curso de
Graduação em Física da UFRRJ, como
requisito parcial para obtenção do título
de Licenciado em Física.

Trabalho _____. Seropédica, 21 de dezembro de 2023:

Prof. Dr. Ricardo José Scherer Santos
Orientador

Prof. Dr. Claudio Maia Porto

Prof. Dr. Marcos Cardoso Rodriguez

Seropédica
2023

AGRADECIMENTOS

A Deus, pois tenho fé de que estou aqui por Sua vontade.

À minha mãe, pelo seu apoio incondicional.

A todos os familiares e amigos que fizeram parte dessa jornada e tornaram a caminhada mais leve.

Ao meu orientador, Prof. Ricardo, por ser sempre solícito e paciente.

A todos os professores e técnicos que contribuíram para a minha formação.

RESUMO

Este trabalho explora a hipótese do áxion, partindo das simetrias discretas da teoria de Dirac até a caracterização do problema CP forte. Aborda como a existência dessa partícula pode modificar as equações de Maxwell, com possíveis implicações no estudo de materiais exóticos e na cosmologia. É destacado, ademais, o papel da eletrodinâmica axiônica na validação da hipótese da matéria escura fria puramente axiônica.

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| Introdução | 8 |
| 1 INTRODUÇÃO À CROMODINÂMICA QUÂNTICA COMO UMA TEORIA DE GAUGE. | 12 |
| 2 SIMETRIAS DISCRETAS E O PROBLEMA DE CP FORTE | 25 |
| 2.1 Simetrias Discretas da Teoria de Dirac | 25 |
| 2.2 Decaimento do méson K neutro e a violação de CP | 27 |
| 2.3 Momento de Dipolo Elétrico do Nêutron | 32 |
| 2.4 O Problema de CP da Interação Forte | 35 |
| 2.5 Solução axiônica para o problema de CP forte | 38 |
| 3 O ÁXION DA QCD NA ELETRODINÂMICA | 43 |
| 3.1 Eletrodinâmica Axiônica | 43 |
| 3.2 Matéria Escura Axiônica | 50 |
| Conclusão | 57 |
| REFERÊNCIAS | 58 |
| APÊNDICE A – CAMPOS CLÁSSICOS RELATIVÍSTICOS | 61 |
| A.1 Transição para o contínuo | 61 |
| A.2 Equação de Euler-Lagrange para Campos | 64 |
| A.3 Campo Escalar (spin-0) | 66 |
| A.4 Campo Vetorial (spin-1) | 67 |

| | | |
|-----|---|-----------|
| A.5 | Campo Spinor (spin-1/2) | 69 |
| | APÊNDICE B – TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE | 72 |
| | APÊNDICE C – GRUPO SU(3) E BASE DE GELL-MANN . . | 76 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|----|
| Tabela 1 – Tabela com as características dos diferentes quarks. | 20 |
|---|----|

| | |
|--|----|
| Tabela 2 – O elemento $(-1)^\mu$ é definido como 1 para $\mu = 0$ e (-1) para os demais índices (PESKIN; SCHROEDER, 2018). | 26 |
|--|----|

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Ilustração com uma representação clássica do nêutron (HOOK, 2023). | 33 |
|---|----|

| | |
|---|----|
| Figura 2 – Ilustração com um IT cilíndrico imerso em um campo magnético uniforme. | 46 |
|---|----|

| | |
|--|----|
| Figura 3 – Ilustração com um IT cilíndrico imerso em um campo elétrico uniforme. | 47 |
|--|----|

| | |
|---|----|
| Figura 4 – sistema massa-mola infinito (GOLDSTEIN et al., 2002) | 61 |
|---|----|

INTRODUÇÃO

Em 1964, o experimento de J. W. Cronin e V. L. Fitch com káons neutros nos mostrou que a simetria CP (Carga e Paridade) é violada no setor fraco do Modelo Padrão. Tal descoberta forneceu uma nova perspectiva no estudo das partículas fundamentais, resultando na predição de uma terceira geração de férmions, por N. Cabibbo, M. Kobayashi e T. Maskawa, posteriormente confirmada. Em sequência, t'Hooft mostrou que a interação forte do Modelo Padrão (MP) possui um vácuo não trivial que, em princípio, também permitiria a violação de CP forte. Entretanto, até hoje a violação de tal simetria não é observada na QCD. Por que o setor forte parece conservar a simetria CP ? Este problema ficou conhecido como o *problema CP forte*.

Dentre as diversas hipótese de solução para o problema, em 1977, R. D. Peccei e H. R. Quinn apresentaram uma solução dinâmica para o problema CP por meio da introdução de um bóson pseudo-escalar no MP: o áxion. Hoje, o áxion e partículas tipo-áxion estão presentes nas mais variadas extensões do MP, com implicações diretas na eletrodinâmica, onde o aparato da eletrodinâmica axiônica é utilizado na pesquisa de materiais e fenômenos exóticos, com aplicações da matéria condensada à cosmologia. Nesta última área, em especial, o áxion é considerado um dos potenciais candidatos à matéria escura.

Neste trabalho, faremos uma breve introdução à hipótese axiônica em três partes. Na primeira parte, vamos estudar a QCD como uma Teoria de Gauge, construindo a interação a partir da invariância da teoria sob uma transformação local do grupo $SU(3)$, estudando seus constituintes e características da intera-

ção.

Na segunda parte, vamos abordar o que são as transformações de simetria C , P e T (reversão temporal) e como essas transformações afetam as grandezas físicas relacionadas ao problema CP forte. Na sequência, veremos como se dá a violação de CP no decaimento dos káons neutros, discutindo uma possível fonte de violação de CP , não observada, na interação forte. Após uma modelagem clássica no momento de dipolo elétrico do nêutron, também vamos estudar quais são os parâmetros da violação CP na QCD e onde ocorre o ajuste fino no problema CP forte. Ao fim deste capítulo vamos apresentar a solução axiônica, caracterizar o áxion e fazer uma breve abordagem dos modelos axiônicos atuais.

E, ao fim deste trabalho, vamos estudar o acoplamento áxion-fóton, investigando como esse acoplamento modifica as equações de Maxwell e como elas podem ser utilizadas na descrição dos efeitos magnetoelétricos observados nos isolantes topológicos. Também faremos uma aplicação dessa eletrodinâmica axiônica em uma cavidade ressonante, com o intuito de descrever o comportamento dos campos eletromagnéticos acoplados ao áxion, sob a hipótese da matéria escura axiônica.

NOTAÇÃO

Abaixo as convenções utilizadas ao longo deste trabalho. A menos que se faça necessário, usaremos apenas unidades naturais,

$$c = 1 \text{ e } \hbar = 1. \quad (0.0.1)$$

Assinatura métrica:

$$\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \text{ e } \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (0.0.2)$$

As matrizes γ^μ na representação de Dirac são dadas por:

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^j), \text{ onde } \gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \quad (0.0.3)$$

e σ^j são as matrizes de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (0.0.4)$$

Na representação de Weyl, também conhecida como quiral, as matrizes γ^μ serão dadas por:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \text{ onde } \sigma^\mu = (\mathbf{1}, \sigma^j) \text{ e } \bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}, -\sigma^j), \quad (0.0.5)$$

obedecendo à seguinte relação de anticomutação,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (0.0.6)$$

Comum às duas representações, a matriz auxiliar γ^5 é definida como,

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (0.0.7)$$

anti-comutando com as matrizes γ^μ ,

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (0.0.8)$$

Caso o leitor não esteja familiarizado com o formalismo da teoria clássica de campos, recomenda-se a leitura dos apêndices previamente à leitura do desenvolvimento deste trabalho.

1 INTRODUÇÃO À CROMODINÂMICA QUÂNTICA COMO UMA TEORIA DE GAUGE.

No início da década de 1960, graças aos progressos feitos nos aceleradores de partículas, os físicos se encontravam imersos em um "zoológico subnuclear". Dentre os vários modelos da época, os esforços para organizar as partículas que hoje conhecemos como hadrons, culminou na elaboração do modelo de quarks, pelos trabalhos de Gell-Mann, Ne'eman e Zweig (MENDES; CUCCHIERI; MORAES, 2022). Os quarks seriam os fermions elementares responsáveis por constituir os hadrons. Sob esse modelo, o próton, um hadron de spin 1/2, seria composto por dois quarks do tipo u e um do tipo d . Por serem fermions, os quarks estão sujeitos ao princípio de exclusão de Pauli. Logo, os quarks tipo u deveriam ter spin anti-paralelo no estado que forma o próton, mas isso logo vira um problema quando olhamos para o hadron Δ^{++} , uma partícula de spin 3/2. O modelo de quarks nos diz que essa partícula é composta por três quarks tipo u , resultando em três fermions no mesmo estado quântico. Assumiu-se então que os hadrons estavam sujeitos a um novo número quântico que permitisse tal configuração. Este foi o primeiro indicativo do que viria se tornar a hipótese das cargas de cor na cromodinâmica quântica.

Sabendo que os quarks são partículas de spin-1/2 e levando em consideração a hipótese das cargas de cor, partimos de um lagrangiano livre que descreva esse campo fermiônico

$$\mathcal{L}_{YM} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (1.0.1)$$

com

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{pmatrix} = \psi_r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.0.2)$$

ou

$$\psi = \psi_r r + \psi_g g + \psi_b b \quad (1.0.3)$$

onde os $\psi_{r,g,b}$ são spinores de Dirac associados aos vetores r, g e b , respectivamente. Note que aqui estamos tratando apenas de um sabor de quark. Similar ao caso descrito no apêndice B (B.0.9), vamos impor a invariância desse lagrangiano sob uma transformação local de gauge. no espaço tridimensional de cores, a fim de encontrar um lagrangiano que descreva a interação entre essas cargas.

Então, seja U uma matriz unitária 3×3 que atua em ψ ,

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi; \bar{\psi}' = \bar{\psi}U^\dagger \quad (1.0.4)$$

e

$$\bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}U^\dagger U\psi = \bar{\psi}\psi. \quad (1.0.5)$$

Sabe-se que a matriz U pode ser reescrita como a exponencial de uma matriz hermitiana de traço zero (apênd. C),

$$U = e^{iX} = e^{i\alpha_a(x^\mu)t_a}, a = 1, \dots, 8 \quad (1.0.6)$$

$\alpha_a(x^\mu)$ são parâmetros livres reais contínuos e t_a são as matrizes geradoras do grupo $SU(3)$ que compõem a base de Gell-Mann. Aplicando U ao lagrangiano,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} \rightarrow \mathcal{L}'_{YM} &= \bar{\psi}e^{-i\alpha_a(x^\mu)t_a}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{i\alpha_a(x^\mu)t_a}\psi \\ &= \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu t_a\psi\partial_\mu\alpha_a(x^\mu) \\ &= \mathcal{L}_{YM} - \bar{\psi}\gamma^\mu t_a\psi\partial_\mu\alpha_a(x^\mu). \end{aligned} \quad (1.0.7)$$

Como esperado, o lagrangiano não é invariante sob essa transformação¹. Precisamos modificar nosso lagrangiano e o faremos a partir do operador derivada ∂_μ . Para isso, são necessários oito campos, um para cada α , que sob a transformação U satisfaçam a condição abaixo,

$$D_\mu \psi \rightarrow D'_\mu \psi' = e^{it_a \alpha_a(x^\mu)} D_\mu \psi, \quad D_\mu = \partial_\mu - ig_s t_a A_\mu^a, \quad (1.0.8)$$

onde D_μ é a derivada covariante, g_s é a constante de acoplamento da interação, A_μ^a são os campos de *glúons*, bósons sem massa e de spin-1 mediadores da interação forte, e as matrizes t_a representam as cargas de cor do respectivo glúon. Diferentemente do caso $U(1)$, apresentado no apêndice B, o grupo $SU(3)$ é não-abeliano, o que significa que nem todos os geradores t_a comutam entre si. Esta característica é facilmente observada ao realizarmos uma transformação infinitesimal. Reescrevendo a exponencial como uma série, obtemos (para clareza visual $\alpha_a(x^\mu) = \alpha_a$),

$$U = e^{it_a \alpha_a} = 1 + it_a \alpha_a + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (1.0.9)$$

onde o termo $\mathcal{O}(\alpha)$ são os elementos com potências α_a de grau superior. No limite onde $\alpha_a \ll 1$,

$$U \approx (1 + i\alpha_a t_a). \quad (1.0.10)$$

Aplicando essa transformação à equação 1.0.8,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{YM} &= i\bar{\psi} U^\dagger \gamma^\mu (\partial_\mu - ig_s t_a A_\mu^a) U \psi \\ &= i\bar{\psi} \gamma^\mu (1 - i\alpha_a t_a) (\partial_\mu - ig_s t_b A_\mu^b) (1 + i\alpha_c t_c) \psi \\ &\propto -\bar{\psi} \gamma^\mu t_c \partial_\mu \alpha_c \psi - i\bar{\psi} \gamma^\mu g_s \alpha_a t_a t_b A_\mu^b \psi + i\bar{\psi} \gamma^\mu g_s \alpha_c t_b t_c A_\mu^b \psi, \end{aligned} \quad (1.0.11)$$

¹ O apêndice B contém a demonstração da invariância global de gauge, i.e., invariância quando α independe de x^μ , para um lagrangiano que descreva um campo de férmons livre, como o \mathcal{L}_{YM} .

fazendo uma troca de nome nos índices mudos a e c no primeiro e segundo termo, temos

$$\propto -\bar{\psi}\gamma^\mu t_a \partial_\mu \alpha_a \psi + i g_s \bar{\psi} \gamma^\mu \alpha_c (t_b t_c - t_c t_b) A_\mu^b \psi. \quad (1.0.12)$$

Embora a primeira parte da equação esteja escrita apenas com o índice a , existe uma soma implícita, por isso o uso de índices diferentes nos produtos não comutativos. De fato, este produto segue a seguinte lei de comutação,

$$t_b t_c - t_c t_b = [t_b, t_c] = i f_{bca} t_a = i f_{abc} t_a, \quad (1.0.13)$$

onde f_{abc} é a constante de estrutura do grupo $SU(3)$ (C.0.11). Os campos de gauge A_μ^a também são transformados, $A_\mu^a \rightarrow A_\mu^{a'}$. Podemos obter $A_\mu^{a'}$, a partir da equação 1.0.11,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{YM} &= i \bar{\psi} U^\dagger \gamma^\mu (\partial_\mu - i g_s t_a A_\mu^{a'}) U \psi \\ &= i \bar{\psi} \gamma^\mu U^\dagger \partial_\mu U + i \bar{\psi} \gamma^\mu U^\dagger U \partial_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu U^\dagger g_s t_a A_\mu^{a'} U \psi \\ &= i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i \bar{\psi} \gamma^\mu U^\dagger \partial_\mu U \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu U^\dagger g_s t_a A_\mu^{a'} U \psi. \end{aligned} \quad (1.0.14)$$

Para garantir a invariância de gauge do campo A_μ , os dois últimos termos da equação acima devem ser iguais a $\bar{\psi} \gamma^\mu g_s t_a A_\mu^a \psi$. Logo, temos

$$\begin{aligned} 0 &= i \bar{\psi} \gamma^\mu U^\dagger \partial_\mu U + \bar{\psi} \gamma^\mu U^\dagger g_s t_a A_\mu^{a'} U \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu g_s t_a A_\mu^a \psi, \\ &= i \bar{\psi} \gamma^\mu (U^\dagger \partial_\mu U - i U^\dagger g_s t_a A_\mu^{a'} U + i g_s t_a A_\mu^a) \psi, \\ &= \left(U^\dagger \frac{i}{g_s} \partial_\mu U + U^\dagger t_a A_\mu^{a'} U - t_a A_\mu^a \right), \\ &= U \left(U^\dagger \frac{i}{g_s} \partial_\mu U + U^\dagger t_a A_\mu^{a'} U - t_a A_\mu^a \right) U^\dagger, \\ &= \frac{i}{g_s} (\partial_\mu U) U^\dagger + t_a A_\mu^{a'} - U t_a A_\mu^a U^\dagger. \end{aligned} \quad (1.0.15)$$

Pela regra do produto, temos a seguinte relação para o primeiro termo da última igualdade acima

$$\partial_\mu(UU^\dagger) = (\partial_\mu U)U^\dagger + U\partial_\mu U^\dagger = 0 \quad (1.0.16)$$

Substituindo $(\partial_\mu U)U^\dagger$ por $-U\partial_\mu U^\dagger$ na última igualdade em 1.0.15, ficamos com

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{i}{g_s}U\partial_\mu U^\dagger + t_a A_\mu^{a'} - Ut_a A_\mu^a U^\dagger, \\ t_a A_\mu^{a'} &= Ut_a A_\mu^a U^\dagger + \frac{i}{g_s}U\partial_\mu U^\dagger = U\left(t_a A_\mu^a + \frac{i}{g_s}\partial_\mu\right)U^\dagger. \end{aligned} \quad (1.0.17)$$

