

UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFORMAT

DISSERTAÇÃO

FRACTAIS: MOTIVANDO A MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

FÁBIO MÉDICE JÚNIOR



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

FRACTAIS: MOTIVANDO A MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

FÁBIO MÉDICE JÚNIOR

Sob a Orientação do Professor
Duilio Tadeu da Conceição Junior

Dissertação submetida como requisição parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Seropédica, RJ
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

FÁBIO MÉDICE JÚNIOR

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, com ênfase em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 30/8/2014

Duilio Tadeu da Conceição Jr
Prof. Dr. Duilio Tadeu da Conceição Junior (Orientador-UFRRJ)

Douglas Monsôres de Melo Jr
Prof. Dr. Douglas Monsôres de Melo Santos (UFRRJ)

Gladson O. Antunes
Prof. Dr. Gladson Octaviano Antunes (UNIRIO)

Dedico este trabalho a minha esposa Juliana Augusta e minha filha Luiza que apoaram meus esforços, suportaram minhas ausências e vibram a cada conquista.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a minha esposa e à minha filha, pela paciência e apoio durante todo tempo que me afastei na realização desse estudo.

Aos meus professores, mestres da vida e da academia, pelos, muito mais que ensinamentos acadêmicos, seus exemplos de vida e de profissionalismo.

Ao professor, meu orientador, Duilio por toda sua dedicação, apoio, orientação, contribuição e paciência durante toda a construção deste trabalho.

Aos professores, Douglas Monsores e Gladson Octaviano, que aceitaram o convite para participação da banca examinadora.

Aos coordenadores do PROFMAT, Orlando e Aline pela dedicação a esse programa.

A todos os professores que fazem parte da equipe do PROFMAT, muito do que vocês me ensinaram faz parte desse trabalho e da minha prática em sala.

Aos novos amigos que fizeram parte deste processo.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

O interesse dos alunos pela matemática é corriqueiramente baixo, e isto muito se deve à falta de estímulos concretos e aplicações no cotidiano do aluno. Os fractais e sua geometria fazem vislumbrar aplicações da matemática raramente apresentadas aos nossos alunos. Neste trabalho apresentamos os fractais construídos a partir de figuras geométricas simples como retas, triângulos, cubos, etc., e de processos iterativos simples realizando manipulações de figuras geométricas das figuras geométricas. Apresentamos um estudo do perímetro e área e sua relação com Progressões Geométricas. O estudo da dimensão de alguns fractais é também abordado através de uma forma construtiva e simples, onde é possível também utilizar os logaritmos. Veremos também que é possível construir alguns fractais com papel e tesoura, através de recortes e dobraduras, instigando a curiosidade nos alunos pois torna a matemática construtiva e concreta, saindo um pouco do abstratismo.

Palavras-chave : Ensino Médio, Geometria, Fractais.

ABSTRACT

The interest of our students for mathematics is routinely low, and this really is due to the absence of specific stimuli and application in everyday student. Fractals and their geometry is rarely glimpse of mathematical applications presented to our students. We present the fractals built from simple geometric figures such as straight lines, triangles, cubes, etc., and simple iterative processes, performing geometric manipulation of these figures. We present a study of the perimeter and area, and its relationship with Geometric Progressions. The study of some fractal dimension is also addressed through a constructive and simple way, where you can also use logarithms. We will also see that it is possible to build some fractals with paper, scissors, through cuts and folds, instigating curiosity in students as it makes the mathematics more constructive and concrete.

Keywords: Secondary School, Geometry, Fractals.

Lista de Figuras

1.1	Curva de Koch e sua iterações	16
1.2	Antena com formato fractal	16
1.3	Curva de Peano e suas iterações	17
1.4	Curva de Hilbert e suas iterações	18
1.5	Aplicação da Curva de Hilbert [10]	18
1.6	Curva do Dragão de Harter Heighway e suas iterações	19
1.7	Conjunto de Cantor	19
1.8	Triângulo de Sierpinski e suas iterações	20
1.9	Tapete de Sierpinski e suas iterações	20
1.10	Esponja de Menger e suas iterações 0, 1, 2, 3 e 4, respectivamente	21
1.11	Pirâmide de Sierpinski	21
1.12	Árvore Pitagórica formada por triângulos Retângulos Isósceles	23
1.13	Árvore Pitagórica formada por triângulos retângulos com catetos de tamanhos diferentes. Fonte: http://3.bp.blogspot.com	23
2.1	Fractal Tipo Dürer em formato pentagonal	24
2.2	Gráfico - Função Weierstrass	25
2.3	Floco de Neve de Koch e iterações sucessivas para sua construção	25
2.4	Georg Cantor [10]	26
2.5	Fractais de Julia com diversos parâmetros complexos, Fonte [10]	27
2.6	Waclaw Sierpinski [10]	28
2.7	Benoit Mandelbrot [10]	29
2.8	Fractal Mandelbrot em [10] e ampliações sucessivas	32
4.1	Passos da construção do Conjunto de Cantor por Recortes	41
4.2	Passos da construção do Triângulo de Sierpinski por Recortes	42
4.3	Passos da construção da Esponja de Menger por Recortes	43

4.4	Paisagem criada em Computação Gráfica	44
4.5	Cálculo da área do Flocos de Neve de Koch	50
A.1	Conexões com a Matemática, Volume 1, p.365	54
A.2	Contexto e Aplicações, Volume 3, p.100	55
A.3	Contexto e Aplicações, Volume 3, p.101	56
A.4	Contexto e Aplicações, Volume 3, p.197	57
A.5	Matemática Paiva, Volume 1, p.239	57
A.6	Matemática Ciências e Aplicações, Volume 1, p.271	58
A.7	Matemática Ciências e Aplicações, Volume 1, p.272	58
A.8	Matemática Ensino Médio, Volume 2, p.245	59
A.9	Matemática Ensino Médio, Volume 2, p.247	59
A.10	Matemática Ensino Médio, Volume 2, p.248	60
A.11	Matemática Ensino Médio, Volume 2, p.249	61
A.12	Matemática Ensino Médio, Volume 3, p.73	62
A.13	Matemática Ensino Médio, Volume 3, p.141	62
A.14	Matemática Ensino Médio, Volume 3, p.142	63
A.15	Matemática Ensino Médio, Volume 3, p.169	64
A.16	Novo Olhar Matemática, Volume 1, p.55	64
A.17	Novo Olhar Matemática, Volume 1, p.169	65
A.18	Novo Olhar Matemática, Volume 1, p.185	65
A.19	Novo Olhar Matemática, Volume 3, p.252	65

Lista de Tabelas

4.1	Dimensões dos Principais Fractais	40
4.2	Triângulo de Sierpinski - Área e Perímetro	49

Sumário

Introdução	12
1 Principais Fractais e suas Aplicações	15
1.1 Fractais pela Fronteira	15
1.1.1 Curva de Koch	16
1.1.2 Curva de Peano	16
1.1.3 Curva Hilbert	17
1.1.4 Curva do Dragão de Harter-Heighway	17
1.2 Fractais por Remoção	18
1.2.1 Conjunto de Cantor	19
1.2.2 Triângulo de Sierpinski	19
1.2.3 Tapete de Sierpinski	20
1.2.4 Esponja de Menger	20
1.2.5 Pirâmide de Sierpinski	21
1.3 Fractais Tipo Dürer	22
1.4 Fractais Tipo Árvore	22
2 História e Evolução da Geometria Fractal	24
3 Livros Didáticos e Fractais	33
4 Propostas de Atividades	36
4.1 Dimensão Fractal	36
4.1.1 Cálculo e análise da dimensão dos principais fractais	39
4.2 Recortes Fractais	39
4.2.1 O Conjunto de Cantor por Recortes	40
4.2.2 O Triângulo de Sierpinski por Recortes	41

4.2.3	A Esponja de Menger por Recortes	42
4.3	Fractais Naturais	44
4.3.1	Coleta e Exposição dos Fractais Naturais e suas dimensões	45
4.3.2	Atividade: Dimensão Costeira	45
4.4	Área e perímetro de fractais geométricos	46
4.4.1	Atividade: Perímetro e Área do Triângulo de Sierpinski	47
4.4.2	Atividade: Perímetro e Área do Flocos de Neve	49
5	Conclusão	52
A	Livros Analisados	54

Introdução

Durante séculos, os objetos e os conceitos da geometria euclidiana foram considerados aqueles que melhor descreviam o mundo em que vivemos. Os cientistas conceberam uma visão da natureza a partir de conceitos e formas de figuras regulares e diferenciáveis, mas a natureza não é tão regular, note-se por exemplo o brócolis ou o curso de um rio. Nos últimos quarenta anos vêm se desenvolvendo um novo ramo da geometria que modela as irregularidades da natureza, a geometria fractal [2, 7, 10]. Figuras geométricas que no início do século passado eram vistas como “monstros matemáticos”, já que desafiavam as noções comuns de infinito e para as quais não havia uma explicação objetiva, têm hoje um papel notável na interpretação da realidade [7]. Através dos estudos realizados no final do século XIX e início do século XX, foi possível fundamentar esta nova ciência que ampliou a abrangência da geometria e possibilitou ao homem trabalhar com as complexidades da natureza. Difundida pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot, a geometria dos fractais tem atraído interesse científico e educacional devido à sua potencialidade, versatilidade e fascínio oferecido por sua beleza e pelo grande poder de análise dos objetos da natureza. Por isso, seu uso tem ocorrido em diversas áreas da ciência, tecnologia e arte.

A principal proposta desta dissertação é apresentar formas de aplicação dos fractais no ensino médio, de forma a motivar os alunos no estudo da matemática seja apresentando a conexão dos conceitos estudados em sala e os fractais, seja apresentando uma matemática construtiva e concreta como os fractais, ou mesmo em feiras de ciências. Neste trabalho propomos uma abordagem dos conceitos básicos de fractais tendo como público alvo os alunos do ensino médio, mostrando as aplicações dos conceitos aprendidos sobre estes novos objetos matemáticos.

De acordo com Fiorentini e Lorenzanato temos que:

“[...] à medida que surgem novos conhecimentos e novas tecnologias e aplicações da matemática, têm surgido pesquisas sobre como estes poderiam ser ensinados e/ou

aprendidos na escola. Um exemplo disso são os fractais [...]" [6, p.42]

Sempre que nos deparamos com o Fractal de Mandelbrot, notamos a interpretação de uma obra de arte abstrata. Vemos que estas acabam gerando outras formas idênticas, e que o processo pode continuar indefinidamente. Aproveitar desta intrínseca situação é um grande incentivo para a abstração dos alunos, neste caso a matemática é apresentada de forma inovadora e diferente do que já foi visto pelo educando da educação básica. Propomos também introduzir o conceito de fractal aos alunos do ensino médio e analisar o que pode ser aplicado e sua viabilidade. Estudar os principais fractais em conjunto com os alunos de modo a discutir conceitos como: área e perímetro e suas relações com progressões geométricas. Realizar atividades diferenciadas do cotidiano matemático escolar envolvendo fractais, assim criando interesse e busca pela inovação nos alunos. Com estes preceitos procuramos identificar também que conceitos são trabalhados em sala de aula em relação aos fractais, materiais didáticos existentes, literatura sobre aplicações de fractais no ensino médio. (...) *para os fractais, em especial para a geometria fractal, faz-se necessário ao educador conseguir captar o educando com o transparecer de sua própria vibração, e talvez evidenciando o êxtase na complementação na beleza de seus visuais, conduzindo-o ao prazer pelas informações e conhecimentos culturais da vasta variedade de fractais.* [2, p.14]

No Capítulo 1, discutimos alguns fatos históricos do desenvolvimento da geometria fractal. Começamos com os primeiros indícios da geometria fractal finalizando com os conceitos de Benoit Mandelbrot que utilizou-se de descobertas feitas por grandes matemáticos e cunha o termo fractal.

No Capítulo 2, veremos como são feitas as construções dos principais fractais, os passos dessa construções e conhece-los, assim como algumas de suas aplicações.

No Capítulo 3, analisamos sobre os livros didáticos (Conexões com a Matemática, Matemática - Contexto e Aplicações, Matemática - Paiva, Matemática - Ciência e Aplicações, Matemática - Ensino Médio, Novo Olhar - Matemática, Matemática: Ciências, Linguagem e Tecnologia) e como estão sendo expostos e os conceitos da geometria fractal aplicados aos alunos do ensino médio.

No Capítulo 4, apresentamos algumas atividades envolvendo a geometria fractal de forma a integrar a sala de aula sem prejuízos ao caminhar do conteúdo regular planejado. Também serão expostas atividades que desempenham um interesse em aprender nos alunos do Ensino Médio.

CAPÍTULO 1

Principais Fractais e suas Aplicações

Neste capítulo apresentamos os principais fractais e suas construções, além de algumas aplicações. Os fractais foram organizados em categorias de acordo com o tipo de construção ou origem, seguindo a organização feita por Ruy Madsen Barbosa [2]. Consideramos esta organização importante para o aprendizado dos principais fractais pelos alunos do ensino médio.

Utilizaremos os conceitos da dimensão de Hausdorff baseada em conceitos de topologia, definida em 1918 pelo matemático Felix Hausdorff. Este conceito estará presente em atividades aplicadas aos alunos. Estas atividades só têm efeitos acerca de sua dimensão se conhecidos os processos de construção abordados neste capítulo.

Como é inerente ao aluno de ensino médio, este em seus estudos matemáticos, sempre que entra em contato com um novo conteúdo faz-se por associação e proximidade de cognitividade, assim utilizaremos uma organização mais geométrica e construtiva, distribuindo os principais fractais em grupos.

Como nosso objetivo é uma abordagem aos alunos do ensino médio nos fixaremos primeiramente em fractais definidos por sistemas de funções iteradas, que são: fractais pela fronteira, fractais por remoção, fractais tipo Dürer e fractais tipo árvore.