Utilizando a expansão 1.0.10 e a relação descrita em 1.0.13, temos

$$\begin{aligned} t_a A_\mu^{a'} &= (1 + i\alpha_a t_a)\left(t_b A_\mu^b + \frac{i}{g_s}\partial_\mu\right)(1 - i\alpha_c t_c), \\ &= t_b A_\mu^b + t_c \frac{1}{g_s}\partial_\mu \alpha_c + i\alpha_a t_a t_b A_\mu^b - it_b A_\mu^b \alpha_c t_c, \end{aligned} \quad (1.0.18)$$

no primeiro e segundo termo, respectivamente, vamos trocar o nome dos índices b e c para a . E, no terceiro termo, de a para c . Com essa mudança, temos

$$\begin{aligned} &= t_a A_\mu^a + t_a \frac{1}{g_s}\partial_\mu \alpha_a + i\alpha_c A_\mu^b (t_c t_b - t_b t_c), \\ &= t_a A_\mu^a + t_a \frac{1}{g_s}\partial_\mu \alpha_a - \alpha_c A_\mu^b f_{cba} t_a, \\ &= t_a \left(A_\mu^a + \frac{1}{g_s}\partial_\mu \alpha_a + \alpha_c A_\mu^b f_{abc} \right). \end{aligned} \quad (1.0.19)$$

Na passagem para a última linha, há uma troca de sinal em decorrência da mudança dos índices c com a no tensor antissimétrico f . Logo, temos que o campo A_μ^a fica transformado em

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^{a'} = A_\mu^a + \frac{1}{g_s}\partial_\mu \alpha_a + f_{abc} A_\mu^b \alpha_c \quad (1.0.20)$$

e, consequentemente, a derivada covariante,

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = \partial_\mu - ig_s t_a (A_\mu^a + \frac{1}{g_s}\partial_\mu \alpha_a + f_{abc} A_\mu^b \alpha_c). \quad (1.0.21)$$

Podemos então verificar a relação 1.0.8,

$$\begin{aligned}
D'_\mu \psi' &= [\partial_\mu - ig_s t_a (A_\mu^a + \frac{1}{g_s} \partial_\mu \alpha_a + f_{abc} A_\mu^b \alpha_c)] (1 + it_a \alpha_a) \psi \\
&= \partial_\mu \psi + it_a \partial_\mu \alpha_a \psi + it_a \alpha_a \partial_\mu \psi - ig_s t_a (A_\mu^a + \frac{1}{g_s} \partial_\mu \alpha_a + f_{abc} A_\mu^b \alpha_c) \psi + \\
&\quad + gt_b A_\mu^b \alpha_c t_c \psi + t_b \partial_\mu \alpha_b t_c \alpha_c \psi + O(\alpha^2) \\
&= \partial_\mu \psi + it_a \alpha_a \partial_\mu \psi - ig_s t_a (A_\mu^a + f_{abc} A_\mu^b \alpha_c) \psi + gt_b A_\mu^b \alpha_c t_c \psi + \\
&\quad + t_b \partial_\mu \alpha_b t_c \alpha_c \psi + O(\alpha^2)
\end{aligned} \tag{1.0.22}$$

Sob o limite imposto, podemos desprezar os termos de ordem α^2 frente aos demais termos não quadráticos². Já o antepenúltimo pode ser reescrito, com a ajuda de 1.0.13, como,

$$gt_b A_\mu^b \alpha_c t_c \psi = g_s \alpha_c t_c t_b A_\mu^b \psi + ig_s t_a f_{bca} A_\mu^b \alpha_c \psi. \tag{1.0.23}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned}
D'_\mu \psi' &= \partial_\mu \psi + it_a \alpha_a \partial_\mu \psi - ig_s t_a (A_\mu^a + f_{abc} A_\mu^b \alpha_c) \psi + \\
&\quad + g_s \alpha_c t_c t_b A_\mu^b \psi + ig_s t_a f_{bca} A_\mu^b \alpha_c \psi \\
&= \partial_\mu \psi + it_a \alpha_a \partial_\mu \psi - ig_s t_a A_\mu^a \psi + g_s \alpha_c t_c t_b A_\mu^b \psi
\end{aligned} \tag{1.0.24}$$

Como os índices do último termo são mudos, podemos escrever

$$g_s \alpha_c t_c t_b A_\mu^b \psi = g_s \alpha_b t_b t_a A_\mu^a \psi. \tag{1.0.25}$$

Com isso, teremos, a partir de 1.0.8,

$$\begin{aligned}
D'_\mu \psi' &= \partial_\mu \psi + it_a \alpha_a \partial_\mu \psi - ig_s t_a A_\mu^a \psi + g_s \alpha_b t_b t_a A_\mu^a \psi \\
&= (1 + it_a \alpha_a) D_\mu \psi.
\end{aligned} \tag{1.0.26}$$

² assume-se no penúltimo termo que $\partial_\mu \alpha_a$ também é infinitesimal.

Assim, o lagrangiano \mathcal{L}_{YM} pode ser escrito com a derivada covariante, mas ainda é preciso adicionar o "termo cinético"³ para estes campos de gauge. Esse termo, quadrático em derivadas dos campos, é o responsável pela dinâmica dos campos de glúons. A partir da relação B.0.17, o tensor que compõe o termo cinético pode ser obtido através da comutação dos operadores D_μ e D_ν ,

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= (\partial_\mu - ig_s t_a A_\mu^a)(\partial_\nu - ig_s t_a A_\nu^a) - (\partial_\nu - ig_s t_a A_\nu^a)(\partial_\mu - ig_s t_a A_\mu^a), \\ &= -ig_s t_a (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) - g_s^2 (t_b t_c - t_c t_b) A_\mu^b A_\nu^c, \\ &= -ig_s t_a (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c), \\ &= -ig_s t_a G_{\mu\nu}^a, \end{aligned} \tag{1.0.27}$$

onde $t_a G_{\mu\nu}^a$ é o tensor de estresse do campo. Sob a transformação $A_\mu^a \rightarrow A_\mu^{a'}$,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a \rightarrow G_{\mu\nu}^{a'} &= \partial_\mu A_\nu^{a'} - \partial_\nu A_\mu^{a'} + g_s f_{abc} A_\mu^{b'} A_\nu^{c'}, \\ &= G_{\mu\nu}^a - f_{abc} \alpha_b G_{\mu\nu}^c. \end{aligned} \tag{1.0.28}$$

Logo, o produto $t_a G_{\mu\nu}^a t_d G^{d\mu\nu}$ se transforma como

$$\begin{aligned} t_a G_{\mu\nu}^a t_d G^{d\mu\nu} &\rightarrow t_a G_{\mu\nu}^{a'} t_d G^{d\mu\nu'} = t_a (G_{\mu\nu}^a - f_{abc} \alpha_b G_{\mu\nu}^c) t_d (G^{d\mu\nu} - f_{def} \alpha_e G^{f\mu\nu}), \\ &= t_a G_{\mu\nu}^a t_d G^{d\mu\nu} - \alpha_b f_{abc} t_a G_{\mu\nu}^c t_d G^{d\mu\nu} - \alpha_e f_{def} t_a G_{\mu\nu}^a t_d G^{f\mu\nu} + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ &= t_a G_{\mu\nu}^a t_d G^{d\mu\nu} + \alpha_b f_{cba} t_c G_{\mu\nu}^a t_d G^{d\mu\nu} + \alpha_e f_{fed} t_a G_{\mu\nu}^a t_f G^{d\mu\nu} + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{aligned} \tag{1.0.29}$$

Na passagem para a última linha, fizemos uso da troca de nome entre índices mudos e, então, das propriedades de antissimetria da constante f em relação a quaisquer dois de seus índices. Ao contrário do caso abeliano, as matrizes de Gell-Mann fazem com que o produto não seja invariante de gauge. Entretanto,

³ A seção A.3 possui um comentário sobre essa terminologia.

de acordo com a equação C.0.12, o traço desse produto é invariante, pois

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left[t_a G_{\mu\nu}^{a'} t_d G^{d\mu\nu'} \right] = \\
&= \text{Tr} \left[t_a G_{\mu\nu}^a t_d G^{d\mu\nu} + \alpha_b f_{cba} t_c G_{\mu\nu}^a t_d G^{d\mu\nu} + \alpha_e f_{fed} t_a G_{\mu\nu}^a t_f G^{d\mu\nu} \right], \\
&= G_{\mu\nu}^a G^{d\mu\nu} \text{Tr}[t_a t_d] + \alpha_b f_{cba} G_{\mu\nu}^a G^{d\mu\nu} \text{Tr}[t_c t_d] + \alpha_e f_{fed} G_{\mu\nu}^a G^{d\mu\nu} \text{Tr}[t_a t_f], \\
&= \frac{1}{2} [G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \alpha_b f_{dba} G_{\mu\nu}^a G^{d\mu\nu} + \alpha_e f_{aed} G_{\mu\nu}^a G^{d\mu\nu}],
\end{aligned} \tag{1.0.30}$$

Os índices b e e representam a mesma soma de parâmetros α e podem ser substituídos por um índice em comum h . Com essa substituição, as constantes de estrutura passam a ser f_{dha} e f_{ahd} , ou seja, uma permutação ímpar fazendo com que os dois últimos termos somem zero. Com isso, podemos construir um termo cinético invariante de gauge dado por

$$-\frac{1}{2} \text{Tr} \left[t_a G_{\mu\nu}^a t_d G^{d\mu\nu} \right] = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[t_a G_{\mu\nu}^{a'} t_d G^{d\mu\nu'} \right] = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}. \tag{1.0.31}$$

Agora, podemos escrever o lagrangiano que descreve férmiões cromaticamente carregados,

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}_q (i\gamma^\mu D_\mu - m_q) \psi_q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}. \tag{1.0.32}$$

Vamos descrever os elementos desse lagrangiano. O índice q denota o sabor do quark. Ao todo, foram observados seis sabores de quarks, como descritos na tabela 1⁴.

Com exceção da primeira geração, ainda há um número de sabor associado a cada quark: na segunda geração o quark c possui *charme* = 1 e o quark s possui *estraneza* = −1. Na terceira geração a convenção de sinais se repetem, mas agora para as quantidades *superioridade* e *inferioridade*. Essas quantidades são

⁴ Valores de 2022 compilados pelo Particle Data Group (WORKMAN et al., 2022)

| Geração | Nome | Símbolo | Carga (e) | Massa (GeV) |
|---------|---------|---------|-----------------|-------------|
| 1a. | up | u | $\frac{2}{3}e$ | 0,003 |
| | down | d | $-\frac{1}{3}e$ | 0,005 |
| 2a. | charm | c | $\frac{2}{3}e$ | 1,290 |
| | strange | s | $-\frac{1}{3}e$ | 0,093 |
| 3a. | top | t | $\frac{2}{3}e$ | 172,69 |
| | bottom | b | $-\frac{1}{3}e$ | 4,180 |

Tabela 1 – Tabela com as características dos diferentes quarks.

conservadas por essa interação cromática (interação forte) e também pela interação eletromagnética. Provavelmente, a maneira mais intuitiva de entender como essa interação funciona é através dos diagramas de Feynman. Derivar tais regras para a QCD está além do escopo desse trabalho⁵, então vamos apresentá-las seguindo as ref. (GRIFFITHS, 2008; PESKIN; SCHROEDER, 2018). Para os férmons e bósons externos:

$$\text{Quarks: } \left\{ \begin{array}{l} \text{inicial: } \begin{array}{c} \text{---} \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \xrightarrow[p]{} = u^{(s)}(p)c_i, \\ \text{final: } \begin{array}{c} \text{---} \\ \nwarrow \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \xrightarrow[p]{} = \bar{u}^{(s)}(p)c_i^\dagger. \end{array} \right. \quad (1.0.33)$$

$$\text{Antiquarks: } \left\{ \begin{array}{l} \text{inicial: } \begin{array}{c} \text{---} \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \xrightarrow[p]{} = \bar{v}^{(s)}(p)c_i^\dagger, \\ \text{final: } \begin{array}{c} \text{---} \\ \nwarrow \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \xrightarrow[p]{} = v^{(s)}(p)c_i. \end{array} \right. \quad (1.0.34)$$

$$\text{Glúons: } \left\{ \begin{array}{l} \text{inicial: } \begin{array}{c} \text{---} \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \xrightarrow[p]{} = \epsilon_\mu(p)\alpha_a, \\ \text{final: } \begin{array}{c} \text{---} \\ \nwarrow \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \xrightarrow[p]{} = \epsilon_\mu^*(p)\alpha_a^\dagger. \end{array} \right. \quad (1.0.35)$$

Nesses diagramas, para os quarks (antiquarks), u^s (v^s) é o spinor de Dirac (A.5.6) p é o momento, s é o spin e $c_i, i = 1, 2, 3$, são os vetores r, g e b , respec-

⁵ Um tratamento mais detalhado dessas regras pode ser encontrado no Cap. 4 da ref. (PESKIN; SCHROEDER, 2018)

tivamente. Para os glúons ϵ_μ é o vetor de polarização e α_a são matrizes coluna 8×1 que representam o estado de cor em que o glúon se encontra. Para as interações que ocorrem entre os vértices, temos as seguintes regras:

$$\text{Propagadores internos: } \begin{cases} \text{(anti)quarks: } \bullet \xrightarrow{q} \bullet = i \frac{(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^\mu q_\mu - m^2}, \\ \text{glúons: } \bullet \xrightarrow{q} \bullet = -i \frac{\eta_{\mu\nu} \delta^{ab}}{q^\mu q_\mu}, \end{cases} \quad (1.0.36)$$

onde q_μ é o momento dessas partículas. E, por último, temos as regras para os vértices:

$$\text{Quark-glúon: } u \xrightarrow{} \bullet = -ig_s t_a \gamma^\mu. \quad (1.0.37)$$

Aqui aparece uma notável diferença entre a teoria abeliana e a não-abeliana. Na parte cinética dos campos A_μ^a , abrindo o produto $G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}$, surgem os termos

$$g_s f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) \text{ e } g_s^2 f_{abc} f_{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu}. \quad (1.0.38)$$

Esses produtos implicam que os mediadores da interação forte também interagem uns com os outros, em vértices de três e quatro glúons, respectivamente.

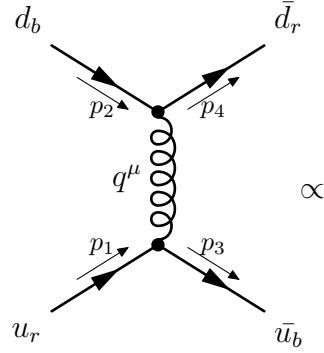
As regras para esses vértices são:

$$\text{3-glúons: } \bullet \xrightarrow{a, \mu} \bullet \xrightarrow{k} \bullet \xrightarrow{p} \bullet = g_s f_{abc} [\eta_{\mu\nu} (k-p)_\rho + \eta_{\nu\rho} (p-q)_\mu + \eta_{\rho\mu} (q-k)_\nu]. \quad (1.0.39)$$

Caso o sentido de um ou mais momentos seja alterado, o sinal dos respectivos momentos também devem ser invertidos na regra. E, por fim,

$$\begin{aligned}
 & -ig_s^2 [f_{abe}f_{cde}(\eta_{μρ}\eta_{νσ} - \eta_{μσ}\eta_{νρ}) + \\
 & + f_{ace}f_{bde}(\eta_{μν}\eta_{ρσ} - \eta_{μσ}\eta_{νρ}) + \\
 & + f_{ade}f_{bce}(\eta_{μν}\eta_{ρσ} - \eta_{μρ}\eta_{νσ})].
 \end{aligned} \tag{1.0.40}$$

Com as regras definidas, vamos considerar uma interação $qqg \rightarrow qqg$, onde um quark u_r , apenas, troca de cor com um quark d_b :



$$\propto \bar{u}^s(p_3)c_3^\dagger(-ig_st_a\gamma^\mu)u^s(p_1)c_1\left(-i\frac{\eta_{μν}\delta^{ab}}{q^\mu q_\mu}\right)\bar{u}^s(p_4)c_1^\dagger(-igt_b\gamma^\nu)u^s(p_2)c_3 \tag{1.0.41}$$

Organizando em colchetes os elementos dos diferentes grupos,

$$ig_s^2 \left[\bar{u}^s(p_3)\gamma^\mu u^s(p_1)\frac{\eta_{μν}}{q^\mu q_\mu} \bar{u}^s(p_4)\gamma^\nu u^s(p_2) \right] [c_3^\dagger t_a c_1 c_1^\dagger t_a c_3]. \tag{1.0.42}$$

Vamos abrir o segundo colchete, também chamado de fator de cor f ,

$$f = [c_3^\dagger t_a c_1 c_1^\dagger t_a c_3] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} t_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} t_a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = (t_a)_{31}(t_a)_{13} \tag{1.0.43}$$

As únicas matrizes t_a com essas componentes diferentes de zero são as matrizes t_4 e t_5 . Esse é um resultado esperado se considerarmos que essas matrizes podem ser construídas a partir dos vetores r, g, b . Por exemplo, com uma combinação dos produtos diádicos entre os vetores r e b é possível obter a matriz

t_4 :

$$t_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(b\bar{r} + r\bar{b}). \quad (1.0.44)$$

Tomando como referência o vértice do quark u_r , $b\bar{r}$ pode ser entendido como o par de cargas de cor portado pelo glúon ao ser absorvido pelo quark e $r\bar{b}$ o par para o caso em que o glúon é emitido pelo quark, que passa agora a ter carga b .

Em ambos os casos as cargas de cor são conservadas nos vértices: $b\bar{r}r \rightarrow b$ e $r \rightarrow r\bar{b}b$.