1.1 Fractais pela Fronteira

Fractais pela fronteira são aqueles fractais obtidos a partir da substituição de parte por uma cópia do todo reduzida. Nesse grupo a cada iteração temos uma nova imagem que remete à anterior em algumas regiões. A seguir apresentaremos os principais fractais pela fronteira.

1.1.1 Curva de Koch

A Curva de Koch foi criada por Niels Fabian Helge von Koch (1904) com intuito de definir melhor os conceitos de funções contínuas em todo seu domínio e não diferenciáveis. Esta curva é a precursora de outro fractal de Koch, chamado de Floco de Neve de Koch (Fig. 2.3). Uma das aplicações desta curva é no design no formato de antenas já que possui grande perímetro em uma pequena área.

Para sua construção geométrica consideramos inicialmente um segmento de reta e daí:

- 1) Dividimos o segmento em três partes iguais;
- 2) Retiramos o segmento central e substituímos por um triângulo equilátero excluindo sua base, ficando desse modo 4 segmentos iguais;
- 3) Para realizar mais uma iteração repetimos os passos 1 e 2 para cada um dos segmentos.



Figura 1.1: Curva de Koch e sua iterações

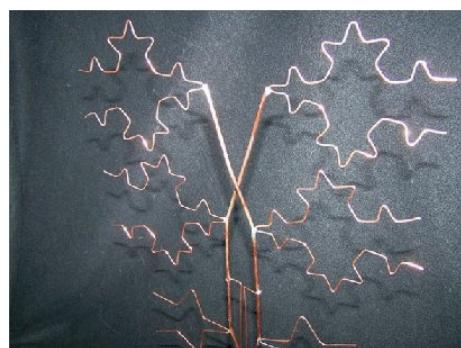


Figura 1.2: Antena com formato fractal

1.1.2 Curva de Peano

Quando em 1890 o matemático Giuseppe Peano (1858-1932) idealizou este fractal (Fig. 1.3) ainda não era utilizado o termo fractal. Em um período posterior quase imediato a Hilbert, Peano construiu este fractal ainda nomeado "monstro" matemático com

o objetivo de preencher um quadrado com um objeto unidimensional. Para sua construção, consideramos um segmento de reta, esta será a diagonal do quadrado para o preenchimento. Daí,

- 1) Dividimos o segmento em 3 segmentos de mesmo comprimento a ;
- 2) Em cada lado do segmento central construímos um quadrado, cujo lado é o comprimento do segmento central;
- 3) Para cada segmento, repetimos as etapas 1 e 2.

Notemos que iniciamos com um segmento, na primeira iteração temos 9 segmentos, na segunda iteração teremos 81 segmentos, e assim sucessivamente. Além de observarmos a quantidade de segmentos criados e analisarmos a proporcionalidade de cada segmento em relação ao anterior iniciaremos o entendimento sobre o conceito de dimensão fractal, que no caso da Curva de Peano tem dimensão $d=2$. Este conceito será explicado de forma mais aprofundada posteriormente.

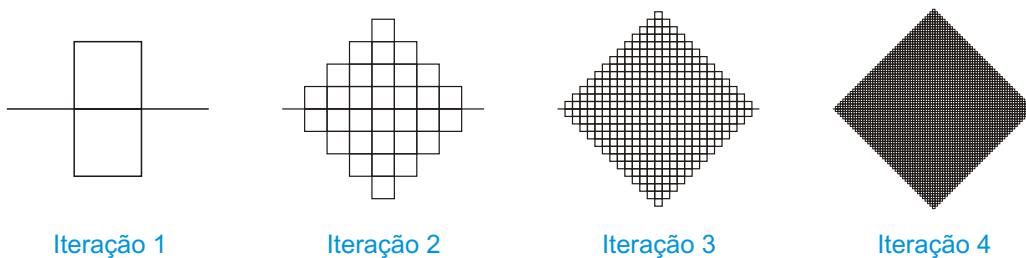


Figura 1.3: Curva de Peano e suas iterações

1.1.3 Curva Hilbert

A Curva de Hilbert (Fig. 1.4) apesar de ter o mesmo princípio da Curva de Peano, preencher um quadrado com uma curva unidimensional, ela não possui autointerseção, lembrando que a curva de Peano também goza desta propriedade, mas com uma adaptação. Uma das maiores aplicações da Curva de Hilbert é a pixelização de imagens em meio-tons de cinza, gerando resultados melhores do que um método linear, pois na curva de Hilbert todos os pixels são considerados e não formam aspectos lineares em imagens em tons de cinza (Fig. 1.5).

1.1.4 Curva do Dragão de Harter-Heighway

O dragão Harter-Heighway (Fig. 1.6) foi analisado pelos físicos John Heighway, Bruce Banks, e William Harter, na época funcionários da NASA. Muitas de suas propriedades

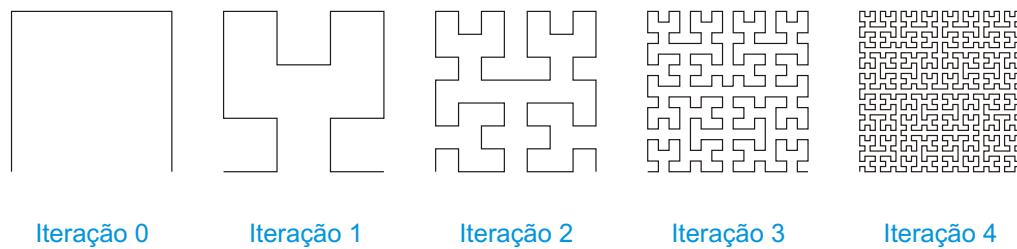


Figura 1.4: Curva de Hilbert e suas iterações

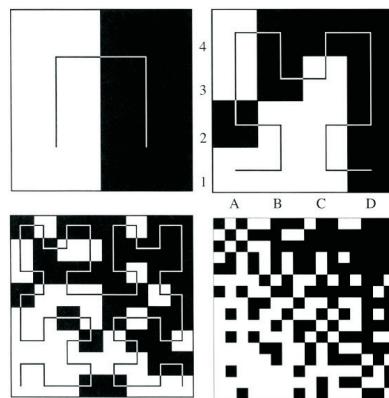


Figura 1.5: Aplicação da Curva de Hilbert [10]

foram publicadas pela primeira vez por Chandler Davis e Donald Knuth. Com uma simples construção a partir de dobras e propriedades de ladrilhamento, tornou-se um fractal aplicados em jogos diversos sendo descrito por Martin Gardner em sua coluna na *Scientific American* sobre Jogos Matemáticos em 1967. Considerando um segmento inicial a

- 1) Construir um triângulo retângulo equilátero com hipotenusa a ;
- 2) Excluir a hipotenusa;
- 3) Para realizar mais uma iteração repetir os passos **1** e **2** para os catetos criados, sempre em oposição.

1.2 Fractais por Remoção

São os fractais obtidos pela remoção de partes do mesmo de forma iterativa. Alguns fractais por remoção mais conhecidos são apresentados a seguir.

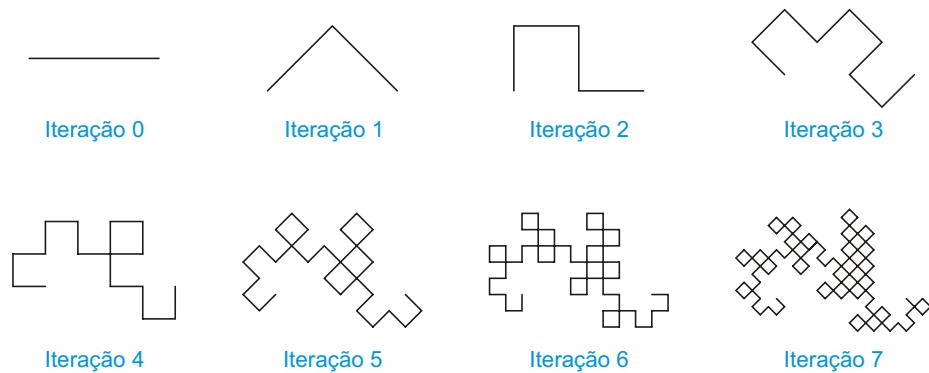


Figura 1.6: Curva do Dragão de Harter Heighway e suas iterações

1.2.1 Conjunto de Cantor

Para construir-lo consideramos inicialmente um segmento de reta em geral o intervalo $[0,1]$, Cantor não estava interessado em criar o fractal e sim relaciona-lo ao conceito de cardinalidade, tema recorrente em seus trabalhos, continuando a construção temos:

- 1) Dividir o segmento em três partes iguais eliminando a central;
- 2) Considerar as duas partes restantes;
- 3) Realizar o procedimento 1 e 2 nos segmentos restantes.

Quando tratamos o conjunto de cantor de forma bidimensional temos a poeira de Cantor.

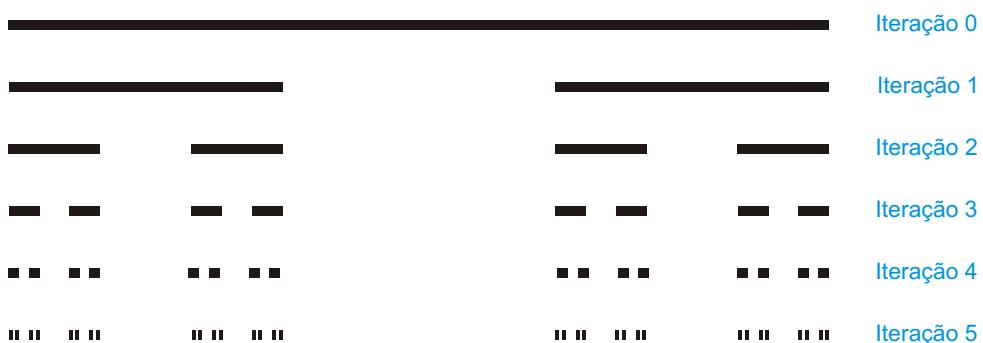


Figura 1.7: Conjunto de Cantor

1.2.2 Triângulo de Sierpinski

Para a construção do Triângulo de Sierpinski consideramos um triângulo totalmente preenchido.

- 1) Considerando o ponto médio de cada lado do triângulo removemos o triângulo que tem como vértices esses três pontos médios;
- 2) Aplicar o passo 1 nos três triângulos restantes.

Repetindo o procedimento acima infinitamente em cada um dos quatro triângulos temos o Triângulo de Sierpinski.



Figura 1.8: Triângulo de Sierpinski e suas iterações

1.2.3 Tapete de Sierpinski

A construção do Tapete de Sierpinski é feita também por remoção.

Neste caso consideramos inicialmente um quadrado totalmente preenchido.

- 1) Dividimos o quadrado em 9 quadrados iguais;
- 2) Removemos o quadrado central.

Na primeira iteração teremos 8 subquadrados ao todo. Para próxima iteração repetimos os passos 1 e 2 para cada quadrado obtido.



Figura 1.9: Tapete de Sierpinski e suas iterações

1.2.4 Esponja de Menger

Para a construção da esponja de Menger devemos considerar um cubo sólido.

- 1) Dividimos o cubo em 27 cubos iguais

- 2) Retirar o cubo central do cubo principal e de cada face, restando 20 cubos.
- 3) Repetir os procedimentos **1** e **2** em cada cubo menor.

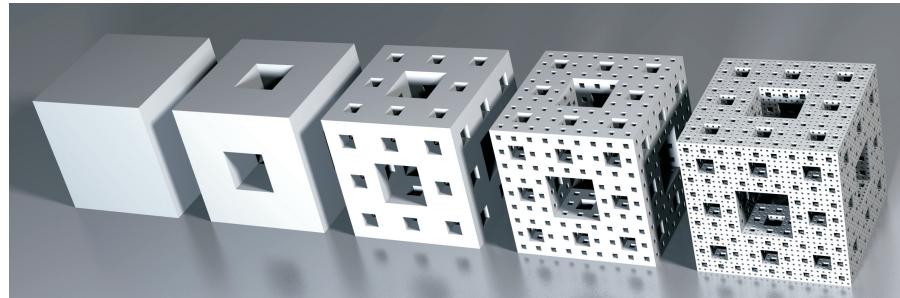


Figura 1.10: Esponja de Menger e suas iterações 0, 1, 2, 3 e 4, respectivamente
Fonte: / commons.wikimedia.org/wiki/File:Menger-Schwamm-Reihe.jpg

1.2.5 Pirâmide de Sierpinski

Para a construção da Pirâmide de Sierpinski devemos considerar uma pirâmide com base triangular.

- 1) Em cada face realizar a operação conforme o triângulo de Sierpinski;
- 2) Considerar os novos triângulos formados como face de novas pirâmides;
- 3) Repetir os passos **1** e **2** em cada pirâmide formada.

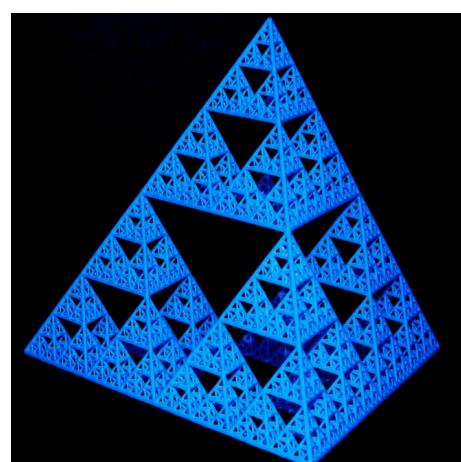


Figura 1.11: Pirâmide de Sierpinski

1.3 Fractais Tipo Dürer

Um fractal tipo Durer pode ser classificado pelo polígono regular que o origina. A partir desse polígono base tomamos seus vértices e reduzimos de forma que temos tantos polígonos quanto vértices e estes tendo como adjacentes dois lados e um vértice o reduzimos até não termos os polígonos sobrepostos de modo que mantenham uma interseção mínima (um lado ou um vértice) base, assim para a construção do fractal tipo Durer devemos escolher um polígono e este aplicar uma redução obedecendo ao critério de que cada vértice desta redução esteja posicionado no vértice do polígono anterior. A Figura 2.1 é um exemplo de Fractal Tipo Dürer.

1.4 Fractais Tipo Árvore

Geralmente se assemelhando a árvores esse fractal tem como característica a bifurcação em forma de galhos, mas podemos perceber que os mesmos também tem características presentes em rios, raios e sistemas circulatórios sanguíneos. Partindo de um segmento central base cria-se uma bifurcação com ângulo determinado e tamanho proporcional, com fator qualquer.

Um exemplo é a árvore pitagórica. Para sua construção considerando um quadrado inicial, temos:

- 1) construir um triângulo retângulo com hipotenusa igual e adjacente a um dos lados do quadrado inicial.
- 2) construir quadrados adjacentes aos catetos do triângulo retângulo criado.
- 3) para cada próxima iteração repetir os passos 1 e 2, em cada um dos quadrados

Existem diversas possibilidades de construção de uma árvore pitagórica, cabendo apenas a variação de tamanhos entre seus catetos, a Fig 1.12 representa a árvore pitagórica com catetos de mesmo comprimento e a Fig. 1.13 com comprimentos diferentes.

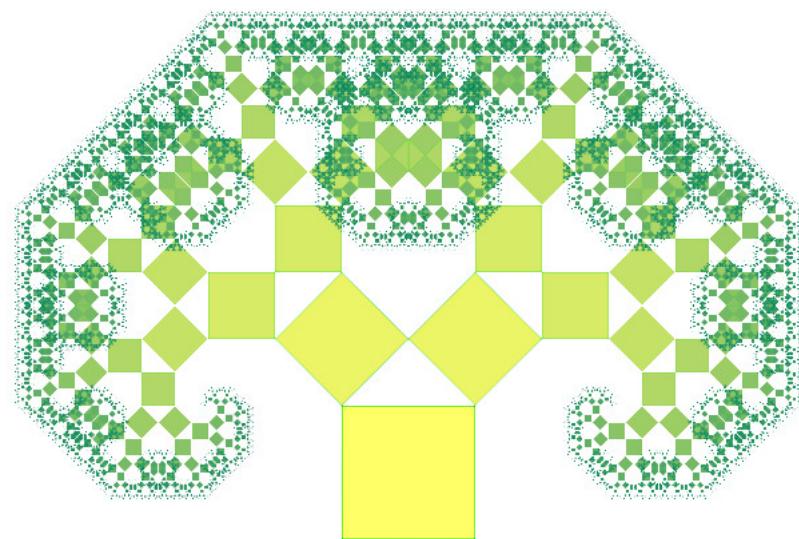


Figura 1.12: Árvore Pitagórica formada por triângulos Retângulos Isósceles

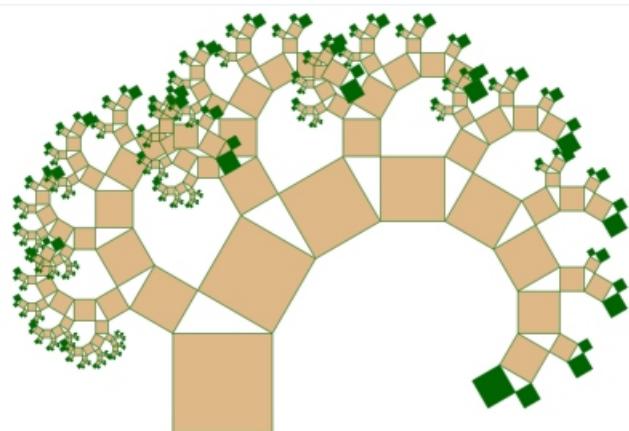


Figura 1.13: Árvore Pitagórica formada por triângulos retângulos com catetos de tamanhos diferentes. Fonte:<http://3.bp.blogspot.com>

CAPÍTULO 2

História e Evolução da Geometria Fractal

Neste capítulo procuramos apresentar um pouco da origem dos fractais, destacando seus principais desenvolvedores e colaboradores.

O primeiro passo no sentido de compreensão dos fractais foi dado por volta de 300 a.c. quando Euclides define o princípio da dimensão do espaço, mas devido ao elevado grau de complexidade da natureza, a geometria euclidiana não é suficiente para descrever todos os seus fenômenos. Sendo assim, entre o final do século XIX e início do século XX, matemáticos desenvolveram curvas que iam de encontro aos conceitos matemáticos já consolidados na geometria Euclidiana. No início, sem um termo apropriado para designá-los, estas curvas eram chamadas apenas de “monstros” matemáticos ou patologias.

A mais remota descrição de um fractal (apesar deste termo não ser ainda adotado neste período) são os fractais de Dürer, que além de matemático era um importante pintor de sua época, e por isso, tinha uma atenção maior pela precisão de suas construções geométricas. A primeira imagem do fractal criada por Albrecht Dürer data de aproximadamente 1500.



Figura 2.1: Fractal Tipo Dürer em formato pentagonal

A Figura 2.1 mostra o processo de criação de um fractal do Tipo Dürer. Sua cons-

trução se inicia com um único pentágono (em preto na primeira subfigura) de lado determinado, sendo este a base, onde controi-se cinco pentágono dispostos internamente, com seus vértices congruentes ao original. Temos 4 iterações representadas, podendo ser dadas a continuidade para o infinito.

Em torno de 1700, Leibniz propôs a noção de autossimilaridade de certos objetos, principalmente tratando a reta como curvas autossimilares.

A virada do século XIX para o século XX foi marcada pela discordância entre grupos de matemáticos, causada pela análise de propriedades das funções, por isso, novas funções excêntricas foram sendo criadas evidenciando a ruptura da comunidade matemática.

Karl Weierstrass, destacou-se por descobrir uma função com a propriedade de ser contínua em todo o seu domínio, mas que não é diferenciável em nenhuma parte (Fig. 2.2). A função de Weierstrass é a primeira função publicada a apresentar tal propriedade e o gráfico desta função foi considerado um fractal pelas suas autosimilaridades.

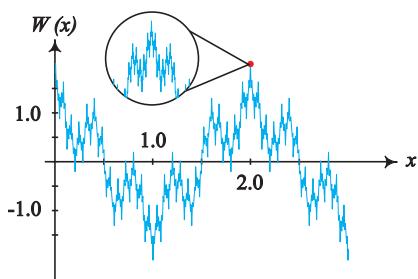


Figura 2.2: Gráfico - Função Weierstrass

Contudo, Niels Fabian Helge von Koch, considerou a função apresentada por Weierstrass demasiadamente abstrata, propondo assim, uma demonstração geométrica desenvolvendo o *Floco de Neve de Koch* (Fig. 2.3). O Floco de Neve de Koch tende a uma curva que é contínua mas que não é diferenciável em nenhum de seus os pontos.

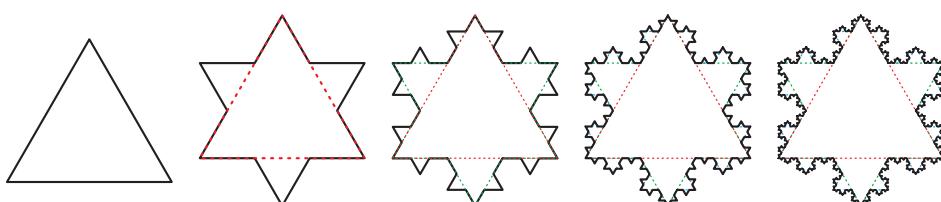


Figura 2.3: Floco de Neve de Koch e iterações sucessivas para sua construção

Uma propriedade interessante do floco de neve de Koch é que seu perímetro tende para o infinito, apesar de uma área limitada, quando as iterações tendem ao infinito, por esse motivo Mandelbrot cita o mesmo para exemplificar a distorção nas mensurações na costa britânica.

Vale ressaltar que esta curva é um exemplo de curva que não tem reta tangente em nenhum ponto.

Visualmente é o primeiro fractal em que podemos observar a propriedade de autossimilaridade.

Mas foi Georg Ferdinand Cantor (Fig. 2.4) que desenvolveu o mais importante “monstro” matemático. O conjunto de Cantor, provou que os conjuntos infinitos não têm todos a mesma cardinalidade, diferenciando conjuntos enumeráveis de conjuntos contínuos.

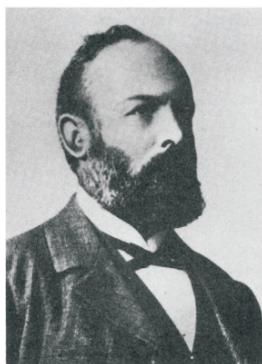


Figura 2.4: Georg Cantor [10]

Fazendo o produto cartesiano de várias cópias, obtemos a poeira de Cantor, uma versão multidimensional do conjunto de Cantor. É um tipo simples de fractal, apesar de um pensamento abstrato, suas iterações são de fácil compreensão visual, como visto no capítulo 1 - Principais Fractais e suas Aplicações.

Seus inovadores conceitos matemáticos não tiveram a devida atenção pela comunidade matemática da época, mas na atualidade é reconhecido por suas grandes contribuições para a matemática.

Giuseppe Peano, em 1890, e quase imediatamente David Hilbert, em 1891, propuseram um problema interessante:

"cobrir totalmente uma superfície plana quadrangular com uma curva"

Este problema foi chamado de curva de Peano-Hilbert, apesar de cada um propor uma construção diferente. A curva de Peano (Fig. 1.3) está diretamente relacionada com o desenvolvimento da curva de Hilbert, desenvolvida por David Hilbert, essas curvas consistem na cobertura de uma superfície quadrada, sem interseção de pontos (atualmente utilizada na compressão de imagens) (Figs. 1.4 e 1.5). Ambas as curvas em questão, propõem uma solução para o recobrimento de uma área bidimensional e limitada com objetos unidimensionais, mas elas se diferenciam no fato de que Hilbert considerou que as curvas não pudessem se cruzar sendo visualmente claro nesta posição, enquanto Peano, apesar de se preocupar com o fato, visualmente temos locais de auto interseção.

Em 1918 Gaston Maurice Julia, produziu o artigo *Mémoire sur L'itération des fonctions rationnelles* sobre iterações de funções racionais no domínio complexo, que devido ás

limitações da época, não conseguiu vislumbrar o resultado do conhecido Conjunto de Julia. Ainda no mesmo ano, Pierre Fatou publicou resultados semelhantes aos de Julia, por isso os resultados são atualmente conhecidos como o teorema generalizado de Fatou-Julia. Na fig. 2.5 apresentamos alguns fractais de Julia.

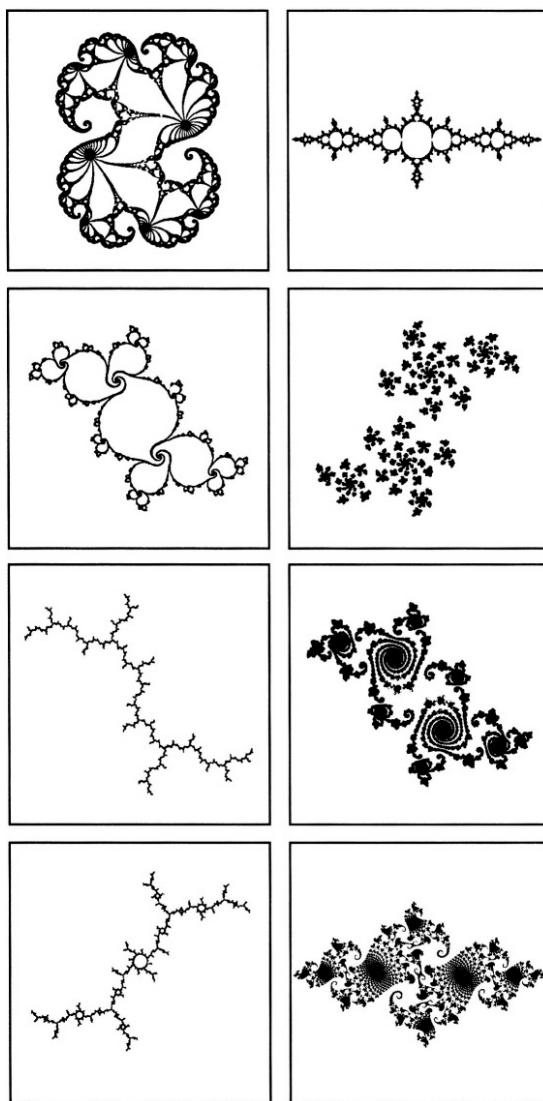


Figura 2.5: Fractais de Julia com diversos parâmetros complexos, Fonte [10]

Waclaw Sierpinski (Fig. 2.6) foi quem nos apresentou a mais numerosa contribuição no campo das construções fractais, sendo elas: o triângulo de Sierpinski, a pirâmide de Sierpinski e o tapete de Sierpinski.

O Triângulo de Sierpinski é uma figura geométrica obtida através de um processo recursivo, que possui as seguintes propriedades:

- contém tantos pontos como o do conjunto dos números reais;
- tem área igual a zero;



Figura 2.6: Waclaw Sierpinski [10]

- é autossimilar;

O Triângulo de Sierpinski é uma figura bidimensional, mas é possível também construir uma figura tridimensional realizando um procedimento similar gerando uma pirâmide de base triangular, conhecida também como Pirâmide de Sierpinski. O método de construção é inteiramente análogo ao do triângulo de Sierpinski com a divisão em quatro triângulos em cada face e retirando-se o triângulo central.