Diferentemente dos bósons abelianos, todo glúon carrega um par *cor-anticor* e seus estados de cor são os seguintes:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(g\bar{r} + r\bar{g}); & |2\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}(g\bar{r} - r\bar{g}); \\ |4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b\bar{r} + r\bar{b}); & |5\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}(b\bar{r} - r\bar{b}); \\ |6\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b\bar{g} + g\bar{b}); & |7\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}(b\bar{g} - g\bar{b}); \\ |3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}); & |8\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}). \end{aligned} \quad (1.0.45)$$

Ainda existe um nono estado de cor singlet, invariante sob transformações do grupo $SU(3)$,

$$|9\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}). \quad (1.0.46)$$

Se existisse algum glúon nesse estado, a interação forte seria similar a uma interação eletromagnética $U(3)$ (GRIFFITHS, 2008), mas isso não é observado. De fato, quarks livres definidos por uma cor específica como os da eq. 1.0.41 não são observados, todos os hadrons são neutros em cor. Nos mésons ($\bar{q}q$), o quark porta uma cor e o antiquark a respectiva anticor. Logo, o estado de cor dos mésons é do tipo do estado singlet $|9\rangle$. Nos bárions (qqq), cada quark possui

uma unidade diferente de cor, isso os torna *brancos*. Eles são descritos pelo estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(rgb + gbr + brg - rbg - grb - bgr). \quad (1.0.47)$$

Acredita-se que tal comportamento está ligado à capacidade dos glúons portarem cor e interagirem com outros glúons. Ainda que quarks e glúons livres sejam gerados, eles logo se combinam, de modo que estados de cor definida não são observados na natureza, num processo conhecido como hadronização.

2 SIMETRIAS DISCRETAS E O PROBLEMA DE CP FORTE

2.1 SIMETRIAS DISCRETAS DA TEORIA DE DIRAC

A teoria de campos de Dirac e Yang-Mills, que serviu de base para construirmos os lagrangianos da QCD e QED (Eq. B.0.15), admite no mínimo três transformações discretas que, quando combinadas, mantêm o lagrangiano das interações invariante. São essas:

- Conjugação de carga (C): Troca as partículas com suas respectivas antipartículas, i.e., inverte o sinal de todos os números quânticos aditivos de uma determinada partícula;
- Transformação de paridade (P): Inverte o sinal de todas as componentes espaciais, $\phi(\vec{r}) \rightarrow P\vec{r} = \phi(-\vec{r})$. Tal transformação não é possível de ser realizada de forma contínua, como uma rotação dos eixos;
- Inversão temporal (T): Como o nome sugere, este operador inverte o tempo de um campo, $T\phi(t) \rightarrow \phi(-t)$. Uma interação é simétrica em T quando a probabilidade de um evento ocorrer é a mesma antes e depois da inversão temporal.

Diz-se que uma grandeza ou um sistema físico é par sob essas transformações caso seu sinal não mude, caso contrário ele é ímpar. O campo elétrico E , por

exemplo, é ímpar sob C e P e par sob T ,

$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{Kg \cdot m}{C \cdot s^2} \rightarrow \begin{cases} C[E] = \frac{Kg \cdot m}{(-C) \cdot s^2} = -[E], \\ P[E] = \frac{Kg \cdot (-m)}{C \cdot s^2} = -[E], \\ T[E] = \frac{Kg \cdot m}{C \cdot (-s)^2} = [E]. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Enquanto que o campo magnético B é ímpar sob C e T e par sob P .

$$[B] = \frac{N \cdot m}{C \cdot s} = \frac{Kg \cdot m^2}{C \cdot s^3} \rightarrow \begin{cases} C[B] = \frac{Kg \cdot m^2}{(-C) \cdot s^3} = -[B], \\ P[B] = \frac{Kg \cdot (-m)^2}{C \cdot s^3} = [B], \\ T[B] = \frac{Kg \cdot m^2}{C \cdot (-s)^3} = -[B]. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Essas transformações ainda podem ser combinadas. Utilizando as relações acima, o campo elétrico E é par sob CP e o campo magnético B é par sob CT . Os bilineares dos campos de Dirac e o operador derivada também são modificados sob essas transformações de acordo com a tabela abaixo,

| Transf. | Escalar | Pseudo-Escalar | Vetor | Pseudovetor | Op. Derivada |
|---------|------------|---------------------|----------------------|------------------------------|----------------|
| | $\psi\psi$ | $i\psi\gamma^5\psi$ | $\psi\gamma^\mu\psi$ | $\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi$ | ∂_μ |
| C | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| P | 1 | -1 | $(-1)^\mu$ | $-(-1)^\mu$ | $(-1)^\mu$ |
| T | 1 | -1 | $(-1)^\mu$ | $(-1)^\mu$ | $-(-1)^\mu$ |

Tabela 2 – O elemento $(-1)^\mu$ é definido como 1 para $\mu = 0$ e (-1) para os demais índices (PESKIN; SCHROEDER, 2018).

Acreditava-se que essas transformações, isoladamente ou combinadas, eram conservadas em interações físicas, por exemplo: se o estado antes de uma interação era par em relação a alguma simetria, após a interação ele deve continuar sendo par. Entretanto, em 1956, Yang e Lee (LEE; YANG, 1956) publicam um trabalho onde questionam essa premissa, apresentando fundamentação teórica

e proposições experimentais onde, a partir de decaimentos β , seria possível observar uma violação da conservação de paridade na interação fraca. Publicado no ano seguinte, o Experimento Wu, conduzido por Chien-Shiung Wu, comprovou que a interação fraca violava a conservação de paridade nos decaimentos β de núcleos de Co-60. No mesmo ano, também foi demonstrado que o decaimento leptônico dos píons π , mésons formados por quarks de primeira geração, também não conservavam C (LEE; OEHME; YANG, 1957).

2.2 DECAIMENTO DO MÉSON K NEUTRO E A VIOLAÇÃO DE CP

Mesmo com a violação de C e P , CP ainda era tida como um boa simetria. Em 1964, o experimento conduzido por Cronin e Fitch testaria essa concepção através do decaimento do mésón K neutro. Também chamados de káons, os mésons K são partículas de spin-0, pseudo-escalares, *estranhas leves*. Os termos *estranhas* e *leves* implicam, respectivamente, que a partícula é constituída por um quark s (antiquark \bar{s}) e um dos dois antiquarks (quarks) da primeira geração. Seguindo essa definição, quatro káons são possíveis,

$$|K^+\rangle = u\bar{s}; \quad |K^-\rangle = s\bar{u}; \quad |K^0\rangle = d\bar{s}; \quad |\bar{K}^0\rangle = s\bar{d}. \quad (2.2.1)$$

O káon neutro barrado pode ser escrito como,

$$|\bar{K}^0\rangle = C |K^0\rangle, \quad (2.2.2)$$

onde C é o operador de conjugação de carga. De fato, os káons neutros "oscilam" entre partícula-antipartícula por intermédio da interação fraca em um fenômeno

conhecido como $K^0 - \bar{K}^0$ mixing¹, que também é comum à outras partículas neutras (GELL-MANN; PAIS, 1955). Como consequência, os káons observados em laboratório são na verdade estados mistos descritos por,

$$\begin{aligned}|K_1^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle], \\ |K_2^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle],\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

que, eventualmente, decaem em pares e trios de píons em intervalos médios distintos (WORKMAN et al., 2022),

$$\begin{aligned}\tau_1 &= 8,954 \times 10^{-11}\text{s}, \\ \tau_2 &= 5,116 \times 10^{-8}\text{s}.\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

Para testar a conservação da simetria CP , precisamos definir como essas partículas respondem a essas transformações. Quarks e antiquarks possuem paridade intrínseca $P_q = 1$ e $P_{\bar{q}} = -1$, respectivamente (NAGASHIMA, 2010). A paridade de um estado formado por um quark e um antiquark é definida como,

$$P = P_q P_{\bar{q}} (-1)^l = (-1)^{l+1}\tag{2.2.5}$$

onde o fator l é o momento angular orbital do sistema. Em um referencial onde $l = 0$, temos

$$P |q\bar{q}\rangle = - |q\bar{q}\rangle .\tag{2.2.6}$$

Também podemos entender o -1 que multiplica o lado direito da equação como o autovalor $\lambda_{q\bar{q}}$ do operador P associado ao autoestado $|q\bar{q}\rangle$. A transformação

¹ Embora a estranheza dos estados mistos abaixo seja zero, a oscilação entre partícula e anti-partícula altera a estranheza do méson no estado misto, logo, ela não pode ser intermediada pela interação forte. Esse também é o motivo pelo qual sabemos que essas partículas são diferentes.

CP sob os estados $|K^0\rangle$ e $|\bar{K}^0\rangle$ é definida como (NAGASHIMA, 2010),

$$\begin{aligned} CP|K^0\rangle &= e^{i\alpha_{cp}}|\bar{K}^0\rangle = \eta_{cp}|\bar{K}^0\rangle, \\ CP|\bar{K}^0\rangle &= e^{-i\alpha_{cp}}|K^0\rangle = \eta_{cp}^*|K^0\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Seguindo a convenção $\alpha_{cp} = 0$ para a fase e assumindo que a simetria se conserva, vemos que os mésons observados em laboratório são autoestados do operador CP ,

$$\begin{aligned} CP|K_1^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[CP|K^0\rangle + CP|\bar{K}^0\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\bar{K}^0\rangle + |K^0\rangle] = |K_1^0\rangle; \\ CP|K_2^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[CP|K^0\rangle - CP|\bar{K}^0\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\bar{K}^0\rangle - |K^0\rangle] = -|K_2^0\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

onde os autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Dizemos então que os autoestados $|K_1^0\rangle$ e $|K_2^0\rangle$ são, respectivamente, par e ímpar sob uma transformação CP . A paridade dos decaimentos dessas partículas é obtida através do produto da paridade dos píons. Isso significa que o decaimento é par se gera um duo de píons e ímpar se gera um trio. Já a conjugação de carga nos mostra que o píon neutro é sua própria antipartícula e os píons carregados são suas respectivas antipartículas,

$$\begin{aligned} C|\pi^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[C|u\bar{u}\rangle + C|d\bar{d}\rangle] = |\pi^0\rangle, \\ C|\pi^+\rangle &= C|u\bar{d}\rangle = |d\bar{u}\rangle = |\pi^-\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Combinando as transformações e aplicando aos estados dos decaimentos,

$$\begin{aligned} CP|\pi^0\pi^0\rangle &= |\pi^0\pi^0\rangle; \quad CP|\pi^+\pi^-\rangle = |\pi^-\pi^+\rangle, \\ CP|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle &= -|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle; \quad CP|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle = -|\pi^-\pi^+\pi^0\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

onde os autovalores são $\lambda_{2\pi} = 1$, para o par de píons, e $\lambda_{3\pi} = -1$, para o trio, sendo respectivamente par e ímpar sob a transformação. Logo, para que a

simetria CP se conserve, $\lambda_1 = \lambda_{2\pi}$ e $\lambda_2 = \lambda_{3\pi}$, fazendo com que os seguintes comportamentos sejam esperados nos decaimentos:

$$\begin{aligned} K_1^0 &\rightarrow \pi^0 + \pi^0; \quad K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-; \\ K_2^0 &\rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0; \quad K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

O experimento realizado para testar essa simetria consistia em emitir feixes de káons $K_{1,2}^0$ ao longo de um tubo de ~ 17 m, seguido de detectores otimizados para a observação do decaimento 2π na extremidade final. Por conta das diferentes vidas médias (2.2.4), era esperado que os mésons K_1^0 decaíssem por completo nos primeiros centímetros do tubo, sobrando apenas um feixe "puro" de mésons K_2^0 . Caso houvesse violação CP , um decaimento do tipo 2π seria observado e a soma dos seus momentos se alinharia com a do méson K_2^0 incidente. Realizado o experimento, dos $\sim 22,700$ eventos observados, 45 eram do tipo 2π , um fator de 1 para 500 ou 2×10^{-3} . Após extensa investigação (FITCH, 1980), foi confirmado: o experimento havia demonstrado que a interação fraca não conservava a simetria CP .

As consequências da observação de tal assimetria são inúmeras, sendo as mais notáveis a predição de uma terceira geração de fermions (KOBAYASHI; MASKAWA, 1973) e a confirmação do pre-requisito de violação CP para hipótese da bariogênese, que é a assimetria entre matéria e antimateria observada no universo (HORVARTH, 2023). Outra consequência é a busca por essa violação nas outras interações. Na interação forte, tomando como referência o tensor eletromagnético (Eq. A.4.12), podemos olhar para $G_{\mu\nu}^a$ como um tensor dos campos elétricos, E^a , e magnéticos, B^a , "de cores". Nesse caso, o termo cinético que

construímos é invariante sob uma transformação de CP , pois ele é proporcional a soma do quadrado dos campos,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} &= (G_{ai0} G^{ai0} + G_{a0j} G^{a0j}) + (G_{aij} G^{aij}), \quad i, j = 1, 2, 3, \\ &= -2[(\mathbf{E}^a)^2 - (\mathbf{B}^a)^2]. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Teoricamente, nada nos impede de inserir no lagrangiano um termo do tipo

$$\frac{g_s^2}{32\pi^2} \theta G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}, \quad (2.2.13)$$

onde \tilde{G} , chamado de tensor *Hodge dual* ou só dual, é definido como²

$$\tilde{G}^{a\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} G_{\sigma\rho}^a = \begin{pmatrix} 0 & -B_1^a & -B_2^a & -B_3^a \\ B_1^a & 0 & E_3^a & -E_2^a \\ B_2^a & -E_3^a & 0 & E_1^a \\ B_3^a & E_2^a & -E_1^a & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.14)$$

Assim como $G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}$, o traço do produto $G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{d\mu\nu}$ 2.2.13 é invariante de gauge, como podemos ver abaixo (para $\alpha \ll 1$)

$$\begin{aligned} \text{Tr}[G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^d] &\rightarrow \text{Tr}[G_{\mu\nu}^{a'} G_{\rho\sigma}^{d'}] = \text{Tr}[(G_{\mu\nu}^a - \alpha_b f_{abc} G_{\mu\nu}^c)(G_{\rho\sigma}^d - \alpha_e f_{def} G_{\rho\sigma}^f)], \\ &= \text{Tr}[G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^d - \alpha_b f_{abc} G_{\mu\nu}^c G_{\rho\sigma}^d - \alpha_e f_{def} G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^f + \mathcal{O}(\alpha^2)], \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Na condição do traço, $a = d$. Logo

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{a'} G_{\rho\sigma}^{a'} &= G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^a - \alpha_b f_{abc} G_{\mu\nu}^c G_{\rho\sigma}^a - \alpha_e f_{aef} G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^f, \\ &= G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^a - \alpha_b f_{abc} (G_{\mu\nu}^c G_{\rho\sigma}^a + G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^c), \\ &= G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^a - \alpha_b f_{abc} (G_{\mu\nu}^c G_{\rho\sigma}^a - G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^c), \\ &= G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^a. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

² Embora essa transformação seja abordada na seção 2.4, a construção do termo abaixo depende do formalismo do gerador funcional, que não será abordado nesse trabalho. As referências (PESKIN; SCHROEDER, 2018) seção 19.3.2 e (TONG, 2018a) contém a construção e discussão detalhada sobre esse termo.

Seguindo a analogia dos "campos de cor", esse termo é proporcional ao produto escalar desses campos,

$$G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} = -4[\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{B}^a]. \quad (2.2.17)$$

Sob uma transformação de CP ,

$$CP[\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{B}^a] = -\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{B}^a, \quad (2.2.18)$$

fazendo com que a simetria CP não se conserve na QCD. De fato, t'Hooft demonstrou que este termo está atrelado ao vácuo da QCD, permitindo que a interação viole CP (PECCEI, 2008) sem nenhum impedimento teórico. Entretanto, experimentalmente a interação forte parece não violar essa simetria, sendo considerada uma boa simetria da interação. Nas seções seguintes, veremos alguns dos possíveis motivos para tal comportamento.

2.3 MOMENTO DE DIPOLO ELÉTRICO DO NÊUTRON

O nêutron é um bárion composto por um quark *up* com carga elétrica $\frac{2}{3}e$ e dois quarks *down* com carga elétrica $-\frac{1}{3}e$, logo sua carga elétrica total é zero (Tab. 1). Classicamente, o momento de dipolo elétrico (MDE) de uma distribuição com N cargas pontuais é dado por

$$\mathbf{d} = \sum_{i=0}^N q_i \mathbf{r}_i, \quad (2.3.1)$$

onde $i = 1, \dots, N$, q_i são as cargas e r_i suas respectivas distâncias até a origem.

A posição da origem em relação às cargas impacta no MDE, exceto quando a carga total de distribuição é nula, como é o caso do nêutron. Vamos então calcular o MDE deste bárion. Por conveniência, definiremos a origem na carga

positiva, como na figura 1:

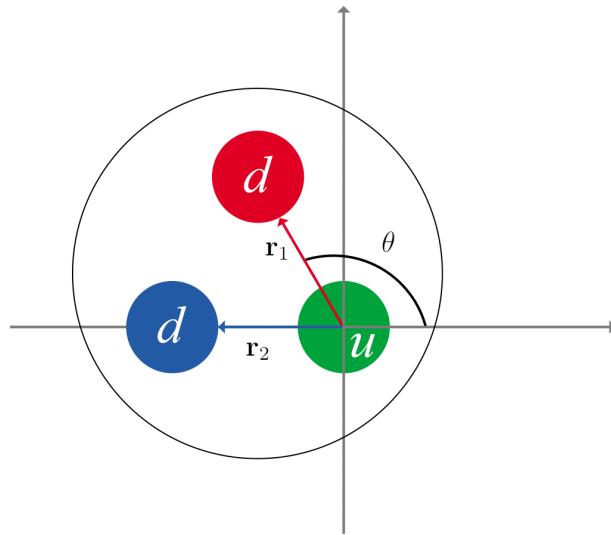


Figura 1 – Ilustração com uma representação clássica do nêutron (HOOK, 2023).

Com a carga q_0 na origem, o vetor \mathbf{r}_0 é igual a zero e podemos reescrever as demais cargas q_i como q . Assim,

$$\mathbf{d}_n = q(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \quad (2.3.2)$$

onde $\hat{\mathbf{r}}_1 = r(\cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}})$ e $\hat{\mathbf{r}}_2 = -r\hat{\mathbf{x}}$. O vetor MDE é

$$\mathbf{d}_n = -\frac{er}{3}[(1 - \cos \theta)\hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}] \quad (2.3.3)$$

e seu módulo

$$d_n = \frac{er}{3}\sqrt{2(1 - \cos \theta)}. \quad (2.3.4)$$

Usando a relação do ângulo duplo,

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right), \quad (2.3.5)$$

ainda podemos escrever o módulo como,

$$d_n = \frac{2er}{3} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (2.3.6)$$

Além de algumas aproximações, para estimar o valor desse módulo também precisamos fazer algumas considerações e a primeira é quanto à distância r entre os quarks. É razoável assumir que essa distância seja o raio do nêutron e, mesmo sendo uma concepção bastante clássica, este pode ser comparado ao raio de confinamento de cor, inferido pela densidade de carga dos núcleons, etc., ou pode ser estimado pelo seu comprimento de onda de Compton,

$$\lambda_n \propto \frac{1}{m_n} \quad (2.3.7)$$

Em todos os casos, r é da ordem de 10^{-15} m. Então,

$$d_n \approx 10^{-15} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ em.} \quad (2.3.8)$$

Existe mais um detalhe: até agora, o MDE que construímos é par sob T , mas quanticamente, a única quantidade vetorial capaz de nos dar a orientação dessa distribuição de cargas no bárion é momento angular total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, onde \mathbf{L} é o momento angular orbital e \mathbf{S} é o spin. Em um referencial onde \mathbf{L} é zero, para descrever a orientação do MDE utilizamos o spin, que é uma grandeza ímpar sob T . Isso significa que, dimensionalmente, o nosso MDE adquire um parâmetro f ímpar sob T . Com base no teorema CPT , uma violação de T implica em uma violação de CP , então podemos inferir que o parâmetro f é da ordem de 10^{-3} (PERKINS, 2000). Logo, a magnitude do MDE é

$$d_n \approx 10^{-18} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ em.} \quad (2.3.9)$$

Agora precisamos determinar o valor do θ . É razoável esperar algo em torno da ordem de grandeza que estimamos até agora, mas o fato é que o valor medido experimentalmente para o MDE é $d_n < 1,8 \times 10^{-28}$ em (WORKMAN et al., 2022).

Nessas condições, $\theta < 10^{-10}$. Dentro do nosso arranjo clássico é como se os quarks tendessem a se alinhar. Note que esse é um limite superior, o MDE do nêutron pode ser bem menor do que isso ou até mesmo ser zero. O que faz o valor do θ ser tão pequeno?

2.4 O PROBLEMA DE CP DA INTERAÇÃO FORTE

Partindo da referência (PECCEI; QUINN, 1977b), seja o lagrangiano "toy model"³ que descreve um sabor de quark ψ interagindo com um campo escalar complexo φ dado por

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{D}\psi - \frac{1}{4}G^2 + \bar{\psi}[g\varphi P_+ + g^*\varphi^*P_-]\psi - \mathcal{L}(\varphi) \quad (2.4.1)$$

onde $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$, $G^2 = G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}$, g é a constante de acoplamento complexa de Yukawa, P_\pm são as matrizes de projeção,

$$P_\pm = \left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \right), \quad (2.4.2)$$

e o potencial $\mathcal{L}(\varphi) = |\partial_\mu\varphi|^2 + \mu^2|\varphi|^2 + h|\varphi|^4$. Sabendo que,

$$z = re^{i\theta}, \quad \forall z \in \mathbb{C}; r, \theta \in \mathbb{R}, \quad (2.4.3)$$

podemos escrever φ e G como,

$$g = |g|e^{i\alpha}, \quad \varphi = |\varphi|e^{i\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (2.4.4)$$

³ A expressão "toy model" ("modelo de brinquedo", em tradução livre) é usada para descrever uma modelagem física simplificada, onde detalhes que vão além do mecanismo que se pretende demonstrar são removidos.

Com essas modificações, fica mais fácil observar que o terceiro termo é um termo de massa do férnion,

$$\begin{aligned}\bar{\psi}[g\varphi P_+ + g^*\varphi^*P_-]\psi &= \bar{\psi} [|g|e^{iy}|\varphi|e^{i\beta}P_+ + |g|e^{-i\alpha}|\varphi|e^{-i\beta}P_-] \psi \\ &= |g||\varphi|\bar{\psi}[e^{i(\alpha+\beta)}P_+ + e^{-i(\alpha+\beta)}P_-]\psi.\end{aligned}\tag{2.4.5}$$

Definindo $\theta' := \alpha + \beta$ e utilizando a propriedade $(\gamma^5)^2 = 1$, podemos reescrever o termo entre colchetes como uma exponencial.

$$[e^{i\theta'}P_+ + e^{-i\theta'}P_-] = \left[1 \frac{(e^{i\theta'} + e^{-i\theta'})}{2} + \gamma^5 \frac{(e^{i\theta'} - e^{-i\theta'})}{2} \right],\tag{2.4.6}$$

reescrevendo as exponenciais como uma expansão em série, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left\{ 1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta')^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(i\theta')^n}{n!} \right] + \gamma^5 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta')^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(i\theta')^n}{n!} \right] \right\} &= \\ = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 1[1 + (-1)^n] + \gamma^5[1 - (-1)^n] \right\} \frac{(i\theta')^n}{n!}.\end{aligned}\tag{2.4.7}$$

Quando n é ímpar, o elemento $[1 + (-1)^n]$ é igual a zero e $[1 - (-1)^n]$ é igual a zero quando n for par. Logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[1 \frac{(i\theta')^{2n}}{(2n)!} + \gamma^5 \frac{(i\theta')^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]\tag{2.4.8}$$

Como $(\gamma^5)^{2n} = 1$ e $(\gamma^5)^{2n+1} = \gamma^5$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(i\theta'\gamma^5)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(i\theta'\gamma^5)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta'\gamma^5)^n}{(n)!} = e^{i\theta'\gamma^5}.\tag{2.4.9}$$

Fazendo $|g||\varphi| = |m|$, temos o nosso termo de massa⁴

$$|m|\bar{\psi}e^{i\theta'\gamma^5}\psi.\tag{2.4.10}$$

Após essas mudanças, ficamos com o seguinte lagrangiano

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{D}\psi - \frac{1}{4}G^2 + |m|\bar{\psi}e^{i\theta'\gamma^5}\psi - \mathcal{L}(\varphi).\tag{2.4.11}$$

⁴ A expressão "termo de massa" aqui é um abuso de linguagem, afinal o termo é complexo. Mas, equivale fisicamente a um termo de massa.

Ainda é possível remover essa fase complexa do termo de massa com uma transformação axial global $U(1)$,

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\frac{\theta'}{2}\gamma^5} \psi; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i\frac{\theta'}{2}\gamma^5}. \quad (2.4.12)$$

Como a matriz γ^5 anticomuta com as matrizes γ^μ (0.0.8) e θ' é uma constante, a parte da derivada covariante permanece inalterada

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &\propto i\bar{\psi}e^{-i\frac{\theta'}{2}\gamma^5}\gamma^\mu D_\mu e^{-i\frac{\theta'}{2}\gamma^5}\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu e^{i\frac{\theta'}{2}\gamma^5}e^{-i\frac{\theta'}{2}\gamma^5}D_\mu\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

e eliminamos a fase complexa,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &\propto |m|\bar{\psi}e^{-i\frac{\theta'}{2}\gamma^5}e^{i\theta'\gamma^5}e^{-i\frac{\theta'}{2}\gamma^5}\psi \\ &= |m|\bar{\psi}\psi. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Classicamente, essa transformação remove a fase complexa sem consequências ao lagrangiano. Mas, correções quânticas mostram que o parâmetro θ' da transformação axial $U(1)$ se acopla ao tensor dual dos glúons (PESKIN; SCHROEDER, 2018), dando origem ao termo abaixo

$$\frac{g_s^2}{32\pi^2}\theta' G\tilde{G}, \quad (2.4.15)$$

onde $G\tilde{G} = G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}$. Esse fenômeno é conhecido como *anomalia quiral* e o resultado é o seguinte lagrangiano

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi}\not{D}\psi + |m|\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}G^2 + \frac{\alpha_s}{8\pi}\theta' G\tilde{G} - \mathcal{L}(\varphi), \quad (2.4.16)$$

onde $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$. Como já discutimos ao final da seção 2.2, sabe-se que o produto $G\tilde{G}$ viola a simetria CP , fato não observado na QCD. Uma solução seria assumir que $\theta' = 0$, mas alguns autores argumentam que $\theta' \approx 1$ (HOOK, 2023). E,

ainda há o outro termo $\theta G\tilde{G}$ (Eq. 2.2.13), independente ao θ' . Somando essas contribuições, temos

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi}\not{D}\psi + |m|\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}G^2 + \frac{\alpha_s}{8\pi}\bar{\theta}G\tilde{G} - \mathcal{L}(\varphi), \quad (2.4.17)$$

onde $\bar{\theta} = \theta + \theta'$. Ou seja, para que a teoria concorde com os experimentos, $\bar{\theta} = 0$. Mas isso implica que $\theta = -\theta'$, sendo que esses parâmetros são independentes. Por que, dentre todos valores possíveis para θ , ele assume exatamente o valor de $-\theta'$? Este é o problema de *CP* da interação forte.

2.5 SOLUÇÃO AXIÔNICA PARA O PROBLEMA DE CP FORTE

A solução clássica e mais popular para o problema discutido na seção anterior parte da observação de que o lagrangiano da Eq. 2.4.17 "possui" uma simetria global sob as seguintes transformações:

$$\varphi \rightarrow \varphi = \phi e^{-i\sigma} = |\phi|e^{i(\beta-\sigma)}, \psi \rightarrow U'\psi = e^{i\frac{\sigma}{2}\gamma^5}\psi. \quad (2.5.1)$$

Por ser invariante sob transformações globais $U(1)$ e considerando que $|\varphi| = |\phi|$, a contribuição de $\mathcal{L}(\varphi)$ fica essencialmente inalterada,

$$\mathcal{L}(\varphi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi) = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* + \mu^2|\phi|^2 + h|\phi|^4. \quad (2.5.2)$$

E, o termo de massa do quark também,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}|m|\psi &\rightarrow \bar{\psi}e^{i\frac{\sigma}{2}\gamma^5}|g||\phi|U^\dagger \left[e^{i(\theta'-\sigma)}P_+ + e^{i(\theta'-\sigma)}P_- \right] U e^{i\frac{\sigma}{2}\gamma^5}\psi \\ &= \bar{\psi}|g||\phi|U^\dagger e^{i(\theta'-\sigma+\sigma)\gamma^5}U\psi = |g||\phi|\bar{\psi}e^{i(-\sigma+\sigma)\gamma^5}\psi = |m|\bar{\psi}\psi. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Mas isso não é de fato uma simetria do lagrangiano, pois a transformação no spinor gera um termo anômalo, que atuará em $\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} - \sigma$. Ainda assim, esse

resultado é útil. Definindo que o parâmetro $\sigma = \bar{\theta}$, removemos o termo que viola CP da teoria. Agora precisamos garantir que σ sempre assuma o valor de $\bar{\theta}$. Para isso, vamos tratar o σ como uma transformação local $\frac{\sigma(x)}{f_a}$, onde f_a é uma constante de decaimento associada ao σ . Isso modificaria $\mathcal{L}(\phi)$, mas deixaria a parte do potencial $V(\phi)$ inalterada

$$\mathcal{L}(\phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi) = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \frac{1}{f_a^2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \mu^2 |\phi|^2 + h |\phi|^4. \quad (2.5.4)$$

Aqui podemos ver que σ é na verdade um bóson de Nambu-Goldstone, i.e., $\mathcal{L}(\phi)$ apresenta uma simetria azimutal fazendo com que seu vácuo seja degenerado e que translações em σ não afetem seu potencial. Com isso, podemos definir o valor esperado de σ no vácuo como $\langle \sigma \rangle = \bar{\theta} f_a$ e eliminá-lo da teoria usando a anomalia. Entretanto, como já vimos anteriormente, uma transformação local produz termos que se acoplam aos férmiões a partir da derivada covariante,

$$i\bar{\psi} \not{D} \psi \rightarrow i\bar{\psi} U^\dagger \gamma^\mu D_\mu (U\psi) = i\bar{\psi} \gamma^\mu U^{-1} D_\mu (U\psi) = i\bar{\psi} \not{D} \psi - \frac{\partial_\mu \sigma}{2f_a} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi. \quad (2.5.5)$$

onde $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ é uma corrente axial, que também poder ser escrita como J_A^μ . Podemos remediar isso expandindo a nossa teoria para $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \mathcal{L}_a$,

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{\alpha_s}{8\pi} \frac{\sigma}{f_a} G \tilde{G} + \frac{\partial_\mu \sigma}{2f_a} J_A^\mu, \quad (2.5.6)$$

onde $\sigma(x)$ é um campo pseudo-escalar real sem massa. Logo,

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_a = i\bar{\psi} \not{D} \psi - \frac{1}{4} G^2 + |m| \bar{\psi} \psi + \frac{\alpha_s}{8\pi} \left[\bar{\theta} + \frac{\sigma}{f_a} \right] G \tilde{G} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \mathcal{L}[\partial_\mu \sigma; \psi; \phi]. \quad (2.5.7)$$

O elemento $\mathcal{L}[\partial_\mu \sigma; \psi; \phi]$ contém os termos de interação provenientes de derivadas do campo σ . Eliminamos a contribuição de $\bar{\theta}$ definindo $\langle \sigma \rangle = -\bar{\theta} f_a$ e redefinindo σ ,

$$\sigma = \langle \sigma \rangle + a, \quad (2.5.8)$$

onde $\langle a \rangle = 0$. Por $\langle \sigma \rangle$ ser uma constante, essa translação não afeta os demais termos que dependem de derivadas do σ . Assim,

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_a = i\bar{\psi}\not{D}\psi + |m|\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}G^2 + \frac{\alpha_s}{8\pi} \frac{a}{f_a} G\tilde{G} + \frac{1}{2}\partial_\mu a\partial^\mu a + \mathcal{L}[\partial_\mu a; \psi; \phi]. \quad (2.5.9)$$

Utilizando a tab. 2 e sabendo que a é um campo pseudo-escalar, podemos ver que nosso lagrangiano é invariante sob CP , tanto no acoplamento com os glúons,

$$CP[aG\tilde{G}] = (-a)(-G\tilde{G}) = aG\tilde{G}, \quad (2.5.10)$$

quanto no acoplamento com os quarks,

$$CP\left[\frac{\partial_\mu a}{2f_a} J_A^\mu\right] = \frac{\partial_0(-a)}{2f_a}(-\bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi) + \frac{(-\partial_i)(-a)}{2f_a}\bar{\psi}\gamma^i\gamma^5\psi = \frac{\partial_\mu a}{2f_a}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi. \quad (2.5.11)$$

Com isso, eliminamos a fonte de violação de CP , mas inserimos um bóson de Nambu-Goldstone a na teoria, o *áxion*. Esse conjunto de transformações constituem a simetria $U(1)_{PQ}$ introduzida por Roberto D. Peccei e Helen R. Quinn em 1977 (PECCEI; QUINN, 1977a), quando propuseram a solução para o problema CP que deu origem ao áxion, quase nomeado *higglet* ((WEINBERG, 1978) e (WILCZEK, 1978)). Isso também responde a questão do momento de dipolo do nêutron ser tão pequeno, uma vez que o parâmetro $\bar{\theta}$ é removido da teoria, a única fonte de violação CP é o termo $aG\tilde{G}$ com $\langle a \rangle = 0$, fazendo com que o MDE do nêutron seja efetivamente zero. Embora resolva o problema, este áxion clássico, também chamado de *visível*, nunca foi observado e, dentro dos limites estabelecidos pela teoria, foi descartado experimentalmente (PECCEI, 2008). Modificações foram feitas desde então e os modelos mais atuais para o áxion partem de uma simetria $SU(2)_{L,R} \times U(1)$, utilizando o mesmo mecanismo para

remover o $\bar{\theta}$, mas com algumas diferenças. Faremos aqui uma abordagem breve das modificações feitas.