O ponto de partida para a construção do Tapete de Sierpinski é um quadrado, porém em sua iteração ocorre a "retirada" de partes, com isso sua dimensão acaba ficando entre as dimensões da reta e do plano. O Tapete de Sierpinski pode ser considerada uma representação bidimensional do conjunto de Cantor, pois podemos representá-lo pelo segmento que passa pelo centro, perpendicular a um dos lados do Tapete de Sierpinski. Assim como a esponja de Menger é considerada sua representação tridimensional do Tapete de Sierpinski que representa as faces da Esponja de Menger.

Os primeiros fractais nasceram na tentativa de explorar plenamente o conteúdo matemático e o limite das noções fundamentais. Neste contexto, o Conjunto de Cantor, o Tapete de Sierpinski e a Esponja de Menger, se destacam por apresentarem conceitos de autossimilaridade, infinito e iteratividade que são essenciais na Geometria Fractal.

Baseado na simplicidade ou ausência da representação de objetos da natureza, Benoit Mandelbrot passou a relacionar os fenômenos da natureza com o conceito de fractais e consequentemente, iniciando o desenvolvimento da **geometria fractal**.

O termo fractal, foi publicado pela primeira vez por Benoit Mandelbrot (Fig. 2.7) em 1970, no livro “The Fractal Geometry of Nature” no qual introduz o termo “fractal”, a partir de um neologismo da palavra *fractus* do latim, que se origina do verbo *fragare*, que significa: partir em segmentos irregulares mantendo um padrão que representa o todo.

A Geometria Fractal descreve fenômenos matemáticos que pareciam exibir comportamento caótico ou surpreendente. Todos estes fenômenos envolviam a definição de alguma curva ou algum conjunto através do uso de algumas funções ou algoritmos

recursivos.



Figura 2.7: Benoit Mandelbrot [10]

Com este termo Mandelbrot se referia a objetos irregulares que sempre existiram na natureza como os galhos das árvores e a costa da Grã Bretanha, por exemplo, que levou muitos anos para serem reconhecidos como objetos geométricos na sua complexidade.

Mandelbrot ao expor suas ideias sempre utilizou, como exemplo a dimensão da costa da Grã-Bretanha, fazendo a seguinte proposta: consideremos um homem caminhando pelo litoral, sempre o mais perto possível do mar, deixando uma pegada a cada passo. Ao reencontrar o ponto de origem, o conjunto de segmentos de reta unindo todas as suas pegadas representa uma discretização da costa, sendo assim, podemos calcular uma "aproximação" do comprimento da costa somando o comprimento de todos os segmentos de reta obtidos. Agora, substitua o homem por um lagarto. Como suas patas não podem cobrir, num só passo, a mesma distância do passo de um homem, ele considerará formas que o homem ignorou. Reentrâncias não serão saltadas, mas percorridas. A curva descrita pelo lagarto será mais irregular portanto mais longa do que a do homem. Ainda mais extensa será a trajetória da formiga, em que apenas uma pedra será como relevo, um caminho a ser vencido.

A partir deste ponto Mandelbrot concluiu que a costa da Grã-Bretanha não tem um comprimento fixo. O homem é apenas um dos agrimensores, uma entre tantos outros, por exemplo as pernas do homem, do lagarto, da formiga. Quanto maior o número de reentrâncias e obstáculos considerados, maior será a medida da extensão da costa, tendendo ao infinito.

Sempre que questionamos o tamanho de alguma região costeira podemos responder, depende de quê? Uma casa vista do espaço pode ser considerada como um ponto, se observada com mais proximidade, no céu pode ser extensa e ter duas dimensões, se pararmos em frente a esta casa no chão obviamente será tridimensional. Se observarmos o litoral como propôs Mandelbrot vemos que o mesmo não altera sua complexidade, mesmo tendo alterado a escala. Um homem, um cachorro, um rato ou uma formiga, cada uma destes seres perceberá um recorte diferente em relação a dimensão de uma faixa litorânea.

Essa característica da autossimilaridade é a espinha dorsal da geometria criada por Mandelbrot. O mínimo se parece com o imenso. Uma pequena nuvem é semelhante a uma nuvem grande e ambas obedecem a um princípio organizador único. A natureza está repleta de formas autossimilares, tais como, flores, galhos, ilhas, costas, que estabelecem padrões. Diante de suas observações, ele afirmou que essa é a verdadeira geometria do mundo natural e as irregularidades não são deformações da perfeição clássica, mas o dialeto próprio da natureza.

Ele propôs, então, nos anos 70, uma nova definição de dimensão para os fractais publicado em seu livro *Fractals: Form, Chance and Dimension* [8], consolidando o termo geometria fractal. Com o objetivo de aproximar a geometria fractal aos fenômenos naturais Mandelbrot publica ainda outro livro com título *The Fractal Geometry of Nature* [9].

No artigo que escreveu registrando as observações de sua pesquisa na costa britânica, Mandelbrot, introduz o conceito e enaltece a importância e aplicação dos fractais. Ele examina o paradoxo da linha costeira: o comprimento de uma linha costeira depende da escala de medição. Evidências empíricas sugerem que quanto menor a unidade de medida, maior se torna o valor do comprimento medido.

O conjunto de Mandelbrot, (Fig.2.8) foi inspirado no conjunto de Julia, em que cada ponto no plano complexo corresponde ao conjunto de Fatou e Julia. Desse modo conjunto de Mandelbrot possui estruturas muito semelhantes aos conjuntos de Fatou e Julia.

O conjunto de Fatou e Julia refere-se aos pontos próximos à fronteira do conjunto de Mandelbrot. Os pontos mais internos ao conjunto de Mandelbrot correspondem a formas geométricas relativamente simples, enquanto os pontos mais externos lembram poeira.

A partir dos trabalhos de Julia e Fatou, que conheceu pelo seu tio, o matemático Szolem Mandelbrot, que era professor em Paris no prestigioso Collège de France, e teve acesso a recursos computacionais por ter trabalhado na IBM, Mandelbrot assim visualiza pela primeira vez os resultados dos conjuntos complexos de Julia e Fatou. Benoit Mandelbrot foi a primeira pessoa a utilizar um computador para plotar um conjunto.

Fatou e Julia não tiveram acesso a um computador capaz de plotar as órbitas de suas funções, mas tentaram realizar a mão, portanto nunca chegaram a vislumbrar uma imagem como estamos acostumados a ver no conjunto de Mandelbrot, pois a quantidade de cálculos necessária para se gerar tais imagens está além da capacidade de um ser humano executar à mão.

O conjunto de Mandelbrot é um fractal particularmente interessante que se tornou popular fora da matemática devido à sua beleza estética e ao fato da sua estrutura complexa resultar de um algoritmo de construção simples, além das aplicações gráficas

em imagens e filmes que viriam a seguir.

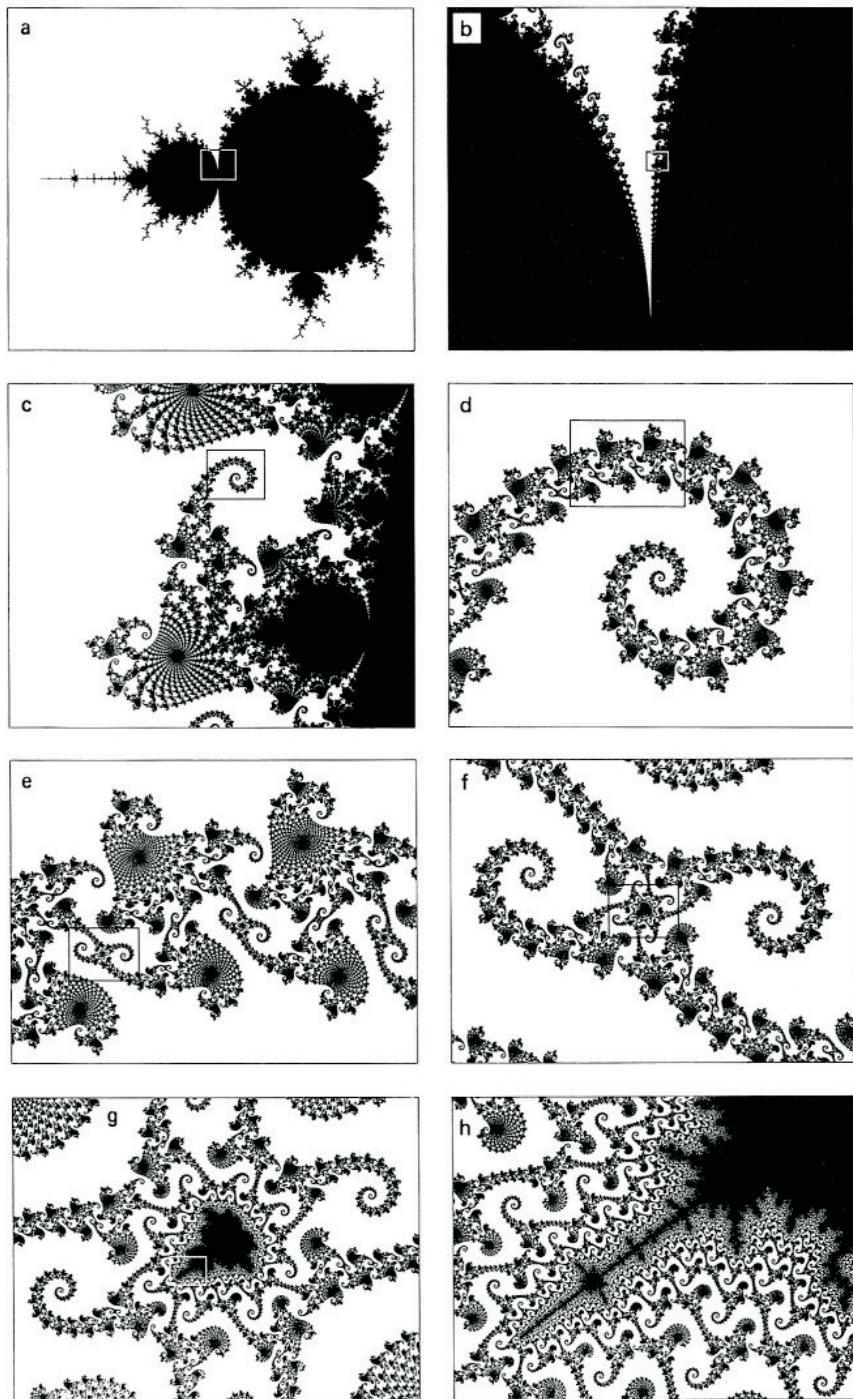


Figura 2.8: Fractal Mandelbrot em [10] e ampliações sucessivas

CAPÍTULO 3

Livros Didáticos e Fractais

Neste capítulo apresentaremos como o estudo de fractais é tratado nos livros didáticos distribuídos pelo MEC, aos alunos do Ensino Médio de escolas públicas. Lembrando que estes livros também podem ser escolhidos pela rede particular. O livro didático é de grande importância pedagógica, pois faz parte do processo da educação e do ensino. Ele tem a função de sistematizar o conhecimento científico em saber escolar, ou seja, o saber que deve ser ensinado na escola. Desta forma, ele operacionaliza as finalidades do ensino, determinando assim o que deve ser ensinado e o que deve ser aprendido. Ele também serve de apoio ao professor e contribui para o desempenho escolar dos alunos, sendo assim, o livro didático se coloca como um mediador da relação professor e aluno. Além disso, se constitui como um veículo da cultura elaborada e uma dilatação da ajuda pedagógica do professor.

O livro didático é um importante instrumento no processo ensino aprendizagem, tanto para o aluno quanto para o professor.

Para o professor, sua importância deve-se a organização e sequência dos conteúdos a serem ensinados durante o ano letivo, organizada de forma gradativa em relação as dificuldades. No livro didático o professor encontra o saber escolar, que é um conteúdo de extrema relevância para que o professor continue aprendendo e assim vá ganhando mais segurança no seu trabalho em sala de aula.

Já para o aluno, o livro didático reside no fato de ser uma fonte de informação, além de possuir o conteúdo sistematizado da matéria escolar. Ele é também um meio de estudo individual, revisão e fixação da matéria.

Uma vez bem utilizado pelo professor, o livro didático irá auxiliar os alunos a lidar com a informação, formar conceitos, desenvolver habilidades intelectuais e estratégias cognitivas, que são as metas do ensino. E é por todas essas razões que o livro didático

pode ser considerado um importante recurso didático.

Através do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático), o MEC (Ministério da Educação) pretende contribuir com o trabalho pedagógico do professor através da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica.

Para isto, as obras passam por um processo de avaliação no MEC. Esta análise é feita por instituições públicas de ensino superior, baseada nas orientações e diretrizes estabelecidas pelo MEC. Feito isso, o MEC publica a resenha das coleções aprovadas. Dentre estes títulos aprovados, cada escola seleciona aquele que melhor atende ao seu projeto pedagógico. Configura-se então a necessidade de observar se o livro didático e a concepção da disciplina, a organização dos conteúdos, a abordagem dos conceitos e temas e os exercícios estão compatíveis com a ideologia dos professores que ensinam a matéria em questão.

O PNLD acontece de três em três anos, onde o MEC adquire e distribui os livros didáticos para as escolas públicas que atendem o primeiro e segundo segmento do Ensino Fundamental e também para o Ensino Médio, de acordo com as escolhas dos professores.

Para direcionar nosso campo de estudos utilizaremos os livros recomendados no último PLND do Ensino Médio, que ocorreu no ano de 2012.

Em Conexões com a Matemática – volume 1, há uma sessão denominada Questões do ENEM (Fig. A.1), existe apenas uma questão que se refere aos fractais, retirada do Exame Nacional do Ensino Médio de 2008, mas não há um capítulo específico para a abordagem do tema.

No livro Contexto e Aplicações, cada capítulo possui um anexo introdutório. No capítulo referente a Números Complexos, sua introdução (Fig.A.2 e Fig.A.3) faz uma breve menção ao conjunto de Mandelbrot, além de uma atividade deixando a cargo do aluno e/ou do professor aprofundar o conteúdo.

Utilizando-se do mesmo recurso, apenas de introdução a um novo conteúdo, há uma atividade no início da matéria de limites (Fig. A.4). Para a resolução da questão é necessário que haja conhecimento prévio sobre fractais, sendo a Esponja de Menger sua principal ferramenta teórica. No final da atividade, existe um comentário sobre seu objetivo, fazendo um elo entre o fractal e limites atentando para o fato do mesmo ter área tendendo ao infinito e volume tendendo a zero, após cada iteração.

No primeiro volume do livro Matemática - Paiva, logo no capítulo inicial, há uma breve descrição histórica sobre fractal para contextualizar um exercício (Fig. A.5) que trata de sequência.

Os livros desta coleção Matemática - Ciência e Aplicações, possuem uma seção intitulada Exercícios Complementares. Nesta parte do volume 1, encontra-se uma questão utilizada no vestibular da Vunesp, Figura A.6, e uma questão do vestibular da UFRJ (Fig. A.7), entretanto não existe explicação sobre os fractais, pressupondo então que o

aluno utilize outros conhecimentos ou meios para a realização da questão.

De todos os livros presentes no guia do livro didático do ensino médio publicado pelo MEC, o livro Matemática - Ensino Médio é o que mais dá destaque aos fractais (Figs. A.8, A.9, A.10, A.11, A.12, A.13, A.14 e A.15), principalmente com textos complementares aos capítulos de diversos conteúdos.

Esta coleção apresenta uma seção intitulada Saia Dessa (Fig.A.8) destinada a despertar o interesse dos alunos, sem que obrigatoriamente faça parte do conteúdo programático, neste caso apresentou uma questão do vestibular da UFPR.

Já na parte Para Saber Mais, que se encontra no final de cada unidade, apresenta textos que objetivam o aprofundamento de conhecimentos. Há neste departamento uma compilação de uma matéria da revista Super Interessante (Fig. A.9, Fig. A.10 e Fig. A.11), mas o mesmo não possui relação com o conteúdo a ser estudado, e está escrito em caráter informal sem embasamento com a geometria fractal.

Na introdução da unidade sobre função, verifica-se o Triângulo de Sierpinski (Fig. A.12. O mesmo acontece na unidade referente a sequências (Fig. A.13 e Fig. A.14) em que no setor Para Saber Mais (Fig. A.15) tem-se um texto chamado sequências na era do computador.

O primeiro volume da coleção Novo Olhar - Matemática aborda o tema fractais em apenas exercícios ou atividades como na seção desafio (Fig. A.16) ou como, que pertencem a atividades dos capítulos funções exponenciais (Fig. A.17) e Função Logarítmica (Fig. A.18). O terceiro volume aborda o tema fractais em um texto introdutório do capítulo sobre Polinômios e Funções Polinomiais, (Fig. A.19).

Após a análise foi observado que apesar de revisados todos os livros constantes no Guia PNLD, apenas o livro Matemática: Ciências, Linguagem e Tecnologia não continha uma citação aos fractais. Notou-se uma abordagem em sua maioria com exercícios e/ou como uma introdução sobre capítulos, não é constatado nenhum tipo de capítulo ou seção específica para fractais estes apenas seguem uma abordagem de complementação e curiosidade. O livro Matemática Ciência e Aplicações é o que mais aborda o tema, frisando que esta é uma característica comum em outros temas abordados pelo livro. Apesar de uma ferramenta válida o livro didático ainda não tem recursos para aprofundar o conhecimento em relação a geometria fractal.

CAPÍTULO 4

Propostas de Atividades

Neste capítulo apresentaremos algumas propostas de atividades para a sala de aula ou mesmo exposições em feiras de ciências. Para um trabalho diversificado e linear propomos 4 temas reforçando o apelo visual e simples do tema fractal, sendo eles: Dimensão Fractal, Recortes Fractais, Fractais Naturais e Área e Perímetro dos Fractais Geométricos.

Os PCN, no seu bloco Espaço e Forma, enfatizam:

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [4, p.56]

4.1 Dimensão Fractal

Um dos conceitos que torna interessante o estudo dos fractais, é a dimensão fractal e sua análise em relação a dimensão euclidiana. Em Os elementos de Euclides [5], podemos retirar algumas definições de dimensão, que conhecemos como Dimensão Euclidiana:

- Ponto é aquilo de que nada é parte;
- Linha é comprimento sem largura e
- Superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.

Mesmo com as noções de dimensão existentes, ainda é complexo imaginar como encaixar a dimensão de um fractal em um parâmetro dimensional euclidiano, mesmo sendo, fractais de métodos iterativos simples e totalmente autossimilares. Baseado

em conceitos matemáticos prévios, este ensino pode ser motivador e uma ligação com outros conceitos mais profundos, além de uma aplicação de logaritmos e suas propriedades.

Uma análise interessante é como interpretar uma reta e sua dimensão de forma comparativa com os estudos de Hilbert e Peano que pensaram em preencher figuras planas com estes objetos com linhas contínuas de única dimensão e qual dimensão se aplicaria ou se encaixaria nessas figuras? Quando nos perguntamos qual a dimensão de um segmento de reta percebemos que este é um objeto unidimensional , mas se pegarmos uma curva, qual será a dimensão deste objeto?

Utilizando um artifício para figuras topológicas em um estudo de Hausdorff e aplicando aos fractais, Mandelbrot observou que solucionaria os problemas com um novo conceito de dimensão.

Para uma análise didática e ordenada iremos notar os conceitos da dimensão euclidiana e os analisaremos brevemente e concomitantemente. Faremos uma comparação com a dimensão de Hausdorff de modo didático e direto para atendermos as demandas dos alunos do Ensino Médio. Ao analisar os livros didáticos notou-se uma necessidade de aprofundar esse conceito, apesar de muito se falar sobre dimensão fractal, este é feito de modo superficial. O estudo da dimensão fractal torna-se uma grande ferramenta crítica do mundo e da matemática para os alunos que pouco estão habituados a argumentar e analisar conceitos que diferem dos estudados em uma estrutura fechada e sem abertura para o raciocínio.

Como citado anteriormente, em *Os Elementos de Euclides* [5] temos as definições de ponto, reta, plano e intuitivamente espaço. Considerando o ponto um ser de dimensão zero, a reta com dimensão um, o plano com duas dimensões e o espaço com três dimensões.

Cabe ressaltar que pelo desenvolvimento de novas mídias, o advento do cinema em terceira dimensão e a maneira como nosso cérebro interpreta as imagens mostrando que o que vemos nem sempre pode ser uma representação fiel da realidade. Isto gera uma maior expectativa nos alunos já que é um assunto inserido em seu contexto diário.

Uma maneira didática de explicarmos a dimensão de Hausdorff é analisando os passos de cada interpretação dimensional, observando as transformações que ocorrem na interpretação apropriando de um exemplo com conceitos já estudados, construindo um caminho interessante e também um terreno mais firme para conjecturas futuras, tal como Mandelbrot fez ao comparar um fusca, uma vez observado do espaço é interpretado como um ponto e como um objeto plano ao se aproximar verticalmente do mesmo e até chegar a um objeto em três dimensões quando nos situamos ao seu lado. Podemos pensar em um grão de areia, porque ao obseva-lo certamente um aluno o dirá que este não terá dimensões, ou tão pequenas que não possibilite uma mensuração. Baseados em seus conhecimentos, se indagado logo após uma explanação das dimen-

sões euclidianas, mesmo sabendo que este grão possui dimensões, e estas necessitam de uma escala de aproximação maior. Se observado com uma lupa, podemos verificar suas dimensões e relaciona-lo a um grão com as reentrâncias de uma costa litorânea qualquer, e assim remetemos a um novo conceito de dimensão, a dimensão fractal ou dimensão de Hausdorff.

Para simplificar o conceito de dimensão podemos analisar 3 objetos geométricos euclidianos: reta, plano e espaço. Cabe ressaltar que as aplicações abaixo tratam de uma aplicação fractal, a partir da autossimilaridade, e que ao dividirmos segmentos, quadrados e cubos em objetos menores e iguais estamos aplicando o conceito de fractal em objetos com dimensão conhecida assim criando uma associação lógica e de melhor compreensão para os alunos do Ensino Médio.

Analogamente temos o que Mandelbrot, utilizando-se dos conceitos de dimensão de Hausdorff, chamou de dimensão fractal.

A dimensão fractal d de um objeto geométrico pode ser definida da seguinte forma: dividimos o objeto em P partes tal que as partes sejam autossimilares à figura geométrica inicial. Uma vez que as figuras obtidas são autossimilares elas possuem um fator α tal que ampliando α vezes o objeto obtemos a figura geométrica inicial.

Sendo assim a dimensão fractal d do objeto é o número real positivo tal que

$$\alpha^d = P \quad (4.1)$$

Isto implica que

$$\log \alpha^d = \log P$$

Logo:

$$d = \frac{\log P}{\log \alpha} \quad (4.2)$$

Vamos a um exemplo: Consideramos um quadrado, este pode ser dividido em 9 quadrados iguais que são autossimilares ao quadrado original. Para que um destes quadrados menores fiquem do tamanho do quadrado original é necessário ampliar 3 vezes. Sendo assim, o quadrado original tem dimensão 2 pois $3^2 = 9$.

Para um exemplo fractal, consideremos o tapete de Sierpinski. Na primeira iteração da construção do tapete de Sierpinski temos um quadrado dividido em 9 quadrados iguais, mas o quadrado central é removido. Logo são criados 8 objetos quadrados autossimilares ao quadrado original, com $P=8$, temos que para atingir o tamanho do objeto original $\alpha = 3$, assim $3^d = 8$, aplicando o exposto na Equação 4.2:

$$d = \frac{\log 8}{\log 3} = 1,863$$

uma dimensão não inteira.

Fazendo a mesma análise para a 2^a iteração do tapete de Sierpinski, temos que em cada uma das 8 partes divididas na iteração anterior temos 8 partes resultantes do mesmo processo, assim temos um total de 64 partes criadas, logo $P = 64$, continuando com o raciocínio, estes quadrados gerados da 2^a iteração precisam de uma ampliação de 9 vezes para atingirem o tamanho original, logo $\alpha = 9$. Temos o seguinte cálculo:

$$d = \frac{\log 64}{\log 9} = 1,863$$

A construção e criação de fractais em cartaz com explicações sobre suas dimensões, em si, é um material rico de análises e comparações. Tanto em planos, fractais entre uma e duas dimensões, quanto espaciais, duas e três dimensões, são observados pontos interessantes. Existem diversas maneiras e materiais de construção de fractais que demonstram o processo de análise dimensional, para efeito de comparação no próximo item abordaremos alguns fractais e suas respectivas dimensões.

4.1.1 Cálculo e análise da dimensão dos principais fractais

O objetivo da atividade é a aplicação e interpretação da dimensão fractal de alguns dos fractais discutidos.

Uma estratégia favorável ao desenvolvimento é dividir em grupos de 4 alunos ou individual com explanação do professor sobre o assunto.

Os conteúdos de geometria euclidiana e logarítmico podem ser utilizados ou introduzidos na atividade proposta.

Antes de iniciar a aplicação cabe ao professor organizar e selecionar os fractais a serem trabalhados quanto ao cálculo de sua dimensão. Fractais geométricos são os mais indicados devido aos cálculos mais simples.

O aluno pode fazer uma apresentação das curvas de Hilbert e de Peano, as dificuldades que os mesmos enfrentaram, analisar seus objetivos e se foram alcançados é uma introdução coerente e estimulante. Neste problema, estaremos cobrindo um quadrado com dimensão dois com retas que possuem dimensão um.

A tabela 4.1 relaciona os principais fractais e suas dimensões.

4.2 Recortes Fractais

Com finalidade de mostrar um modelo concreto onde o aluno pode manusear e construir o próprio fractal, analisar seus resultados de forma recursiva, um procedimento que indica esta interação é a criação e construção de fractais utilizando papel. Este consiste em folhas recortadas que remetem a fractais geométricos e suas iterações. Para

FRACTAL	PARTES CRIADAS	FATOR DE AMPLIAÇÃO	DIMENSÃO FRACTAL
CONJUNTO DE CANTOR	2	3	0,6309
CURVA DE KOCH	4	3	1,2619
CURVA DE PEANO	9	3	2
CURVA DE HILBERT	4	2	2
CURVA DO DRAGÃO HARTER-HEIGHWAY	2	$\sqrt{2}$	2
TRIÂNGULO DE SIERPINSKI	3	2	1,5849
TAPETE DE SIERPINSKI	8	3	1,8928
ESPONJA DE MENGER	20	3	2,7268
PIRÂMIDE DE SIERPINSKI	4	2	2
ÁRVORE PITAGÓRICA	2	$\sqrt{2}$	2

Tabela 4.1: Dimensões dos Principais Fractais

uma apresentação, utilizaremos dois tipos de recortes fractais, um que exige apenas recortes e dobraduras sem criar novas partes separadas de papel e outro tipo que em sua montagem são necessários pequenas peças que se interagem formando um objeto completo. Serão utilizadas folhas de papel A4, podendo ser impressas ou não. Nestas não serão utilizadas colas ou adesivos, sendo desta forma uma atividade de fácil recurso material e logística, fato que facilita a aplicação em sala pelo professor.

4.2.1 O Conjunto de Cantor por Recortes

Proposta organizacional: equipe com 4 alunos todos com mesma função, podendo ser individual se a maturidade permitir.

Conteúdo aplicado: Sequência, Progressão Geométrica, introdução a limites.

Material para cada construção: Uma folha de papel retangular e tesoura.