Os dois modelos que servem de base para o áxion são os propostos por Kim-Shifman-Vainshtein-Zakharov (KSVZ) e Dine-Fischler-Srednicki-Zhitnitsky (DFSZ) (CORTONA et al., 2016). A parte comum a essas teorias é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu a\partial^\mu a + \frac{\alpha_s}{8\pi} \frac{a}{f_a} G\tilde{G} + \frac{1}{4}g_{a\gamma}^0 aF\tilde{F} + \frac{\partial_\mu a}{2f_a} J_{a,0}^\mu - \bar{q}_L M_q q_R + h.c., \quad (2.5.12)$$

onde $g_{a\gamma}^0$ é a constante de acoplamento áxion-fóton, $\tilde{F} = \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ é o tensor dual eletromagnético, $J_{a,0}^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma^5 c_q^0 q$ é a corrente axial e q, c_q^0 e M_q são respectivamente o dubbleto de quarks da primeira geração, a matriz com as constantes de acoplamento da corrente axial e a matriz de massa dos quarks,

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad c_q^0 = \begin{pmatrix} c_u^0 & 0 \\ 0 & c_d^0 \end{pmatrix}, \quad M_q = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}. \quad (2.5.13)$$

O valores das constantes $g_{a\gamma}^0$ e c_q^0 dependem do modelo utilizado. Realiza-se a transformação axial,

$$q \rightarrow q' = e^{i\frac{a}{2f_a}Q_a\gamma^5} q, \quad \text{Tr}\{Q_a\} = 1 \quad (2.5.14)$$

onde Q_a é uma matriz que atua nos campos de quarks. Essa transformação remove $aG\tilde{G}$ através da anomalia, modificando as constantes de acoplamento, $g_{a\gamma}^0 \rightarrow g_{a\gamma}$ e $c_q^0 \rightarrow c_q$, e a massa dos quarks, resultando em

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu a\partial^\mu a + \frac{1}{4}g_{a\gamma} aF\tilde{F} + \frac{\partial_\mu a}{2f_a} J_a^\mu - \bar{q}_L M_a q_R + h.c., \quad (2.5.15)$$

com $c_q = c_q^0 - Q_a$ e $M_a = e^{i\frac{a}{2f_a}Q_a} M_q e^{i\frac{a}{2f_a}Q_a}$. Algo que não trataremos aqui, mas precisamos pontuar é que o áxion ganha uma massa m_a a partir do vácuo dos glúons, se considerarmos que o termo anômalo funciona como um potencial

efetivo para o então pseudo bóson de Nambu-Goldstone,

$$m_a^2 = \left\langle \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial a^2} \right\rangle \propto \frac{\alpha_s}{f_a} \frac{\partial}{\partial a} \left\langle G\tilde{G} \right\rangle \Big|_{\langle a \rangle = \langle \sigma \rangle}. \quad (2.5.16)$$

Dada a variedade de modelos, o espectro da massa do áxion é bastante amplo.

De acordo com (ADAMS et al., 2023), o valor mais preciso já calculado para a massa do áxion é

$$m_a = 5,691 \pm 0,051 \mu\text{eV} (10^{12} \text{GeV}/f_a). \quad (2.5.17)$$

Outro fato é o acoplamento do áxion com dois fótons $aF\tilde{F}$. Diferentemente do caso não-abeliano, o termo $F\tilde{F}$ não contribui para a ação no setor eletromagnético, mas isso muda quando o parâmetro que se acopla ao produto passa a ser dinâmico. A existência do áxion tem impactos diretos no eletromagnetismo e é este acoplamento que permite a observação indireta do áxion, agora *invisível*, como veremos no capítulo seguinte.

3 O ÁXION DA QCD NA ELETRODINÂMICA

No capítulo anterior, vimos que o áxion se acopla aos campos de glúons e também aos campos eletromagnéticos através do termo $aF\tilde{F}$. Neste capítulo, vamos obter as equações de Maxwell modificadas por essa partícula e o papel dessa eletrodinâmica axiônica (EDA) na hipótese da matéria escura axiônica.

3.1 ELETRODINÂMICA AXIÔNICA

Antes de partir para a EDA, vamos tratar do produto $aF\tilde{F}$ quando a é apenas um parâmetro. Quando $\partial_\mu a = 0$, diferentemente do caso não-abeliano, este produto não altera equações as equações de Maxwell, como veremos a seguir. Seja S a ação dos campos eletromagnéticos (TONG, 2018b),

$$S = \int d^4x \{\mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_a\} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4\mu_0} F^2 - \frac{1}{4} \alpha_{ea} a F \tilde{F} \right\}, \quad (3.1.1)$$

onde μ_0 é permeabilidade magnética do vácuo e $\alpha_{ea} = \frac{\alpha_e}{\pi} = \frac{e^2}{4\pi^2}$ é a constante de acoplamento ($\mu_0 = \epsilon_0^{-1}$). As equações de movimento para \mathcal{L}_γ são obtidas a partir das eq. de Euler-Lagrange A.4.5¹,

$$\partial_\kappa \left[\frac{\partial \mathcal{L}_\gamma}{\partial (\partial_\kappa A_\lambda)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_\gamma}{\partial A_\lambda} = \partial_\kappa F^{\kappa\lambda} = 0 \quad (3.1.2)$$

Com a indexação usual e sabendo que o tensor F é o descrito na eq. A.4.12, para $i, j = 1, 2, 3$, temos

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \begin{cases} \nu = 0, \partial_i F^{i0} = \nabla \cdot \mathbf{E}, \\ \nu = i, \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = -\dot{\mathbf{E}} + \nabla \times \mathbf{B}. \end{cases} \quad (3.1.3)$$

¹ Esta derivação é feita em detalhes no apêndice A.4.

Para \mathcal{L}_a , realizando as devidas trocas de índices mudos, o produto $aF\tilde{F}$ pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} aF\tilde{F} &= \frac{1}{2}a\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho), \\ &= 2a\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

A partir daqui podemos obter as equações de movimento para \mathcal{L}_a ,

$$\partial_\kappa \left[\frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial (\partial_\kappa A_\lambda)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial A_\lambda} = \frac{1}{2}\alpha_{ea}\partial_\kappa[a(\epsilon^{\kappa\lambda\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma + \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\partial_\mu A_\nu)] = 0. \quad (3.1.5)$$

Como $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} = \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$, podemos contrair essa soma substituindo $\mu\nu$ por $\rho\sigma$,

$$\partial_\kappa[a(\epsilon^{\kappa\lambda\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma + \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\partial_\mu A_\nu)] = 2\partial_\kappa(a\epsilon^{\kappa\lambda\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma). \quad (3.1.6)$$

Observando que $\partial_\rho A_\sigma$ é uma matriz quadrada, podemos reescrevê-la utilizando a decomposição de Toeplitz, que nos diz que qualquer matriz quadrada pode ser decomposta como a soma de suas partes simétrica e anti-simétrica,

$$\partial_\rho A_\sigma = \frac{1}{2}(\partial_\rho A_\sigma + \partial_\sigma A_\rho) + \frac{1}{2}(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho). \quad (3.1.7)$$

Realizando o produto com tensor de Levi-Civita, vemos que a parte simétrica se anula,

$$\epsilon^{\kappa\lambda\rho\sigma}\frac{1}{2}(\partial_\rho A_\sigma + \partial_\sigma A_\rho) = \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\rho\sigma}(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = 0, \quad (3.1.8)$$

e a parte anti-simétrica retorna o tensor dual \tilde{F} ,

$$\epsilon^{\kappa\lambda\rho\sigma}\frac{1}{2}(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = \tilde{F}^{\kappa\lambda}. \quad (3.1.9)$$

Assim, as equações de movimento são,

$$\alpha_{ea}\partial_\mu(a\tilde{F}^{\mu\nu}) = 0. \quad (3.1.10)$$

Lembrando que $\partial_\mu a = 0$, ficamos com a identidade de Bianchi,

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{cases} \nu = 0, \partial_j \tilde{F}^{j0} = \nabla \cdot \mathbf{B}, \\ \nu = i, \partial_0 \tilde{F}^{0i} + \partial_j \tilde{F}^{ji} = -\dot{\mathbf{B}} - \nabla \times \mathbf{E}. \end{cases} \quad (3.1.11)$$

Outro fato relevante é que o produto $F\tilde{F}$ é uma derivada total, i.e.,

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma) = \partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma) = \partial_\mu K^\mu, \quad (3.1.12)$$

pois $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0$. A derivada $\partial_\mu K^\mu$, também chamada de termo topológico, depende apenas das condições de contorno. Nas condições em que obtemos nossas equações, tomamos o potencial $A_\mu = 0$ no infinito, logo esse termo também não contribui para a ação. Quando $\partial_\mu a \neq 0$, as equações de movimento para a ação passam a ser²

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 \alpha_{ea} \partial_\mu (a \tilde{F}^{\mu\nu}) \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \alpha_{ea} \nabla a \cdot \mathbf{B}, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}} = \mu_0 \alpha_{ea} (\dot{a} \mathbf{B} + \nabla a \times \mathbf{E}). \end{cases} \quad (3.1.13)$$

Essas equações nos permitem descrever classicamente o fenômeno magnetoelectrônico presente, por exemplo, em materiais conhecidos como *isolantes topológicos* (ITs), materiais cujo o interior se comporta como um isolante e as superfícies externas como condutores. Para nossa modelagem, fora desses materiais o parâmetro $a = 0$ e dentro dele $a = \pi$, fazendo com que o $\nabla a \neq 0$ em uma região δl ao redor das suas paredes.

Vamos partir da primeira equação em 3.1.13 e considerar um IT cilíndrico imerso em um campo magnético externo $\mathbf{B}_e = B_e \hat{\mathbf{z}}$ (Fig. 2). Como

$$\nabla a \cdot \mathbf{B}_e = \nabla \cdot (a \mathbf{B}_e), \quad (3.1.14)$$

² Por permanecerem inalteradas e somarem zero, as contribuições provenientes da identidade de Bianchi foram ocultadas.

podemos usar a lei de gauss para determinar o comportamento desses campos na parede desse material com uma superfície S no intervalo δz ,

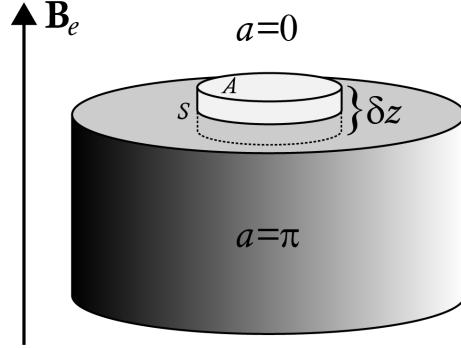


Figura 2 – Ilustração com um IT cilíndrico imerso em um campo magnético uniforme.

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\hat{\mathbf{a}} &= \frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_S \left[-\frac{1}{\epsilon_0} \alpha_{ea} a B_e \hat{\mathbf{z}} \right] \cdot d\hat{\mathbf{a}} \\ &= \int_A \left[-\left(\frac{1}{\epsilon_0} a_{fora} - \frac{1}{\epsilon} a_{dentro} \right) \alpha_{ea} B_e \hat{\mathbf{z}} \right] \cdot \hat{\mathbf{z}} da \\ &= \frac{1}{\epsilon} \alpha_e B_e A. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Logo, a densidade superficial de cargas $\sigma = \alpha_e B_e$. Na condição onde o vetor deslocamento elétrico $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, as cargas induzidas na superfície do material são de polarização $\sigma = \sigma_b$. Em outras palavras, o campo magnético polariza eletricamente o IT,

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{z}} \rightarrow \mathbf{P} = \alpha_e \mathbf{B}_e, \quad (3.1.16)$$

que por sua vez dá origem a um campo elétrico, pela condição de contorno abaixo

$$(\epsilon_0 \mathbf{E}_{fora} - \epsilon \mathbf{E}_{dentro}) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \sigma_b = \alpha_e B_e. \quad (3.1.17)$$

Mantendo a mesma configuração, no caso seguinte, vamos trocar o campo magnético externo por um campo elétrico, $\mathbf{E}_e = E_e \hat{\mathbf{z}}$. Sabendo que $\dot{a} = 0$ e

$$\mu_0 \alpha_{ea} (\nabla a \times \mathbf{E}_e) = \nabla \times (\mu_0 \alpha_{ea} a \mathbf{E}_e), \quad (3.1.18)$$

com um circuito amperiano de altura l no intervalo radial δs na borda do IT, cuja normal é tangente à superfície lateral do material (Fig. 3), podemos utilizar o teorema de Stokes para estudar o que acontece a partir da segunda equação em 3.1.13,

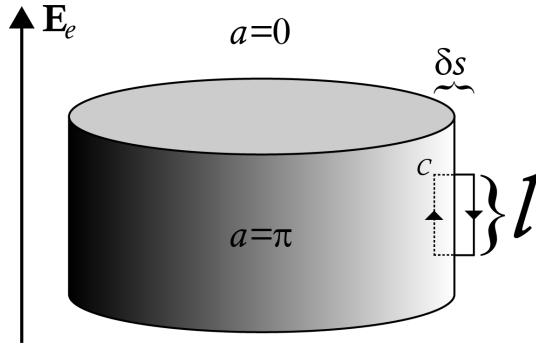


Figura 3 – Ilustração com um IT cilíndrico imerso em um campo elétrico uniforme.

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 I = \oint_C (\mu_0 \alpha_{ea} a \mathbf{E}_e) \cdot d\mathbf{l} \\
 &= \int_l [(a_{dentro} \mu - a_{fora} \mu_0) \alpha_{ea} E_e \hat{\mathbf{z}}] \cdot \hat{\mathbf{z}} dz \\
 &= \mu \alpha_e E_e l.
 \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Similar ao caso anterior, o campo \mathbf{E}_e induz uma corrente superficial K_s no IT, com $K_s = \alpha_e E_e$. Novamente, se as condições permitem $\mathbf{H} = \mathbf{0}$, a corrente superficial é a corrente de magnetização superficial $\mathbf{K}_b = K_b \hat{\varphi}$,

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{s}} = (\alpha_e E_e \hat{\mathbf{z}}) \times \hat{\mathbf{s}} \rightarrow \mathbf{M} = \alpha_e \mathbf{E}_e, \tag{3.1.20}$$

e a condição de contorno para o campo magnético passa a ser

$$(\mu_0 \mathbf{B}_{fora} - \mu \mathbf{B}_{dentro}) \cdot \hat{\mathbf{z}} = K_b = \alpha_e E_e. \tag{3.1.21}$$

Isolantes topológicos são um tópico extenso e complexo. Aqui foi feita apenas uma breve abordagem para demonstrar a importância do termo topológico na

descrição desses fenômenos magnetoelétricos. Uma abordagem introdutória sobre o tema, envolvendo outros fenômenos, pode ser encontrada em (TONG, 2018b).

Agora vamos para o caso onde o parâmetro a é o áxion da QCD. Isso significa que a constante de acoplamento $g_{a\gamma}$ e a massa m_a dependem do modelo axiônico utilizado no setor forte. Vamos partir do seguinte lagrangiano (SIKIVIE, 1983)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu a \partial^\mu a - m_a^2 a^2) - A_\mu J^\mu - \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{a\gamma} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (3.1.22)$$

onde $A_\mu = (V, -\mathbf{A})$ e $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$. As equações de movimento referentes aos dois últimos termos já foram obtidas na seção anterior, a diferença agora é o termo de interação $A_\mu J^\mu$ não nulo. Logo

$$\partial_\kappa \left[\frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial (\partial_\kappa A_\lambda)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial A_\lambda} = \partial_\kappa \left[\frac{1}{\mu_0} F^{\kappa\lambda} + g_{a\gamma} (a \tilde{F}^{\kappa\lambda}) \right] - J^\lambda = 0, \quad (3.1.23)$$

que resulta em

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 [J^\nu - g_{a\gamma} \partial_\mu (a \tilde{F}^{\mu\nu})]. \quad (3.1.24)$$

Como a agora é um campo pseudo-escalar, ficamos com mais uma equação³,

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu a)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = \partial_\mu \partial^\mu a + m_a^2 a + \frac{1}{4} g_{a\gamma} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (3.1.25)$$

Na notação de Lorentz-Heaviside, as equações de Maxwell modificadas são

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - g_{a\gamma} \nabla a \cdot \mathbf{B}), \\ \nabla \times \mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}} &= \mu_0 [\mathbf{J} + g_{a\gamma} (\dot{a} \mathbf{B} + \nabla a \times \mathbf{E})], \\ \ddot{a} - \nabla^2 a + m_a^2 a &= g_{a\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

³ O cálculo para obter essas equações está descrito no apêndice A.3.

As equações associadas à identidade de Bianchi continuam inalteradas,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0. \quad (3.1.27)$$

A EDA é interessante no contexto das *partículas tipo-áxion* (ALPs), pois essas partículas/quasipartículas não precisam resolver o problema CP forte, ou seja, as constantes de acoplamento e massa não dependem dos parâmetros da QCD, podendo ser modeladas de acordo com o objeto de estudo, mas mantendo todo o aparato de um campo pseudo-escalar que se acopla aos campos eletromagnéticos.

Voltando ao caso dos ITs, por exemplo, a hipótese do polariton axiônico diz que um material capaz de transmitir um feixe de luz, sob as condições ideais, pode refletir totalmente essa luz incidente quando exposto a um campo magnético externo paralelo ao campo elétrico desse feixe. Este fenômeno só é possível para um campo *a* dinâmico, com potencial aplicação em circuitos computacionais (SEKINE; NOMURA, 2021).