Construção do Conjunto de Cantor (Fig. 4.1)

Passo 1 Dobrar a folha ao meio;

Passo 2 Marcar dois pontos no segmento (dobra) dividindo em três partes;

Passo 3 A partir de cada ponto cortar com tesoura uma perpendicular até alcançar metade do percurso, isto é, da folha dobrada.

Passo 4 Inverter a dobra do segmento central de modo que fique interna a folha original e esta congruente aos limites da folha;

Passo 5 Considerando as dobras existentes provenientes do passo anterior e repetimos os procedimentos 1 a 4.

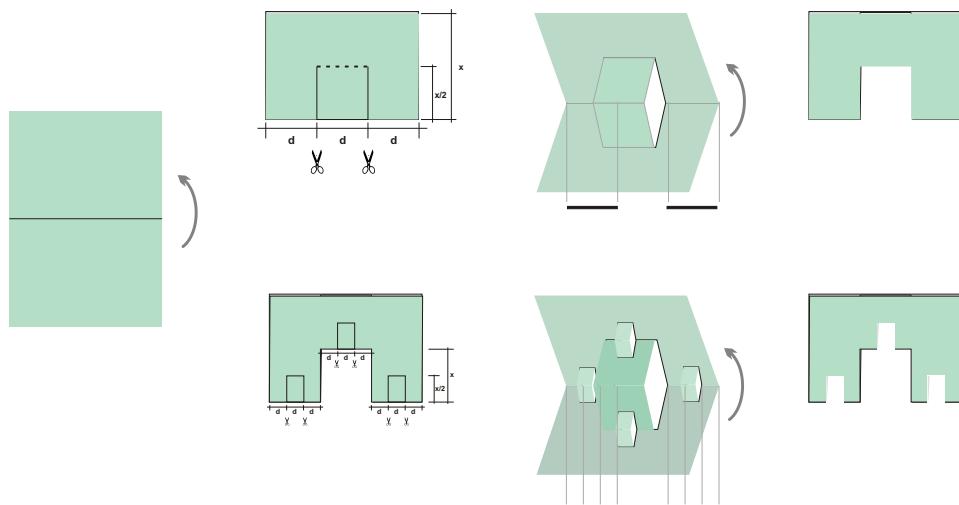


Figura 4.1: Passos da construção do Conjunto de Cantor por Recortes

4.2.2 O Triângulo de Sierpinski por Recortes

Proposta organizacional: equipe com 4 alunos todos com mesma função, podendo ser individual se a maturidade permitir.

Conteúdo aplicado: Sequência, Progressão geométrica, introdução a limites.

Material para cada construção: Uma folha de papel retangular e tesoura.

Construção: Triângulo de Sierpinski (Fig. 4.2)

Passo 1 Dobrar a folha ao meio de preferência longitudinalmente;

Passo 2 Marcar um ponto no segmento (dobra) dividindo em duas partes;

Passo 3 A partir do ponto cortar com tesoura uma perpendicular até alcançar metade do percurso;

Passo 4 Inverter a dobra de um dos segmentos de modo que fique interna à folha original;

Passo 5 Considerar todas as dobras existentes provenientes do passo anterior e repetir os procedimentos 1 a 4, sempre realizando corte de mesmo tamanho para cada iteração.

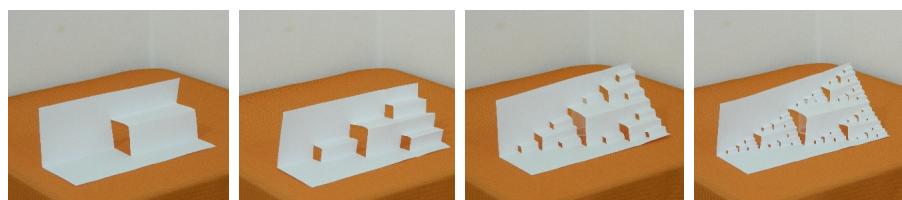


Figura 4.2: Passos da construção do Triângulo de Sierpinski por Recortes

Conclusões aos alunos: Independente do material empregado existe um limite de iterações que são possíveis construir, cabe ao aluno descobrir e ao professor orientar sobre esta limitação e levar os alunos a refletirem sobre as possibilidades do mesmo tender ao infinito abstratamente.

Pode-se também fazer a aplicação de alguns conteúdos no cálculo do volume das figuras, considerando cada degrau como uma caixa limitada, em cada iteração realizada, criando-se uma tabela de resultados comparando-os.

Alguns questionamentos levam a conclusões importantes, tais como, qual o volume total ele tende ao infinito? Qual é a soma de todas as alturas? Poderíamos determinar os próximos passos sem realiza-los concretamente? Todos estes questionamentos levam a uma série de respostas proveitosas em relação a análise de casos como progressões geométricas convergentes e a soma de seus termos e o motivo que estas geram uma soma finita, conceito este puramente abstrato.

Observando a largura do degrau em cada iteração, que pode ser aplicado a altura também, temos uma progressão geométrica a partir de cada novo degrau criado. Caso torne muito desafiador dependendo da turma aplicada pode se considerar a construção de iterações formando cubos.

4.2.3 A Esponja de Menger por Recortes

Conteúdo aplicado: Sequência, Progressão Geométrica, introdução a limites, Volume.

Material para cada construção: Folhas de A4 (rascunho) e tesoura.

Construção da Esponja de Menger (4.3) A construção baseia-se em unidades em forma de cubos apenas com papel sem uso de cola. Passos para a construção genérica da unidade cúbica.

Passo 1 Cortar 6 retângulos com a proporção 1/2, para uma folha de 75 g/m^2 o tamanho de 6 cm por 3 cm é o mais adequado;

Passo 2 Dobrar o retângulo para formar um quadrado com duas abas no mesmo sentido;

Passo 3 Cada quadrado do passo anterior será a face do cubo;

Passo 4 Posicionar as faces de modo perpendicular atentando para que as abas fiquem externamente ao cubo.

Passo 5 Construir 20 unidades e interliga-las as abas formando uma esponja de Menger



Figura 4.3: Passos da construção da Esponja de Menger por Recortes

São necessárias 20 unidades para ter uma esponja de Menger com uma iteração. Assim, para as próximas iterações serão necessárias 20^n unidades, com n iterações. Esta construção ajuda a determinar a relação de volume com cada iteração já que construímos cada unidade de medida cúbica. É importante destacar que cada iteração gera um objeto 3 vezes maior, fato que não ocorre aundo analisamos as iterações na Esponja de Menger, já que a mesma é criada por remoção mantendo o tamanhde sua aresta como a original. Lembrando que mesmo existindo a possibilidade de se criar muitos cubos é perceptível que a resistência do material utiilizado limita o procedimento, no caso de papel 75 g/m^2 é limitado a 4 iterações com 160 mil cubinhos unitários. Um fator positivo para utilização do papel como material para a atividade é seu baixo custo e facilidade de execução em comparação com outros possíveis materiais,como por exemplo, isopor ou madeira. Cada folha de papel gera em média 5 unidades cúbicas básicas.

Em carater experimental esta atividade foi realizada em uma classe do 2º ano do Ensino Médio em um período de 100 minutos e teve uma aceitação positiva dos alunos com construções individuais após uma explanação informal.

4.3 Fractais Naturais

Quando Mandelbrot propôs o conceito de fractal como abordado na introdução ele analisou a costa Britânica para mostrar a importância desta nova geometria. Além deste exemplo a geometria fractal está presente em diversas formas na Natureza, como por exemplo:

- os galhos de uma árvore
- as flores da couve-flor e do brocolis
- as folhas da samambaia
- curso dos rios

Além de muitos outros exemplos, como exposto em *Fractals Everywhere* [1] e *The Fractal Geometry of Nature* [9]. É produtivo ao aluno este conhecimento com aplicação cotidiana e observação do mundo que o rodeia, pois não se trata apenas de um conceito matemático, mas de um conceito de percepção do mundo, onde pode observar a matemática descrevendo o mundo que o rodeia.

Os fractais naturais, ou aleatórios [1] não primam pela total similaridade e sim pela quase similaridade podendo ter partes rotacionadas, diminuídas ou aumentadas, modificados para ficarem semelhantes ao que é natural. Uma grande aplicação desses tipos de fractais é a computação gráfica criando com grande fidelidade os objetos naturais por meio de códigos programáveis, não é surpresa a utilização desta informação como incentivador ao estudo de fractais, pois estes cálculos estão presentes na maioria quase total de jogos computacionais com imagens da natureza, por exemplo a Fig. 4.4.

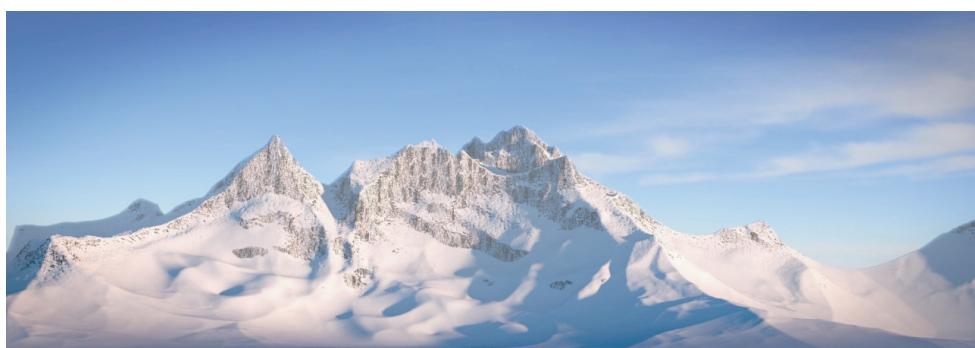


Figura 4.4: Paisagem criada em Computação Gráfica

Propomos dois trabalhos com finalidades parecidas, mas âmbitos diferentes, no primeiro temos uma situação aplicada totalmente em sala e outro que envolve um trabalho de campo. O que motivou a criação da proposta do trabalho de campo foi o questionamento de vários alunos com o conteúdo sempre dentro de sala e sem conectividade com suas vivências externas a escola. Partindo do princípio que dificuldades

poderão ser encontradas em diversos locais relacionadas com o deslocamento de alunos, a segunda atividade pode ser aplicada em classe excluindo o trabalho em campo e comparando as mesmas somente em fotografias, lembrando que esta atitude prejudica o interesse e motivação dos alunos.

4.3.1 Coleta e Exposição dos Fractais Naturais e suas dimensões

Proposta organizacional: Equipes com 4 alunos com funções diversas, tais como, coleta, visita, cálculos, organização.

Conteúdo aplicado: unidades de medida, progressões, proporção, sequências.

Proposta da atividade em passos é:

Passo 1 Coletar informações entre os meios físicos naturais de diversos tipos de fractais aleatórios, como por exemplo: brócolis, couve flor, galhos de árvores, fotografias de relâmpagos, samambaias.

Passo 2 Identificar a autossimilaridade dos fractais coletados.

Passo 3 Selecionar parte do objeto de estudo e calcular o fator de ampliação da parte selecionada para o todo.

Passo 4 Calcular quantas partes da seleção são necessárias para ter o todo.

Passo 5 Calcular a dimensão fractal de cada fractal natural analisado.

Passo 6 Expor os resultados em cartazes, pois a divulgação de descobertas e dependendo do ambiente escolar a demonstração de saberes motivam o aluno ao estudo.

Para a apresentação podem-se expor folhas, plantas e animais, como dito anteriormente podem ser expostas também fotografias com fenômenos naturais, lembrando que o material concreto sempre cria um interesse maior.

4.3.2 Atividade: Dimensão Costeira

Proposta organizacional: Equipes com 4 alunos com funções diversas, tais como, coleta, visita, cálculos, organização.

Conteúdo aplicado: Semelhança, proporcionalidade, congruência.

Aplicar os seguintes passos organizacionais:

Passo 1 Escolher uma região naturalmente delimitada, por exemplo rios, lagos, caminhos de animais, região costeira, ilhas, se possível mensurar esta área ou coletar informações com habitantes locais.

Passo 2 Coletar de imagens aéreas desta região, tais como, mapas, aerofotografias, imagens de satélites.

Passo 3 Mensurar os materiais coletados.

Passo 4 Verificar diferença entre os materiais coletados para a realidade de uma área.

Passo 5 Calcular discrepâncias e concluir quais são os motivos delas ocorrerem.

Por serem materiais diversos ocorrerão variações nas medidas coletadas e estas discrepâncias ajudam a compreender a questão de escala que tanto vemos Mandelbrot defender. Fazer o elo entre o prático e o que Mandelbrot pregava é o início de um aprofundamento e entendimento conceitual.

Consulta de informações em diferentes meios podem ser métodos válidos, em troca de um trabalho de campo, já que mesmo entre governos as discrepâncias ocorrem, como por exemplo ao analisar a fronteira de Portugal com a Espanha, encontram-se diferenças entre os dois países causadas pelas escalas adotadas, como visto em [12]. Logo uma consulta ampla e diversificada pode surtir o mesmo resultado que a comparação entre medições realizadas pelos alunos in loco a medições em mapas e fotos.

4.4 Área e perímetro de fractais geométricos

Quando analisamos os livros didáticos sobre os conceitos da geometria fractal é observado uma abordagem recorrente com cálculos relacionados a sequências, perímetros e áreas basicamente, além de textos introdutórios e incentivadores. A construção de tabelas comparativas para demonstrar a tendência de cada operação também é explorada. Toda esta abordagem é com certeza válida e necessária, mas não suficiente. A proposta seguinte segue este mesmo rito, apenas com maior aprofundamento e análise não apenas como meio de inserção de conceitos desconexos. Com intensão de exemplificar montaremos algumas atividades, estas podem ser utilizadas como exposição ou resolução em classe. Para uma atividade rica e proveitosa veremos alguns conceitos de progressões para podermos aplicá-los. Progressões são sequências numéricas com determinada regra ou formulação dentre estas existem as progressões aritméticas, chamada de PA, e progressões geométricas, chamada de PG, para nosso trabalho utilizaremos apenas os conceitos de PG. Nas progressões geométricas podemos ter dois tipos em relação ao termo geral, sendo esta convergente ou divergente, dependendo da razão da PG, se esta é $0 < q < 1$ ou $q > 1$, respectivamente. Com o conceito de PG convergente podemos calcular a soma de seus termos, mesmo que esta seja uma PG com infinitos termos. Abaixo estão as fórmulas utilizadas pelos alunos do Ensino Médio para o cálculo do termo geral da PG e a soma de seus termos.

Termo Geral

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (4.3)$$

Soma dos Termos - Infinita e Convergente

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} \quad (4.4)$$

Soma dos Termos - Finita

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (4.5)$$

4.4.1 Atividade: Perímetro e Área do Triângulo de Sierpinski

Conteúdo aplicado: perímetro, área, volume, sequências, conceito de limite, conceitos de fração, progressões.

A partir da análise do Triângulo de Sierpinski temos por observação que a cada iteração seu perímetro cresce e sua área diminui, a proposta desta atividade é fazer com o aluno consiga visualizar e compreender que em infinitas iterações temos um perímetro tendendo ao infinito com área tendendo a zero.

Considerando um triângulo equilátero representando o Triângulo de Sierpinski em iteração zero, temos que este triângulo é a nossa base de estudo com lado l e área A .

Ao analisar a próxima iteração e constatamos que temos a divisão do triângulo original em 4 triângulos iguais, em se tratando de um Triângulo de Sierpinski três deles serão considerados, logo o novo objeto possui área igual a $\frac{3}{4}A$. Como a cada nova iteração temos que realizar o mesmo procedimento, a divisão em quatro triângulos considerando três, temos que na próxima iteração será $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot A$. Após esta análise, vemos que em cada iteração existe um produto da área da iteração anterior pelo fator $\frac{3}{4}$, deste modo trata-se de uma progressão geométrica e assim podemos relacionar os termos e suas posições com as iterações, seu fator $\frac{3}{4}$ com a razão da PG.

Área do triângulo de Sierpinski

Analisando os conceitos de PG com o comportamento da área Triângulo de Sierpinski, temos que:

- A razão $q = \frac{3}{4}$, pois a cada iteração temos $\frac{3}{4}$ vezes a área da iteração anterior;

- O primeiro termo $a_1 = A$, pois é a primeira área considerada, área do triângulo original;
- O termo geral a_n nos fornece qual é a área do triângulo de Sierpinski na iteração n .

Aplicando a fórmula do termo geral da PG, temos:

$$a_n = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

Logo, como iniciamos pela iteração zero temos $n = k + 1$

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot A \quad (4.6)$$

A Equação 4.6 representa a área do triângulo de Sierpinski em qualquer iteração o que podemos visualizar a partir da Tabela 4.2. Deixamos a critério do professor a abordagem da atividade aos alunos em forma de Tabela ou conceitos de PG.

Perímetro do Triângulo de Sierpinski

Observando a relação entre o comprimento do lado de cada triângulo e conceito de PG, temos:

- A razão $q = \frac{1}{2}$, pois a cada iteração os triângulos criados tem metade do tamanho do lado do triângulo criado na iteração anterior.
- Considerando o lado como l temos que $a_1 = l$
- O termo geral a_n resultará no lado do triângulo criado na iteração n .

Utilizando a Equação 4.3, temos:

$$a_n = l \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Logo, da mesma forma temos $n = k + 1$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^k l$$

Até o momento foi trabalhado a relação do lado de cada triângulo com as iterações, vamos analisar o perímetro a cada iteração. A partir do triângulo original temos perí-

metro de $3l$, logo para as próximas iterações temos que a cada iteração o perímetro de cada triângulo é igual a $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k l$, complementando com o observado acima.

Como a cada iteração a quantidade de triângulos cresce na forma 3^n , temos que para encontrarmos o perímetro do triângulo de Sierpinski a seguinte equação:

$$P_n = 3^n \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k l = 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n l$$

A tabela 4.2 contem as iterações iniciais, tal como a generalização da área e perímetro do Triângulo de Sierpinski, como vistas acima. É importante que o professor neste momento explique que neste caso temos um perímetro tendendo ao infinito e uma área tendendo a zero, uma maneira didática de apresentação para alunos do Ensino médio seria realizando os cálculos para a área e perímetro utilizando as equações encontradas, como por exemplo, que calculando a área na 17^a iteração resulta em aproximadamente dois centésimos da área original, enquanto para o perímetro encontrariamos praticamente três mil vezes o perímetro original.

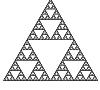
ITERAÇÃO	NÚMERO DE TRIÂNGULOS	ÁREA DE CADA TRIÂNGULO	SOMA DAS ÁREAS	COMPRIMENTO DO LADO DE CADA TRIÂNGULO	PERÍMETRO DE CADA TRIÂNGULO	PERÍMETRO TOTAL
 0	1	A_0	A_0	l	$3.l$	$3.l$
 1	3	$\frac{A_0}{4}$	$\frac{3}{4} \cdot A_0$	$\frac{l}{2}$	$\frac{3}{2} \cdot l$	$3 \cdot \frac{3}{2} \cdot l$
 2	3^2	$\frac{A_0}{4^2}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot A_0$	$\frac{l}{2^2}$	$\frac{3}{2^2} \cdot l$	$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot l$
 3	3^3	$\frac{A_0}{4^3}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot A_0$	$\frac{l}{2^3}$	$\frac{3}{2^3} \cdot l$	$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot l$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
 n	3^n	$\frac{A_0}{4^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot A_0$	$\frac{l}{2^n}$	$\frac{3}{2^n} \cdot l$	$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot l$

Tabela 4.2: Triângulo de Sierpinski - Área e Perímetro

4.4.2 Atividade: Perímetro e Área do Floco de Neve

Para iniciarmos é necessário analisar o Floco de Neve de Koch (Fig. 2.3) em relação as suas iterações. Como primeira forma temos um triângulo equilátero com lado l e área A .

Para sua construção, analogamente a curva de Koch, a partir do triângulo equilátero temos os seguintes passos:

- Dividir cada lado l em três segmentos iguais;
- Criar o triângulo equilátero tendo como base e dimensão do lado o segmento central da divisão ddo passo anterior;
- Remover a base dos triângulos criados no passo 2.
- Repetir os passos anteriores para cada segmento criado.

Perímetro do Floco de Neve de Koch

Observando os passos acima e a figura 2.3 temos que primeiramente, fazer os cálculos em relação do segmento l , que representa apenas um lado do triângulo equilátero.

Para cada iteração temos uma divisão em três segmentos transformando em quatro segmentos, assim para n iterações teremos 4^n segmentos de $\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot l$ cada, totalizando $\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l$. Como estamos tratando do Floco de Neve de Koch temos um perímetro de:

$$P_n = 3l \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Utilizando dos conceitos de PG, temos que para calcular o perímetro do Floco de Neve de Koch a razão $q = \frac{4}{3}$, como $q > 1$ esta PG é divergente, logo seu termo geral, e por consequência seu perímetro tende ao infinito.

Área do Floco de Neve Koch

Considere inicialmente que o triângulo equilátero tem lado l , assim sua área é igual a $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, sabemos que na próxima iteração o lado de cada triângulo criado é $\frac{l}{3}$, sendo que cada triângulo formado com área igual a $\frac{(l/3)^2\sqrt{3}}{4}$ e assim $\frac{1}{9} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ e desta forma temos que cada triângulo criado tem área igual à $\frac{1}{9}$ da área do triângulo anterior, a figura 4.5 mostra esta relação. Assim podemos construir as seguintes relações:

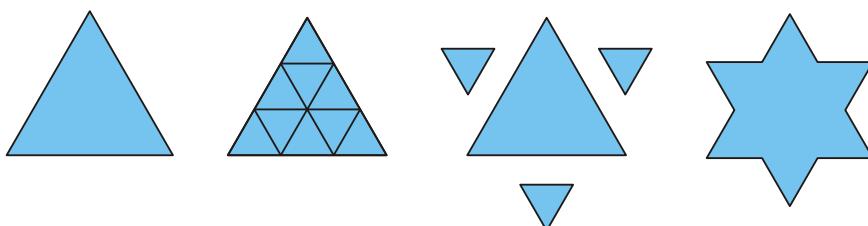


Figura 4.5: Cálculo da área do Floco de Neve de Koch

Considerar A_0 como área inicial, na próxima iteração temos 3 triângulos com $\frac{1}{9}A_0$, logo a área para a segunda iteração é $A_2 = A_0 + 3 \cdot \frac{1}{9}A_0$

A partir da segunda iteração temos uma recorrência com o aumento de 4 triângulos com $\frac{1}{9}A_{n-1}$, assim a área da próxima iteração seria:

$$A_3 = A_0 + 3 \cdot \frac{1}{9}A_0 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{9^2}A_0$$

Nota-se que se continuarmos com as iterações, a área do Floco de Neve de Koch a partir da segunda iteração tem aumento de $\frac{4}{9}$ em relação a iteração anterior. Sendo assim para calcularmos a área do Floco de Neve podemos considerar que a partir da segunda iteração temos uma PG infinita convergente, pois a razão $q = \frac{4}{9} < 1$. Aplicando a fórmula 4.4 a partir da segunda iteração e considerando $a_1 = 3 \cdot \frac{1}{9}A_0$, temos:

$$S_n = \frac{3 \cdot \frac{1}{9}A_0}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3}{5}A_0$$

como consideramos a partir da segunda iteração, temos

$$S_{Floco} = A_0 + \frac{3}{5}A_0 = \frac{8}{5}A_0 \quad (4.7)$$

como

$$A_0 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

fazendo a substituição em 4.7, temos

$$S_{Floco} = \frac{8}{5} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{Floco} = \frac{2l^2\sqrt{3}}{5}$$

Para uma melhor visualização dos alunos podemos delitar o floco de neve por um círculo e mostrar aos alunos que mesmo utilizando de uma iteração muito grande este não deixa de conter no círculo.

CAPÍTULO 5

Conclusão

Uma das maiores dificuldades enfrentadas pelos professores do Ensino Médio é mostrar ao aluno o prazer de se aprender matemática, um conteúdo mais visual e incluso em seu ambiente cotidiano pode ser um grande motivador aos estudos matemáticos.

Quando inserida nas aulas de matemática do ensino médio a geometria fractal pode ser um tema motivador e a conexão de vários tópicos matemáticos. A aplicabilidade do estudo dos fractais em áreas como a arte, a ciência e a tecnologia podem impulsionar o interesse pelo tema. Também, o fato das noções de forma e dimensão estarem muito presentes na natureza, permite uma abordagem simples a esta geometria, em que as propriedades da recursividade e autossimilaridade são facilmente entendidas.

As atividades são uma oportunidade de reflexão sobre a importância da matemática, e a partir destas podem ser criadas outras problematizações, tais como construção de outros fractais manualmente e a utilização de softwares de geometria dinâmica.

A aplicação do conteúdo em diversos formatos, tais como, cartazes, construções e experimentos são apenas algumas das utilizações que modificam a rotina de sala e agregam uma visão diferenciada do que é rotineiro. A utilização de construções em feiras e exposições sempre criam um efeito de questionamento sobre a geometria fractal e este efeito é um meio promissor a aquisição de novos conhecimentos pelos alunos, já podemos introduzir diversos contúdos do ensino de matemática em paralelo com a geometria fractal.

Modificar o conceito de que a matemática é rígida e imutável perante os alunos é uma base a ser analisada, por ser inovadora a geometria fractal pode ser um bom contra exemplo a esses conceitos.

A geometria fractal apesar de ser de suma importância, ainda é um tema novo em relação aos demais conteúdos matemáticos, este fato dificultou o trabalho. Apesar de

existir um grande quantidade de material na internet, não existem trabalhos específicos para a aplicação em sala.

Pesquisando sobre objetos fractais e realizando suas construções adquiri uma experiência na utilização destes e uma abordagem diferenciada sobre diversos assuntos em conexão com a matemática, alem de enriquecer a prática em sala.

Enfim espero seguir pesquisando e descobrindo novos meios de aplicação da geometria fractal em sala de aula, fato gratificante nesse vasto mundo dos fractais.

APÊNDICE A

Livros Analisados

58. Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais — objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos **2** e **3** para cada cópia dos triângulos obtidos no passo **3** (figura 3).



Figura 1



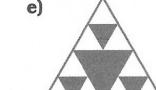
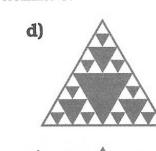
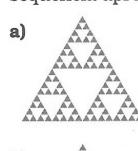
Figura 2



Figura 3

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da sequência apresentada acima é:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Figura A.1: Conexões com a Matemática, Volume 1, p.365



Figura A.2: Contexto e Aplicações, Volume 3, p.100

Atividades

aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com base 15 unidades de área, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?" corresponde a $x^3 - 15x = 4$, e, aplicando-se uma fórmula deduzida por ele, apareceria a solução 4, obtida da expressão $\sqrt[3]{2} - \sqrt{-121} + \sqrt[3]{2} + \sqrt{-121}$! Cardano se perguntava como um número real poderia se originar de uma expressão que continha raízes de números negativos se estas não existiam. O mais curioso é que era possível operar com esses números "esquisitos", mesmo que não tivessem sentido, pois matematicamente os problemas davam certo.

Mais tarde, o matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1572) estudou o trabalho de Cardano e verificou que realmente esses números "funcionavam". Sua representação sofreu variações no decorrer do tempo, até que foram escritos na forma de produto por $\sqrt{-1}$, como, por exemplo, $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$. No século XVIII, Euler introduz o símbolo i para representar a raiz quadrada de -1 . Assim, $\sqrt{-121}$ passa a ser expresso por $11i$. Finalmente, a representação geométrica dos números complexos elaborada pelo matemático, astrônomo e físico alemão Gauss (1777-1855), no final do século XVIII, tornou mais significativo seu estudo e aplicabilidade.