Esse é um dos principais motivadores da pesquisa em áxions e ALPs: pesquisar materiais exóticos e desenvolver tecnologias mais sofisticadas de metrologia quântica, a fim de encontrar novos meios de investigar fenômenos atrelados a eventos de altas energias, especialmente em experimentos de pequena escala. Nesse contexto, o áxion da QCD aparece também como um possível candidato à matéria escura, com a sua busca experimental sendo a aplicação mais notável da EDA, como veremos na próxima seção.

3.2 MATÉRIA ESCURA AXIÔNICA

Um dos grandes mistérios atualmente na física e cosmologia é a matéria escura, que constitui cerca de 25% da densidade de energia do nosso universo (ADAMS et al., 2023). Sua presença é inegável, confirmada indiretamente por seus efeitos gravitacionais, como por exemplo na curva de rotação das galáxias. De forma resumida, uma galáxia espiral como a nossa é constituída por um bojo e um disco fino, com a maior parte da massa no bojo. Para uma estrela a uma distância r do centro galático temos (PERKINS, 2000)

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM(r)}{r^2}, \quad (3.2.1)$$

onde a massa galática $M(r) \propto r^3$ no bojo galático e longe do bojo, no disco galático, a massa M se mantém aproximadamente constante dentro do raio r . Logo, espera-se que no bojo $v \propto r$ e no disco $v \propto r^{-\frac{1}{2}}$. Entretanto, o que foi observado é que a velocidade aumenta ou se mantém ao longo do disco (BROEILS, 1992). Essa discrepância é sanada se a galáxia estiver inserida em um halo esférico de uma matéria escura, que, diferentemente da matéria luminosa, não interage eletromagneticamente ou interage muito fracamente. No caso da nossa galáxia, o halo de matéria escura corresponde a 89% da sua massa (PERKINS, 2000). Dentro desse contexto de proporções, a matéria que estudamos até agora corresponde a 5% da densidade de energia do universo⁴. A natureza de 95% do universo⁵ ainda é uma questão em aberto.

Voltando à matéria escura, existem várias hipóteses a respeito da natureza

⁴ Menos que isso. Afinal, neste trabalho, não demos ênfase ao setor fraco do Modelo Padrão.

⁵ Dos quais 70% são energia escura, outro grande mistério. Uma ótima apresentação do tema pode ser encontrada em (ARAÚJO, 2021).

da matéria escura. As duas principais abordagens para essa questão são: a matéria escura é uma partícula (ou partículas) e a matéria escura não é uma partícula, mas sim um reflexo da limitação dos nossos modelos gravitacionais. Esta última geralmente se baseia em modelos emergentes que não consideram a Relatividade Geral uma boa descrição do universo. Aqui vamos nos ater a primeira abordagem, pautada pelo modelo Λ CDM, também chamado de Modelo Padrão da Cosmologia. Do inglês, a sigla CDM significa *matéria escura fria*, pois este modelo determina que a velocidade dessas partículas são muito pequenas em relação a da luz. Nesse regime, o áxion da QCD aparece como um possível candidato à matéria escura⁶. O acoplamento com fótons, permite a sua busca experimental impondo sob o áxion as condições do halo de matéria escura da nossa galáxia.

Aqui vamos abordar o haloscópio, que opera com a hipótese de que a matéria escura que compõe o halo galático são áxions distribuídos de forma homogênea e *frios*. Para um campo a descrito pela parte real da onda plana $a(\mathbf{r}, t) = a_0 e^{i(\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r} - \omega_a t)}$, isto significa que a onda não depende de \mathbf{r} e se propaga com baixas velocidade v da ordem de $\mathcal{O}(10^{-3})$. Das equações de de Broglie, obtemos a frequência angular $\omega_a = E = m_a + \frac{1}{2}m_a v^2 \approx m_a$. Logo, o campo a é dado por $a(t) = a_0 e^{-im_a t}$. O haloscópio em questão⁷ é uma cavidade de onda com um plasma não-homogêneo onde o áxion interage com um campo magnético externo \mathbf{B}_e e, em ressonância, interfere com os campos eletromagnéticos

⁶ Neste trabalho nossa ênfase está no áxion. Caso leitor se interesse pelo tema, um resumo didático de outros candidatos para matéria escura e suas características podem ser encontrados em (BALTZ, 2004).

⁷ Todo o tratamento realizado aqui segue a idealização desenvolvida pelos pesquisadores do Axion Dark Matter Experiment (ADMX) (MILLAR et al., 2023).

dentro da cavidade. Para vermos como isso acontece, vamos fazer algumas considerações: a cavidade é cilíndrica, de raio R , centrada no eixo \hat{z} e com um campo magnético $\mathbf{B}_e = B_e \hat{z}$ em seu interior; é conveniente separar os campos e operador derivada em componentes transversais e axial,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + E_z \hat{z}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_t + B_z \hat{z}; \quad \nabla = \nabla_t + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.2.2)$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{B} oscilam com frequência ω e a dependência em z de \mathbf{E}_t e \mathbf{B}_t é dada por $e^{ik_z z}$; a resposta do plasma se dá apenas na direção axial, assim $\epsilon_{ij} E_j = \epsilon \mathbf{E}_t + \epsilon_z \mathbf{E}_z$ (para clareza visual $\mu = \epsilon = 1$); apenas fontes campos oriundas do acoplamento fóton-áxion são consideradas, ou seja, cargas e correntes livres serão desconsideradas. Sob essas condições, a equação que apresenta o acoplamento com o áxion passa a ser

$$\left(\nabla_t + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{B}_t + \mathbf{B}_z) + i\omega(\mathbf{E}_t + \epsilon_z \mathbf{E}_z) = -im_a g_{a\gamma} a \mathbf{B}_e. \quad (3.2.3)$$

Em ressonância $\omega = m_a$. O produto vetorial resultante das partes transversais só pode ser axial, isso nos permite separar a equação acima em duas,

$$\nabla_t \times \mathbf{B}_t + i\omega \epsilon_z \mathbf{E}_z = -i\omega g_{a\gamma} a \mathbf{B}_e \quad (3.2.4)$$

e

$$\nabla_t B_z \times \hat{z} + \hat{z} \times \frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial z} = \hat{z} \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial z} - \nabla_t B_z \right) = -i\omega \mathbf{E}_t. \quad (3.2.5)$$

Vemos na primeira equação que o acoplamento $a \mathbf{B}_e$ atua como uma corrente oscilando uniformemente ao longo de todo o volume. Fazendo o mesmo para a Lei de Faraday,

$$\hat{z} \times \left(\frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} - \nabla_t E_z \right) = i\omega \mathbf{B}_t. \quad (3.2.6)$$

Substituindo o \mathbf{E}_t da equação 3.2.5 pela equação 3.2.4, vemos que as componentes transversais dos campos só dependem das componentes axiais,

$$\begin{aligned}\omega^2 \mathbf{B}_t &= \hat{\mathbf{z}} \times \left[\frac{\partial(-i\omega \mathbf{E}_t)}{\partial z} + i\omega \nabla_t E_z \right], \\ &= \hat{\mathbf{z}} \times \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\hat{\mathbf{z}} \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial z} - \nabla_t B_z \right) \right] + i\omega \nabla_t E_z \right\}, \\ &= \hat{\mathbf{z}} \times \left\{ \hat{\mathbf{z}} \times \left(\frac{\partial^2 \mathbf{B}_t}{\partial z^2} - \nabla_t \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) + i\omega \nabla_t E_z \right\},\end{aligned}\quad (3.2.7)$$

Pela relação $\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v}_t) = -\mathbf{v}_t$, temos

$$\begin{aligned}\omega^2 \mathbf{B}_t &= -\frac{\partial^2 \mathbf{B}_t}{\partial z^2} + \nabla_t \frac{\partial B_z}{\partial z} + i\omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t E_z \\ &= k_z^2 \mathbf{B}_t + \nabla_t \frac{\partial B_z}{\partial z} + i\omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t E_z\end{aligned}\quad (3.2.8)$$

Isolando \mathbf{B}_t ,

$$\mathbf{B}_t = \frac{1}{\omega^2 - k_z^2} \left(\nabla_t \frac{\partial B_z}{\partial z} + i\omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t E_z \right). \quad (3.2.9)$$

Uma vez que a dependência axial está demonstrada, vamos substituir o resultado acima na eq. 3.2.4,

$$\frac{1}{\omega^2 - k_z^2} \left[\nabla_t \times \left(\nabla_t \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) + i\omega \nabla_t \times (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t E_z) \right] + i\omega \epsilon_z \mathbf{E}_z = -i\omega g_{a\gamma} a \mathbf{B}_e. \quad (3.2.10)$$

Se voltarmos a eq. 3.2.4 novamente, vemos que a componente B_z do campo magnético não se acopla ao áxion, apenas as componentes \mathbf{B}_t . Isso significa que B_z resulta das dinâmicas com o campo elétrico. Uma vez que estamos interessados apenas no áxion como fonte, vamos ignorar a contribuição de B_z para a equação. Reescrevendo em coordenadas cilíndricas e multiplicando por

$$\frac{1}{i\omega},$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega^2 - k_z^2} [(\hat{\mathbf{s}} \partial_s + \hat{\varphi} \partial_\varphi) \times (\hat{\mathbf{s}} \partial_s E_z - \hat{\varphi} \partial_\varphi E_z)] + \epsilon_z \mathbf{E}_z &= -g_{a\gamma} a \mathbf{B}_e, \\ (\partial_s^2 + \partial_\varphi^2) E_z + \gamma E_z &= -\frac{\gamma}{\epsilon_z} g_{a\gamma} B_e a,\end{aligned}\quad (3.2.11)$$

onde $\gamma = \epsilon_z(\omega^2 - k_z^2)$. Como a só possui dependência temporal, podemos reescrever E_z utilizando separação de variáveis somada a uma função que também só depende de t , $E_z = S(s)\Phi(\varphi)Z(z) + g(t)$, assim a equação diferencial parcial (EDP) passa ser

$$\Phi Z \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} + \frac{\Phi Z}{s} \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{SZ}{s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \gamma[S\Phi Z + g(t)] = -\frac{\gamma}{\epsilon_z} g_{a\gamma} B_e a(t). \quad (3.2.12)$$

Separado a eq. acima em duas equações, obtemos a solução particular para a parte temporal,

$$g(t) = -\frac{g_{a\gamma} B_e a_0}{\epsilon_z} e^{-i\omega t}, \quad (3.2.13)$$

e ficamos com a seguinte EDP,

$$\Phi Z \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} + \frac{\Phi Z}{s} \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{SZ}{s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \gamma S\Phi Z = 0. \quad (3.2.14)$$

Rearranjando essa equação,

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{S} \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} + \frac{s}{S} \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + s^2 \gamma &= 0, \\ \frac{s^2}{S} \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} + \frac{s}{S} \frac{\partial S}{\partial s} + s^2 \gamma &= -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = p^2, \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

vemos que o extremo esquerdo dessa igualdade é a equação diferencial ordinária (EDO) de Bessel e o centro é a EDO do oscilador harmônico. O cap. 11 da referência (ARFKEN; WEBER, 2007) nos diz que a solução para essa EDO é dada por⁸

$$S(s)\Phi(\varphi) = c_J J_p(isd_z) e^{ip\varphi}, \quad (3.2.16)$$

onde $id_z = \sqrt{\gamma}$ com $d_z = \sqrt{\epsilon_z(k_z^2 - \omega^2)}$ e J_p é a função de Bessel de primeiro tipo,

$$J_p(isd_z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{isd_z}{2} \right)^{2n+p}. \quad (3.2.17)$$

⁸ Ainda existe uma solução harmônica em z na referência, mas a EDP 3.2.15 não depende explicitamente dessa variável, logo este resultado é válido para todo z dentro do cilindro.

Por continuidade, a solução harmônica deve ser periódica, o que significa que p deve ser um número inteiro e, dada a simetria da configuração, a contribuição de φ é desprezível, logo $p = 0$. Sendo assim, a solução para essa EDO é dada por

$$S(s) = c_J J_0(isd_z) \quad (3.2.18)$$

Ainda existe uma solução com a função de Bessel de segundo tipo $Y_0(-isd_z)$. Entretanto, essa solução é singular, diverge em $s = 0$, um resultado fisicamente incongruente. Agora podemos escrever a solução geral para nosso sistema,

$$E_z(s, t) = -\frac{g_{a\gamma} B_e}{\epsilon_z} a(t) + c_J J_0(isd_z) \quad (3.2.19)$$

Para determinar a constante c_J precisamos impor algumas condições de contorno no nosso cilindro. A primeira condição é $E_z = 0$ nas paredes, $s = R$, que pode ser realizado com o exterior da cavidade sendo um condutor, e a segunda é que esperamos acoplamento máximo. Pela eq. 3.2.6, o acoplamento é máximo quando $E_t = 0$ e $k_z = 0$. Sendo assim

$$E_z(R, t) = 0 = -\frac{g_{a\gamma} B_e}{\epsilon_z} a(t) + c_J J_0(R\omega\sqrt{\epsilon_z}) \rightarrow c_J = \frac{g_{a\gamma} B_e}{\epsilon_z J_0(R\omega\sqrt{\epsilon_z})} a(t) \quad (3.2.20)$$

E, ficamos por fim com

$$E_z(s, t) = \frac{g_{a\gamma} B_e}{\epsilon_z} \left[\frac{J_0(s\omega\sqrt{\epsilon_z})}{J_0(R\omega\sqrt{\epsilon_z})} - 1 \right] a(t). \quad (3.2.21)$$

O campo magnético B_t pode ser obtido diretamente da equação 3.2.6

$$\mathbf{B}_t(s, t) = -\frac{g_{a\gamma} B_e}{\epsilon_z} \frac{J_1(s\omega\sqrt{\epsilon_z})}{J_0(R\omega\sqrt{\epsilon_z})} a(t) \hat{\varphi}. \quad (3.2.22)$$

Vemos que $J_0(R\omega\sqrt{\epsilon_z}) \rightarrow \infty$ quando $R \rightarrow \infty$, ou seja, próximo do centro de uma cavidade muito grande, o campo magnético B_t vai a zero assim como o segundo

termo do campo elétrico E_z . Logo, a solução é o acoplamento do áxion em um plasma infinito

$$E_z(t) = -\frac{g_{a\gamma} B_e}{\epsilon_z} a(t). \quad (3.2.23)$$

Conhecendo as propriedades do plasma, com ϵ_z sendo descrito pelo modelo de Drude, é possível impor um regime de ressonância fazendo $Re(\epsilon_z) = 0$. No aparelho, uma antena captaria o sinal gerado que, posteriormente, seria amplificado. Embora o fenômeno esperado seja relativamente simples, a massa do áxion é muito pequena, fazendo com que o grande desafio dessa observação resida no aprimoramento de técnicas e pesquisa de materiais que possam mitigar o ruído de fundo frente ao acoplamento.

CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho, vimos uma breve introdução de como o áxion, uma partícula inicialmente proposta para resolver um problema específico da cromodinâmica quântica, impacta a física que conhecemos. Em especial na eletrodinâmica, uma vez que o acoplamento áxion-fóton pode oferecer uma nova janela no estudo de eventos de altas energia com experimentos de pequena escala, com a possibilidade de ser a chave para um dos grandes mistérios na cosmologia: a matéria escura (SIKIVIE, 1983). Alguns autores afirmam que, hoje, a busca por matéria escura axiônica está na sua "era dourada", com um crescente número de experimentos simultâneos, muitos de pequena escala, motivando a pesquisa e o desenvolvimento constante de tecnologias de metrologia quântica ultra sensíveis. Esses, por sua vez, que são aproveitadas em outras áreas de pesquisa além da física (ADAMS et al., 2023). E, ainda que não se verifique a existência do áxion da QCD, o aparato das ALPs se mostrou relevante no estudo de materiais e fenômenos exóticos. Esses progressos experimentais e teóricos ressonam na física como um todo, impactando outras áreas de pesquisa além da física de partículas.

REFERÊNCIAS

ADAMS, C. B. et al. *Axion Dark Matter*. 2023.

ARAÚJO, R. S. d. *Um panorama Histórico-cosmológico da energia escura*. 72 fl. Monografia (Um panorama Histórico-cosmológico da energia escura) — Curso de Licenciatura em Física, Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, 2021.

ARFKEN, G.; WEBER, H. *Física matemática*: métodos matemáticos para engenharia e física. São Paulo: Elsevier Inc., 2007. ISBN 9788535220506.

BALTZ, E. A. *Dark Matter Candidates*. 2004.

BROEILS, A. H. The mass distribution of the dwarf spiral ngc 1560. *Astronomy and Astrophysics*, v. 256, p. 19–32, 1992.

CORTONA, G. G. di et al. The qcd axion, precisely. *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2016, n. 1, 2016. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01\(2016\)034](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01(2016)034)>.

FITCH, V. *The Discovery of Charge - Conjugation Parity Asymmetry*. 1980. Disponível em: <<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1980/fitch/lecture>>. Acesso em: 2023-06-20.

GELL-MANN, M.; PAIS, A. Behavior of neutral particles under charge conjugation. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 97, p. 1387–1389, 1955. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.97.1387>>.

GOLDSTEIN, H. et al. *Classical Mechanics*. 3. ed. Nova Iorque: Pearson, 2002. ISBN 9780201657029.

GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Elementary Particles*. 2. ed. Weinheim: WILEY-VCH, 2008. ISBN 9783527406012.

HOOK, A. *TASI Lectures on the Strong CP Problem and Axions*. 2023.

HORVARTH, J. O nascimento da matéria (da qual nós estamos feitos): bariogênese no universo primordial. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Sociedade Brasileira de Física, v. 45, p. e20220304, 2023. ISSN 1806-1117. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0304>>.

KOBAYASHI, M.; MASKAWA, T. CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction. *Progress of Theoretical Physics*, v. 49, n. 2, p. 652–657, 1973. Disponível em: <<https://doi.org/10.1143/PTP.49.652>>.

LEE, T. D.; OEHME, R.; YANG, C. N. Remarks on possible noninvariance under time reversal and charge conjugation. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 106, p. 340–345, 1957. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.106.340>>.

- LEE, T. D.; YANG, C. N. Question of parity conservation in weak interactions. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 104, p. 254–258, 1956. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.104.254>>.
- MENDES, T.; CUCCHIERI, A.; MORAES, T. B. Yuval ne’eman e o grupo de simetria dos quarks. Universidade de São Paulo, 2022.
- MILLAR, A. J. et al. Searching for dark matter with plasma haloscopes. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 107, p. 055013, 2023. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.107.055013>>.
- NAGASHIMA, Y. *Elementary Particle Physics: Volume 1: Quantum field theory and particles*. Weinheim: Wiley-VCH, 2010. ISBN 9783527409624.
- PECCEI, R. D. The strong cp problem and axions. Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISSN 0075-8450. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-73518-2_1>.
- PECCEI, R. D.; QUINN, H. R. Constraints imposed by cp conservation in the presence of pseudoparticles. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 16, p. 1791–1797, 1977. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.16.1791>>.
- PECCEI, R. D.; QUINN, H. R. Cp conservation in the presence of pseudoparticles. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 38, p. 1440–1443, 1977. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.38.1440>>.
- PERKINS, D. H. *Introduction to High Energy Physics*. 4. ed. Cambridge: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2000. ISBN 0521621968.
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. 1. ed. Florida: CRC Press, 2018. ISBN 9780201503975.
- SEKINE, A.; NOMURA, K. Axion electrodynamics in topological materials. *Journal of Applied Physics*, AIP Publishing, v. 129, n. 14, 2021. ISSN 1089-7550. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1063/5.0038804>>.
- SIKIVIE, P. Experimental tests of the "invisible"axion. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 51, p. 1415–1417, 1983. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.51.1415>>.
- TONG, D. *Lectures on Gauge Theory: Anomalies*. 2018. Disponível em: <<https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gaugetheory.html>>. Acesso em: 2023-09-16.
- TONG, D. *Lectures on Gauge Theory: Topics in electromagnetism*. 2018. Disponível em: <<https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gaugetheory.html>>. Acesso em: 2023-09-16.
- WEINBERG, S. A new light boson? *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 40, p. 223–226, 1978. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.40.223>>.

WILCZEK, F. Problem of strong p and t invariance in the presence of instantons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 40, p. 279–282, 1978. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.40.279>>.

WORKMAN, R. L. et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, v. 2022, p. 083C01, 2022.

APÊNDICE A – CAMPOS CLÁSSICOS RELATIVÍSTICOS

A.1 TRANSIÇÃO PARA O CONTÍNUO

Diferentemente da formulação lagrangiana com coordenadas generalizadas $q_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, que trata de sistemas discretos, a formulação lagrangiana para campos utiliza funções que variam continuamente no espaço-tempo. Para ilustrar a necessidade dessa nova formulação, vamos considerar o sistema infinito (Fig.4) de massas m acopladas por molas de comprimento a , constante elástica k e sujeitas a deslocamentos φ_i em relação a posição de repouso da massa, onde i é o índice que localiza as massas nesse sistema, que se estende ao longo do eixo \hat{x} .

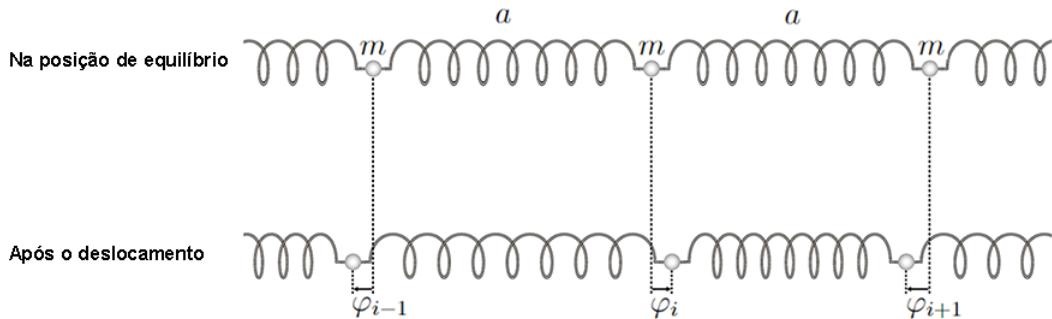


Figura 4 – sistema massa-mola infinito (GOLDSTEIN et al., 2002)

A energia cinética e a energia potencial desse sistema são, respectivamente,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m \left(\frac{d\varphi_i}{dt} \right)^2, \quad V = \frac{1}{2} \sum_i k(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 \quad (\text{A.1.1})$$

Logo, o lagrangiano é

$$L = \frac{1}{2} \sum_i \left[m \left(\frac{d\varphi_i}{dt} \right)^2 - k(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 \right] \quad (\text{A.1.2})$$

multiplicando esse lagrangiano por $\frac{a}{a}$,

$$L = \frac{1}{2}a \sum_i \left[\frac{m}{a} \left(\frac{d\varphi_i}{dt} \right)^2 - ka \left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a} \right)^2 \right] = \sum_i aL_i. \quad (\text{A.1.3})$$

Da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d\varphi_i}{dt} \right)} \right] = 0, \quad (\text{A.1.4})$$

temos

$$\frac{m}{a} \frac{d^2\varphi_i}{dt^2} - ka \left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a^2} \right) + ka \left(\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{a^2} \right) = 0. \quad (\text{A.1.5})$$

No limite onde $a \rightarrow 0$, as massa ficam infinitesimalmente próximas e faz mais sentido indexá-las com uma variável contínua do que uma discreta. Por conveniência, usarei a variável x , já que essas massas estão dispostas ao longo do eixo \hat{x} . Sob esse limite, $\frac{m}{a} = \mu$ passa a ser a massa por unidade de comprimento do sistema e ka , considerando que as molas obedecem a lei de Hooke, pode ser entendido como o módulo de Young Y que descreve a tensão elástica nesse meio contínuo. Assim,

$$\mu \frac{d^2\varphi(x)}{dt^2} - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{Y}{a} \left[\left(\frac{\varphi(x+a) - \varphi(x)}{a} \right) - \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(x-a)}{a} \right) \right] = 0 \quad (\text{A.1.6})$$

Os termos em parênteses são derivadas de φ em relação a x

$$\mu \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{Y}{a} \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_x - \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{x-a} \right] = 0 \quad (\text{A.1.7})$$

e o limite restante, a sua segunda derivada. Logo,

$$\mu \frac{d^2\varphi}{dt^2} - Y \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \quad (\text{A.1.8})$$

é a equação de movimento para esse sistema, a equação de onda. Voltando ao lagrangiano A.1.3 e aplicando o mesmo limite onde $a \rightarrow 0$, o somatório passa a

ser uma integral,

$$L = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0} \int a \left\{ \mu \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - Y \left[\frac{\varphi(x+a) - \varphi(x)}{a} \right]^2 \right\}. \quad (\text{A.1.9})$$

a pode ser escrito como dx ,

$$L = \int dx \frac{1}{2} \left[\mu \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - Y \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right] \quad (\text{A.1.10})$$

$$L = \int dx \mathcal{L} \left(\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\varphi}{dx} \right) \quad (\text{A.1.11})$$

Podemos entender \mathcal{L} como uma densidade do lagrangiano L . Com isso a ação é dada por,

$$S = \int dt L = \int dt \int dx \mathcal{L}, \quad (\text{A.1.12})$$

$$S = \iint_{-\infty}^{\infty} dt dx \mathcal{L} \left(\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\varphi}{dx} \right). \quad (\text{A.1.13})$$

Seguindo o Princípio de Hamilton, a minimização da ação é feita de maneira similar ao caso discreto,

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \iint_{-\infty}^{\infty} dt dx \delta \mathcal{L} \left(\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\varphi}{dx} \right), \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} dt dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{d\varphi}{dt})} \delta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{d\varphi}{dx})} \delta \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.1.14})$$

Como as variáveis são independentes, a ordem com que as derivadas e integrais são realizadas é arbitrária. Sendo assim,

$$0 = \delta S = \iint_{-\infty}^{\infty} dt dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{d\varphi}{dt})} \frac{d}{dt} (\delta \varphi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{d\varphi}{dx})} \frac{d}{dx} (\delta \varphi) \right]. \quad (\text{A.1.15})$$

Usando a regra do produto, o primeiro termo pode ser reescrito como,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{d\varphi}{dt})} \frac{d}{dt} (\delta \varphi) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{d\varphi}{dt})} (\delta \varphi) \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{d\varphi}{dt})} \right] (\delta \varphi) \quad (\text{A.1.16})$$

e o segundo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{d\varphi}{dx})} \frac{d}{dx} (\delta \varphi) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{d\varphi}{dx})} (\delta \varphi) \right] - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{d\varphi}{dx})} \right] (\delta \varphi). \quad (\text{A.1.17})$$

Substituindo na ação e organizando os termos, ficamos com três integrais,

$$\begin{aligned}\delta S = & \int dx \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{d\varphi}{dt})} (\delta\varphi) \right] \right\} + \\ & + \int dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{d\varphi}{dx})} (\delta\varphi) \right] \right\} - \\ & - \iint_{-\infty}^{\infty} dt dx \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{d\varphi}{dt})} \right] + \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{d\varphi}{dx})} \right] \right\} (\delta\varphi) = 0.\end{aligned}\quad (\text{A.1.18})$$

Pela condição de extremos fixos, $\delta\varphi$ é zero quando avaliado nos limites de integração. Logo, a primeira e a segunda integral também são zero. Da terceira integral, temos as equações de Euler-Lagrange para esse sistema,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{d\varphi}{dt})} \right] + \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{d\varphi}{dx})} \right] = 0 \quad (\text{A.1.19})$$

Da qual obtemos a seguinte equação de movimento

$$\mu \frac{d^2\varphi}{dt^2} - Y \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0. \quad (\text{A.1.20})$$

Como esperado, está é exatamente a solução que encontramos a partir da equação A.1.5, depois de levá-la para o limite contínuo. Outro fator a se notar é que φ é a coordenada generalizada e a coordenada x atua apenas como um índice. Se o sistema se estendesse nas direções \hat{y} e \hat{z} , as coordenadas y e z também atuariam como índices e todas seriam independentes entre si, o que veremos na generalização a seguir.

A.2 EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE PARA CAMPOS

Seja $\varphi_n(x^\mu)$ um campo que varia com as componentes do quadrivetor posição x^μ , com $n = 1, \dots, N \in \mathbb{N}$ e $\mu = 0, 1, 2, 3$.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\varphi_n(x^\mu), \partial_\mu \varphi_n(x^\mu)]. \quad (\text{A.2.1})$$

Com isso o Lagrangiano fica

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \mathcal{L}[\varphi_n(x^\mu), \partial_\mu \varphi_n(x^\mu)], \quad (\text{A.2.2})$$

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \mathcal{L}. \quad (\text{A.2.3})$$

e o funcional da ação

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{L}. \quad (\text{A.2.4})$$

Aqui, o processo de minimização da ação segue os passos da seção anterior ($\varphi_n(x^\mu) = \varphi$ para clareza visual),

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \delta \mathcal{L}[\varphi, \partial_\mu \varphi] = 0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

utilizando regra do produto, o segundo termo pode ser reescrito como

$$\delta S = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \delta \varphi \right\} = 0, \quad (\text{A.2.6})$$

separando as duas integrais

$$\delta S = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \right\} \delta \varphi + \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) \right] = 0. \quad (\text{A.2.7})$$

Sob a condição de extremos fixos, a segunda integral é igual a zero. Da primeira integral obtemos a equação de Euler-Lagrange para campos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_n} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_n)} \right] = 0. \quad (\text{A.2.8})$$

Resultado bem similar ao da equação A.1.19, a diferença aqui é que esta densidade de lagrangiano depende explicitamente de φ_n , fazendo com que o primeiro termo não seja zero. Agora, utilizando a equação A.2.8 e os lagrangianos¹

¹ A menos que a distinção seja necessária, chamarei a *densidade de lagrangiano* apenas de *lagrangiano*.

oferecidos pela literatura (GRIFFITHS, 2008), podemos obter as equações dos campos de spin 0, 1 e $\frac{1}{2}$.

A.3 CAMPO ESCALAR (SPIN-0)

Seja \mathcal{L}_0 o lagrangiano para um campo escalar livre massivo sem carga

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (\text{A.3.1})$$

onde ϕ é um campo escalar real e m é a massa desse campo. O primeiro termo, chamado de termo cinético. Embora aceita, a terminologia não é precisa, pois existe um gradiente do campo no termo. Considerando a aproximação massamola que fizemos no início desse apêndice, uma variação cinética em ponto do campo resultaria em uma variação potencial elástica na vizinhança desse ponto. Então, também podemos entendê-lo com um termo de dinâmica do campo. Esse termo é quadrático em derivadas do campo e pode ser reescrito em função da matriz $\eta^{\mu\nu}$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (\text{A.3.2})$$

Agora, basta substituir \mathcal{L}_0 na equação A.2.8 para obter as equações de campo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \phi} = m^2 \phi \quad (\text{A.3.3})$$

e

$$\begin{aligned} \partial_\kappa \left[\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\kappa \phi)} \right] &= \frac{\partial_\kappa}{2} \left(\frac{\partial_\mu \phi}{\partial_\kappa \phi} \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi \frac{\partial^\mu \phi}{\partial_\kappa \phi} \right) = \frac{\partial_\kappa}{2} \left(\frac{\partial_\mu \phi}{\partial_\kappa \phi} \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi \eta^{\mu\nu} \frac{\partial_\nu \phi}{\partial_\kappa \phi} \right) \\ &= \frac{\partial_\kappa}{2} (\delta_\mu^\kappa \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi \eta^{\mu\nu} \delta_\nu^\kappa) = \frac{\partial_\kappa}{2} (\partial^\kappa \phi + \partial_\mu \phi \eta^{\mu\kappa}) = \partial_\kappa \partial^\kappa \phi \end{aligned} \quad (\text{A.3.4})$$

Trocando κ por μ , ficamos com

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = 0, \quad (\text{A.3.5})$$

que nada mais é do que a famosa equação de Klein-Gordon, em homenagem a Oskar Klein (1894-1977) e Walter Gordon (1893-1940). Com alguns ajustes e considerando os operadores energia e momento da mecânica quântica, é possível notar a semelhança com outra famosa equação $E^2 = p^2 + m^2$, fato que não é mera coincidência (GRIFFITHS, 2008). Embora a equação de Klein-Gordon tenha sido inicialmente proposta para descrever elétrons relativísticos, ela só descreve partículas de spin-0, i.e., partículas escalares e pseudo-escalares. As soluções de onda plana para essa equação são,

$$\phi^\pm = ae^{\mp ip_\mu x^\mu} \quad (\text{A.3.6})$$

onde a amplitude a é uma constante real. Para um campo ϕ complexo, o lagrangiano fica alterado em

$$\mathcal{L}_0 = \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi + m^2 \bar{\phi} \phi, \quad (\text{A.3.7})$$

A equação de movimento para esse lagrangiano continua sendo A.3.5.

A.4 CAMPO VETORIAL (SPIN-1)

Seja \mathcal{L}_γ o lagrangiano para uma campo vetorial livre e sem massa

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (\text{A.4.1})$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (\text{A.4.2})$$

onde o quadrivetor A_μ é o campo vetorial. Existem algumas manipulações de índices que precisam ser feitas no lagrangiano para que possamos obter as equações de campo. Abrindo o produto entre os tensores $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, tem-se

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{16\pi} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu), \quad (\text{A.4.3})$$

uma vez que esses índices são mudos (não são livres nesse somatório), podemos trocar $\nu \leftrightarrow \mu$. Fazendo isso no terceiro e no quarto termo,

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{8\pi}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu). \quad (\text{A.4.4})$$

Para evitar uma confusão com índices iguais nos passos seguintes, farei algumas modificações na equação A.2.8

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\gamma}{\partial A_\rho} - \partial_\rho \left[\frac{\partial \mathcal{L}_\gamma}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} \right] = 0, \quad \rho, \sigma = 0, \dots, 3. \quad (\text{A.4.5})$$

Como \mathcal{L}_γ não depende explicitamente de A_μ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\gamma}{\partial A_\rho} = 0. \quad (\text{A.4.6})$$

Logo,

$$\partial_\rho \left[\frac{\partial \mathcal{L}_\gamma}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} \right] = \frac{1}{8\pi} \partial_\rho \left[\frac{\partial(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu)}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} \right] = 0. \quad (\text{A.4.7})$$

Resolvendo para o primeiro termo:

$$\begin{aligned} \partial_\rho \left[\frac{\partial(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu)}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} \right] &= \partial_\rho \left[\frac{\partial(\partial_\mu A_\nu)}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu A_\nu \frac{\partial(\partial^\mu A^\nu)}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} \right], \\ &= \partial_\rho \left[\frac{\partial(\partial_\mu A_\nu)}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu A_\nu \eta^{\mu\kappa} \eta^{\nu\lambda} \frac{\partial(\partial_\kappa A_\lambda)}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} \right], \\ &= \partial_\rho [\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu A_\nu \eta^{\mu\kappa} \eta^{\nu\lambda} \delta_\kappa^\rho \delta_\lambda^\sigma], \\ &= \partial_\rho [\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma \partial^\mu A^\nu + \partial^\kappa A^\lambda \delta_\kappa^\rho \delta_\lambda^\sigma], \\ &= 2\partial_\rho (\partial^\rho A^\sigma). \end{aligned} \quad (\text{A.4.8})$$

No segundo termo o processo é o mesmo, exceto que os índices da parte contravariante ficam trocados,

$$\partial_\rho \left[\frac{\partial(\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu)}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} \right] = 2\partial_\rho (\partial^\sigma A^\rho). \quad (\text{A.4.9})$$

Substituindo esses termos na equação A.4.7, temos

$$\partial_\rho \left[\frac{\partial \mathcal{L}_\gamma}{\partial (\partial_\rho A_\sigma)} \right] = \frac{1}{4\pi} \partial_\rho (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) \quad (\text{A.4.10})$$

Reescrevendo com a indexação mais usual,

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.4.11})$$

Essa equação só é válida para partículas de spin 1 sem massa, como é o caso dos fótons. Nesse cenário, o tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$ é dado por

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4.12})$$

e a equação retorna as equações de Maxwell para campos longe da fonte,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \dot{\mathbf{E}}. \quad (\text{A.4.13})$$

E, pela identidade de Bianchi,

$$\partial_\rho F^{\mu\nu} + \partial_\mu F^{\nu\rho} + \partial_\nu F^{\rho\mu} = 0, \quad (\text{A.4.14})$$

obtemos as demais equações de Maxwell,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}. \quad (\text{A.4.15})$$

A.5 CAMPO SPINOR (SPIN-1/2)

Seja \mathcal{L}_D o lagrangiano para um campo spinor livre massivo

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \quad (\text{A.5.1})$$

onde o spinor ψ é uma matriz coluna com quatro componentes complexas e o spinor adjunto $\bar{\psi} = -i\gamma^0\psi^\dagger$. Embora o spinor tenha oito variáveis independentes, as equações de campo resultam em uma combinação linear de ψ . O mesmo vale para $\bar{\psi}$. Então, vamos escrever a equação A.2.8 em função dos spinores. Para $\bar{\psi}$, tem-se

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \bar{\psi}} = i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi, \quad \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] = 0, \quad (\text{A.5.2})$$

Portanto,

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0. \quad (\text{A.5.3})$$

E, para ψ

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \psi} = -m\bar{\psi}, \quad \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] = i\bar{\psi}\gamma^\mu. \quad (\text{A.5.4})$$

Resultando em

$$i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0. \quad (\text{A.5.5})$$

A.5.3 e A.5.5 são, respectivamente, a equação de Dirac e sua forma adjunta. Esta é equação responsável por descrever os fermions, partículas de spin $\frac{1}{2}$. E foram as suas soluções que permitiram que Paul Dirac previsse a existência das antipartículas. As soluções de onda plana para as partículas são,

$$\psi = ae^{-ip_\mu x^\mu} u^{(1,2)}, \quad \text{com } u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix}, \quad \text{e } u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5.6})$$

e, para as antipartículas,

$$\psi = ae^{ip_\mu x^\mu} v^{(1,2)}, \quad \text{com } v^{(1)} = N \begin{pmatrix} \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e } v^{(2)} = -N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5.7})$$

onde $N = \sqrt{E + m}$ e $p_{\pm} = p_x \pm ip_y$.

APÊNDICE B – TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE

Seja a matriz 1×1 unitária U um elemento do grupo $U(1)$ sob a forma

$$U = e^{iq\alpha(x^\mu)} \quad (\text{B.0.1})$$

onde q é uma constante real e α é uma função de x^μ . Vamos aplicar essa transformação aos campos dos lagrangianos estudados no apêndice anterior, começando pelo caso onde α é constante.

Para o lagrangiano de Klein-Gordon A.3.7 com ϕ complexo

$$\phi' = e^{iq\alpha} \phi = U\phi, \quad \bar{\phi}' = \bar{\phi}e^{-iq\alpha} = \bar{\phi}U^\dagger \quad (\text{B.0.2})$$

E o lagrangiano $\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}'_0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0 &= \partial_\mu \bar{\phi}' \partial^\mu \phi' + m^2 \bar{\phi}' \phi' \\ &= \partial_\mu (\bar{\phi} U^\dagger) \partial^\mu (U \phi') + m^2 \bar{\phi} U^\dagger U \phi. \end{aligned} \quad (\text{B.0.3})$$

Por serem constantes, U e U^\dagger podem ser retirados da derivada

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0 &= \partial_\mu \bar{\phi} U^\dagger U \partial^\mu \phi' + m^2 \bar{\phi} U^\dagger U \phi \\ &= \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi + m^2 \bar{\phi} \phi \\ &= \mathcal{L}_0. \end{aligned} \quad (\text{B.0.4})$$

Vemos então que o lagrangiano de Klein-Grodon é invariante sob essa transformação. O mesmo acontece com o lagrangiano de Dirac

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_D &= i\bar{\psi}' \gamma^\mu \partial_\mu \psi' - m\bar{\psi}' \psi', \\ &= i\bar{\psi} U^\dagger \gamma^\mu \partial_\mu U \psi - m\bar{\psi} U^\dagger U \psi, \\ &= i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi, \\ &= \mathcal{L}_D \end{aligned} \quad (\text{B.0.5})$$

Em ambos os casos dizemos que os lagrangianos apresentam simetria global, pois os lagrangianos permaneceram invariantes após as transformações. Esse resultado era esperado, uma vez que não houve alteração na magnitude dos componentes do lagrangiano, apenas uma rotação sob um ângulo fixo.

Agora faremos uma transformação de gauge local. Isto significa que podemos ter rotações diferentes para cada ponto x^μ . Em essência, o processo é o mesmo que no caso global, mas $\alpha(x^\mu)$ não é mais uma constante.

Começando por \mathcal{L}_γ , a transformação de gauge é feita no quadrivector A_μ ,

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x^\mu). \quad (\text{B.0.6})$$

Reescrevendo \mathcal{L}_γ (para clareza visual $\alpha(x^\mu) = \alpha$),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_\gamma &= -\frac{1}{16\pi} [\partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu \alpha) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu \alpha)][\partial^\mu(A^\nu + \partial^\nu \alpha) - \partial^\nu(A^\mu + \partial^\mu \alpha)] \\ &= -\frac{1}{16\pi} [F_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \alpha - \partial_\nu \partial_\mu \alpha][F^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu \alpha - \partial^\nu \partial^\mu \alpha]. \end{aligned} \quad (\text{B.0.7})$$

Onde assumimos a analiticidade de α e que os operadores derivada são simétricos: $\partial_\mu \partial_\nu \alpha = \partial_\nu \partial_\mu \alpha$. O mesmo vale para a parte contravariante. Logo, os termos em função de α somam zero e \mathcal{L}_γ permanece invariante sob transformações locais de gauge,

$$\mathcal{L}'_\gamma = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (\text{B.0.8})$$

Para o lagrangiano do campo spinor, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_D &= i\bar{\psi}' \gamma^\mu \partial_\mu \psi' + m\bar{\psi}' \psi' \\ &= i\bar{\psi} e^{-iq\alpha(x^\mu)} \gamma^\mu \partial_\mu [e^{iq\alpha(x^\mu)} \psi] + m\bar{\psi} \psi. \end{aligned} \quad (\text{B.0.9})$$

O termo cinético se modifica, enquanto o termo $\bar{\psi}\psi$ fica inalterado. Teremos

$$\partial_\mu [e^{iq\alpha(x^\mu)} \psi] = iq\partial_\mu \alpha(x^\mu) \psi + e^{iq\alpha(x^\mu)} \partial_\mu \psi. \quad (\text{B.0.10})$$

Este gradiente $\partial_\mu \alpha$, que se acopla aos spinores, faz com que o lagrangiano não seja invariante localmente,

$$\mathcal{L}'_D = \mathcal{L}_D - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x^\mu). \quad (\text{B.0.11})$$

Para que o lagrangiano do campo spinor seja localmente invariante é preciso que ele contenha um elemento, que sob uma transformação de gauge, se anule com o gradiente. A partir da equação B.0.6, podemos escrever o gradiente como

$$\partial_\mu\alpha = A'_\mu - A_\mu.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(A'_\mu - A_\mu) &= \mathcal{L}'_D, \\ \mathcal{L}_D + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu &= \mathcal{L}'_D + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A'_\mu. \end{aligned} \quad (\text{B.0.12})$$

Do lado direito da equação estão os termos sob a transformação local de gauge.

Abrindo esses termos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu &= \mathcal{L}_D - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x^\mu) + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi[A_\mu + \partial_\mu\alpha(x^\mu)], \\ \mathcal{L}_D + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu &= \mathcal{L}_D + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \end{aligned} \quad (\text{B.0.13})$$

Encontramos o elemento que deixa o lagrangiano invariante, o campo A_μ acoplado ao termo $q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. Podemos entender A_μ como um campo que faz a conexão entre rotações independentes $\alpha(x^\mu)$. Só que esse campo é estático, precisamos adicionar o termo cinético para esse novo campo vetorial, que nada mais é do que \mathcal{L}_γ (que como já vimos também é invariante localmente), então

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + \mathcal{L}_\gamma. \quad (\text{B.0.14})$$

Acontece que este campo vetorial de gauge é exatamente o potencial eletromagnético. Este é um resultado notável: ao impor que o lagrangiano de Dirac deve

ser invariante sob transformações locais do grupo $U(1)$, construímos um lagrangiano que descreve a interação entre os férmions carregados eletricamente e os fótons. Ou seja, \mathcal{L} é o lagrangiano da eletrodinâmica quântica

$$\mathcal{L}_{QED} = [i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi] + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (\text{B.0.15})$$

Esse é o processo que dá origem as interações fundamentais do modelo padrão. No caso da interação forte, por exemplo, o lagrangiano que descreve a interação é invariante sob transformações locais do grupo $SU(3)$.

\mathcal{L}_{QED} também pode ser escrito como

$$\mathcal{L}_{QED} = [i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi] - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (\text{B.0.16})$$

onde $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$ é o operador derivada covariante. E, pela definição, o comutador entre D_μ e D_ν retorna os tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ que compõe o termo cinético

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= (\partial_\mu - iqA_\mu)(\partial_\nu - iqA_\nu) - (\partial_\nu - iqA_\nu)(\partial_\mu - iqA_\mu), \\ &= -iq\partial_\mu A_\nu + iq\partial_\nu A_\mu, \\ &= -iqF_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.0.17})$$

A situação é bastante parecida para \mathcal{L}_0 . Localmente também surgem gradientes de α acoplados a ϕ , deixando o lagrangiano invariante. A solução aqui é a mesma do caso anterior, resultando em

$$\mathcal{L} = D_\mu\bar{\phi}D^\mu\phi + m^2\bar{\phi}\phi - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (\text{B.0.18})$$

Chamada de eletrodinâmica quântica escalar, descreve a interação entre partículas escalares carregadas e fótons.

APÊNDICE C – GRUPO SU(3) E BASE DE GELL-MANN

O grupo das matrizes unitárias 3×3 de determinante 1 é o grupo $SU(3)$.

Sendo imprescindível para o estudo da QCD, neste apêndice serão obtidas as matrizes geradoras do grupo, a base de Gell-Mann e algumas das suas representações.

Seja q uma matriz coluna complexa 3×1 , com $q^\dagger = (q^*)^T$ e:

$$q^\dagger q = |q|^2 = C \quad (\text{C.0.1})$$

onde $C \in \mathbb{R}$. Realiza-se uma transformação do tipo:

$$q \rightarrow q' = Rq \quad (\text{C.0.2})$$

Nessa transformação, R é uma matriz complexa 3×3 . Assim:

$$\begin{aligned} (q')^\dagger q' &= |q'|^2 \\ &= q^\dagger R^\dagger R q \end{aligned} \quad (\text{C.0.3})$$

Para que $|q'|^2 = |q|^2$, $R^\dagger R = I$, ou seja, $R^\dagger = R^{-1}$. Isso implica que R é uma matriz unitária, podendo ser reescrita como:

$$R = e^{iX} \quad (\text{C.0.4})$$

onde X é uma matriz hermitiana 3×3 , pois:

$$R^\dagger R = e^{-iX^\dagger} e^{iX} = e^{i(X-X^\dagger)} = I. \quad (\text{C.0.5})$$

O $\det(R) = 1$ quando $\text{Tr}(X) = 0$. Essa relação fica clara quando diagonalizamos a matriz X ,

$$X = VDV^{-1}, \quad (\text{C.0.6})$$

onde D é uma matriz diagonal. Assim,

$$\begin{aligned} \det(R) &= \det(e^{iX}) = \det(e^{iV D V^{-1}}) = \det\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{V(iD)^n V^{-1}}{n!}\right] = \\ &= \det(V) \det(e^{iD}) \det(V^{-1}) = \det(e^{iD}) = \prod_{j=1}^3 e^{iD_{jj}} = e^{i \text{Tr}(D)} = 1. \end{aligned} \quad (\text{C.0.7})$$

Portanto, $\text{Tr}(D) = 0 \Rightarrow \text{Tr}(X) = 0$. Sob essas condições,

$$X = \begin{pmatrix} \epsilon^1 & \epsilon^2 + i\epsilon^3 & \epsilon^4 + i\epsilon^5 \\ \epsilon^2 - i\epsilon^3 & \epsilon^6 & \epsilon^7 + i\epsilon^8 \\ \epsilon^4 - i\epsilon^5 & \epsilon^7 - i\epsilon^8 & -\epsilon^1 - \epsilon^6 \end{pmatrix} = X^\dagger, \quad (\text{C.0.8})$$

com oito parâmetros reais independentes $\epsilon^a, a = 1, \dots, 8$. Reescrevendo X como a combinação linear $\epsilon^a \chi_a$ é possível observar que $X = 0 \leftrightarrow \epsilon^a = 0$, i.e., as matrizes χ_a constituem uma base para o conjunto de matrizes hermitianas 3×3 de traço nulo. Não só isso, as condições para a matriz X são as mesmas das matrizes do grupo $SU(3)$, pois o número de parâmetros livres é dado por $(n^2 - 1)$ e com oito parâmetros livres, $n = 3$. Também é possível observar que qualquer combinação linear dessas matrizes resulta em uma matriz hermitiana de traço nulo. Utilizando essas propriedades, vamos compor a base de Gell-

Mann fazendo as seguintes alterações:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 = \chi_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = -\chi_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
 \lambda_4 = \chi_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_5 = -\chi_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
 \lambda_6 = \chi_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_7 = -\chi_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \\
 \lambda_3 = \chi_1 - \chi_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_8 = \frac{\chi_1 + \chi_6}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{C.0.9}$$

A matriz λ_8 fica com essa fator de normalização $\frac{1}{\sqrt{3}}$ para atender a propriedade $\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$, $a, b = 1, \dots, 8$. As matrizes de Gell-Mann obedecem a lei de composição

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = if_{abc} \frac{\lambda_c}{2}$$

ou

$$[t_a, t_b] = if_{abc} t_c, \quad t_a = \frac{\lambda_a}{2},$$
(C.0.10)

a constante de estrutura f_{abc} é um tensor totalmente antissimétrico que assume os valores

$$\begin{aligned}
 f_{123} &= 1, \\
 f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} &= \frac{1}{2}, \\
 f_{156} = f_{367} &= -\frac{1}{2}, \\
 f_{458} = f_{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned} \tag{C.0.11}$$

Todas as outras combinações comutam. Na convenção das matrizes t_a ,

$$\text{Tr}(t_a t_b) = \frac{\delta_{ab}}{2}. \quad (\text{C.0.12})$$

A representação obtida com a matriz t_a é chamada de representação fundamental. Outra representação é a antifundamental

$$[\bar{t}_a, \bar{t}_b] = i f_{abc} \bar{t}_c, \bar{t}_a = -{t_a}^*. \quad (\text{C.0.13})$$

Na verdade, existem infinitas representações para o grupo $SU(3)$, inclusive com matrizes que não são 3×3 , uma vez que elas atendam a lei de composição C.0.10. Uma dessas representações é a adjunta, formada por oito matrizes I_a , 8×8 , dadas pela relação abaixo

$$I_a = (-i f_{abc})_{bc}. \quad (\text{C.0.14})$$

Logo vemos que essas matrizes possuem traço nulo. Por exemplo, para a matriz I_1 , usando os valores em C.0.11, temos