Neste capítulo estudaremos a construção do conjunto dos números complexos, definindo suas operações e representações.

1. Em *Ars Magna*, Cardano apresenta uma das raízes da equação de 3º grau $x^3 + ax + b = 0$, dada por

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2} - \sqrt[3]{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}.$$

Essa fórmula foi sugerida a ele por Tartaglia, outro famoso matemático italiano dessa época.

a) Mostre como Cardano se deparou com o número $\sqrt{-121}$ ao tentar encontrar as raízes da equação que resolvia o problema do cubo e do paralelepípedo mencionado.
b) Verifique que 4 é raiz da equação.

2. Em 1545, Cardano propôs em um de seus livros o seguinte problema: Divida 10 em duas partes de modo que seu produto seja 40.
a) Registre uma equação que traduz esse problema.
b) Resolva a equação obtida, mantendo as propriedades que são válidas para os números reais.
c) Expressse as raízes na forma proposta por Euler.

3. Em 1975, Mandelbrot estudou a equação $X_{n+1} = (X_n)^2 + Z$, na qual $Z = a + bi$, $i^2 = -1$ e $n = 1, 2, 3, \dots$ Através de um programa recursivo de computador (um programa em loop), Z variou e o computador imprimiu na tela os pontos X_{n+1} . Constatou que, para cada valor de Z , uma figura era impressa na tela. Ampliando as figuras descobriu que continham cópias aproximadas de si mesmas (auto-similaridade).

Exemplo extraído de <http://br.geocities.com/silvandabr/complexo.html>.
Acesso em 18/5/2007.

Você pode, com os recursos matemáticos que conhece até agora, desenvolver pelo menos um pouco essa seqüência. Comece considerando $X_0 = 0$, depois, faça $X_1 = (X_0)^2 + Z$ e assim por diante. Quando aparecer i , substitua por $\sqrt{-1}$, e i^2 por -1 . Simplesmente anote os resultados e observe a seqüência encontrada. Ela dá origem ao conjunto de Mandelbrot e esse será seu primeiro contato com a matemática sobre a qual essa teoria foi construída.

Figura A.3: Contexto e Aplicações, Volume 3, p.101

Atividades

1. Os fractais são bons exemplos de aplicação do conceito de limite. Há um chamado *Espuma de Menger*, obtido a partir de um cubo deste modo: dividindo-o em 27 cubinhos de arestas com $\frac{1}{3}$ do tamanho das arestas originais, removem-se a peça central do cubo e cada um dos 6 cubos centrais de cada face (ou seja, 7 dos 27 cubos são removidos). A partir desse estágio, repete-se o processo com cada um dos 20 cubos restantes, e assim por diante, indefinidamente. Acompanhe os três primeiros estágios, cujo processo é repetido infinitamente, gerando todos os estágios posteriores.



Primeiro estágio Segundo estágio Terceiro estágio

O paradoxo associado a ele é o seguinte: observe que a cada estágio perde-se volume com a retirada dos cubos, mas ganham-se áreas, pois vão aparecendo cada vez mais "túneis". Vamos comprová-lo.

Chamando de a a medida da aresta inicial:

- calcule a área total do cubo inicial;
- calcule a área total após o primeiro estágio;
- compare-as (qual é a maior?);
- calcule o volume da esponja após o primeiro estágio em função do volume inicial do cubo;
- compare-os (qual é maior?).

Agora, reflita: Quando o número de estágios tende a infinito, o que acontece com a área e com o volume da esponja?

Assim, podemos definir a Espuma de Menger como *um objeto geométrico que tem volume zero e área infinita*.

Figura A.4: Contexto e Aplicações, Volume 3, p.197

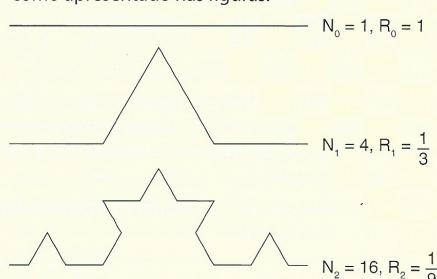
10 O termo “fractal” foi criado em 1975 por Benoit Mandelbrot, pesquisador da IBM e autor de trabalhos pioneiros sobre fractais. A característica principal de um fractal é a repetição de padrões. Por exemplo, partindo de um triângulo equilátero, dividimos cada lado em três partes iguais e desenhamos, externamente ao triângulo original, um novo triângulo equilátero em que um dos lados é o segmento central obtido dessa divisão; a seguir apagamos o segmento central. Repetimos esse procedimento para cada lado do polígono obtido com o primeiro procedimento, e assim por diante. Consideremos todos os infinitos polígonos obtidos dessa maneira, tal que a sequência formada pelos números de lados seja crescente.



O número de lados do 6º polígono dessa sequência é:
a) 192 b) 768 c) 1.264 d) 2.288 e) 3.072

Figura A.5: Matemática Paiva, Volume 1, p.239

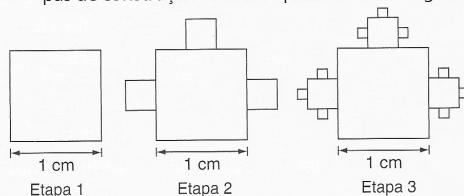
36. (Vunesp-SP) Considera-se um segmento de reta, N_0 , de tamanho $R_0 = 1$. Ele é dividido em três partes iguais, e a parte do meio é substituída por dois segmentos de tamanho $R_1 = \frac{1}{3}$, na forma de um triângulo equilátero, resultando em $N_1 = 4$ segmentos de reta. Repetindo-se este procedimento para todos os segmentos de reta, obtém-se $N_2 = 16$ e $R_2 = \frac{1}{9}$, tal como apresentado nas figuras.



Quais são os valores que se obtêm para N_3 e R_3 ? Após n repetições desse processo, qual será o comprimento R_n dos segmentos de reta e quantos segmentos de reta N_n existirão?

Figura A.6: Matemática Ciências e Aplicações, Volume 1, p.271

46. (UF-RJ) A região fractal F , construída a partir de um quadrado de lado 1 cm, é constituída por uma infinidade de quadrados e construída em uma infinidade de etapas. A cada nova etapa consideram-se os quadrados de menor lado (ℓ) acrescentados na etapa anterior e acrescentam-se, para cada um destes, três novos quadrados de lado $\frac{\ell}{3}$. As três primeiras etapas de construção de F são apresentadas a seguir.



Calcule a área de F .

Figura A.7: Matemática Ciências e Aplicações, Volume 1, p.272

1. (UFPR) Uma figura é construída a partir de um segmento de reta de comprimento l , da seguinte maneira (veja ilustração abaixo): na 1^a fase, divide-se o segmento em três partes iguais, constrói-se um triângulo equilátero cuja base seja o segmento do meio e, em seguida, apaga-se a base; nas fases seguintes, repete-se a construção da 1^a fase em cada um dos segmentos obtidos na fase anterior. Indicando por S a soma dos comprimentos de todos os segmentos obtidos na 5^a fase, calcule $\frac{aS}{b}$.

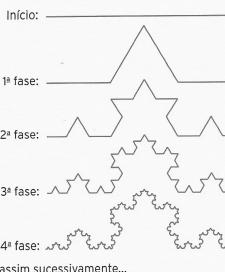


Figura A.8: Matemática Ensino Médio, Volume 2, p.245

PARA SABER MAIS

A matemática do delírio

Segundo o velho Euclides, matemático grego que viveu cerca de 2 200 anos atrás, existem figuras que não têm dimensão, ou melhor, têm dimensão 0. É o caso dos pontos, como este ponto final (.). Uma linha, por sua vez, é algo com uma única dimensão. Já a capa de *Superinteressante*, de acordo com a geometria euclidiana, tem duas dimensões. Pois, para conhecer qual a sua área, é necessário multiplicar dois números —

Figura A.9: Matemática Ensino Médio, Volume 2, p.247

o do comprimento pelo da largura. Do mesmo modo, um bloco possui três dimensões, porque precisamos multiplicar três números (comprimento, largura e altura) para saber qual o seu volume. Euclides estava certo. Mas não resolveu todo o problema.

Os contornos das montanhas, a superfície dos pulmões humanos, a trajetória das gotículas de água quando penetram na terra — existe uma infinidade de fenômenos na natureza que, graças à sua irregularidade, não podem ser descritos por essa geometria toda certinha. É preciso apelar para complicados cálculos que resultam nas chamadas dimensões fracionárias — como a dimensão 0,5, por exemplo, típica de um objeto que é mais do que um simples ponto com dimensão zero, porém menos do que uma linha com dimensão 1 (veja gráfico a seguir). Só a chamada geometria dos fractais consegue descrevê-lo.

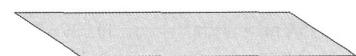
Essa nova área das ciências matemáticas vem tendo uma enorme aplicação. Para os biólogos, ajuda a compreender o crescimento das plantas. Para os físicos, possibilita o estudo de superfícies intrincadas. Para os médicos, dá uma nova visão da anatomia interna do corpo. Enfim, não faltam exemplos. Um dos mais belos — e, sem dúvida, o mais colorido — é o uso dos fractais na arte. Quando os computadores são alimentados com equações, eles criam magníficos desenhos abstratos. É o que você poderá ver nas ilustrações do inglês Greg Sams e no trabalho do grupo Fractarte, formado por três pesquisadores paulistanos.

Duas maneiras de descrever o mundo

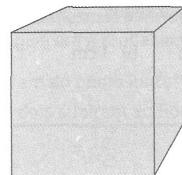
A geometria euclidiana...

Um ponto tem dimensão 0. Ele não tem comprimento ou largura. É impossível medi-lo.

Uma reta — a distância mínima entre dois pontos — tem uma única dimensão. Porque só pode ser medida de uma maneira: pelo seu comprimento.



Um plano, como o da tábua da sua mesa, tem duas dimensões. A sua área é a multiplicação de dois números: o do comprimento e o da largura.



Já **um cubo** seria o máximo, com suas três dimensões: largura, comprimento e profundidade que, multiplicados, resultam em sua área.

... e a dos fractais

Existem objetos que não podem ser descritos por retas, como essa acima.

Então, é como se fosse retirado um pedaço da reta.

E depois mais outros pedaços.

A operação de esburacar a reta seria repetida inúmeras vezes...

... até se ter uma ideia do que aconteceria se fosse quebrada infinitas vezes.

Sobraria, então, o que se chama "Poeira de Cantor", idealizada pelo matemático alemão Georg Cantor. Seria mais do que um único ponto (dimensão 0) e menos do que uma reta (dimensão 1); uma dimensão 0,5, por exemplo. Existem, ainda, objetos entre a reta e o plano. E objetos entre o plano e o cubo. Basta imaginar essas figuras esburacadas, como a reta que virou poeira.

Equações e muita imaginação podem criar coloridas galáxias

Planetas com florestas estranhas, mares cor de laranja e montanhas com milhares de picos pontiagudos — são alguns dos mundos imaginados pelo artista gráfico Greg Sams, que trabalha em Londres, na Inglaterra. Na verdade, ele faz uma espécie de colagem com o auxílio do computador, como se recortasse pedaços redondos de fractais para criar um planeta ou uma estrela de contorno regular.

"O que mais me fascina é procurar novos padrões de um mesmo fractal para construir as minhas imagens", diz o artista. Isso porque quanto mais você se aproxima de um fractal, mais detalhes você consegue enxergar nele. Parece não ter fim — é uma visão do infinito. Desse modo, Sams vai ampliando determinada área dezenas ou centenas de vezes — e sempre observa desenhos diferentes.

Diferentes, porém parecidos. Pois não basta ter dimensão fracionária para ser um fractal. É preciso que o objeto seja autossemelhante: suas partes devem se parecer muito entre si e representar o todo. Ou seja, um fractal pode ser comparado a uma couve-flor — se alguém cortar um pedaço dela, verá que ele tem a cara da verdura inteira. A terceira e última característica de um fractal é ser fruto de um processo iterativo. No jargão dos matemáticos, isso significa repetir uma fórmula inúmeras vezes. É dessa repetição que surge a imagem.

A viagem da cabeça dos brasileiros parece o efeito de um alucinógeno

A arte com fractais pode ser um caminho para os matemáticos explicarem as suas ideias. Isso é o que almejam três pesquisadores da Universidade de São Paulo. Rodrigo de Almeida Siqueira, 23 anos, cursa Engenharia Elétrica e faz pesquisas na área de multimídia. Alexandre Dupont, 25 anos, é estudante de Engenharia e de Matemática. A terceira figura é Humberto Rossetti Baptista, 23 anos, formado em Ciência da Computação, que vive no maior corre-corre por causa de uma inacabada tese de mestrado. Cujo assunto, claro, é teoria dos fractais — o elo entre os três integrantes do grupo Fractarte.

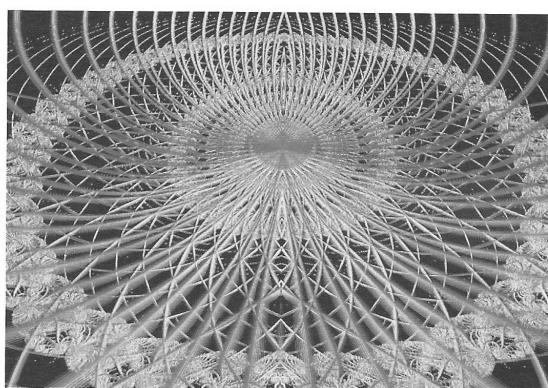
"Os fractais viraram uma espécie de moda", observa Dupont. "Muita gente está fazendo coisas com fractais. No entanto, quase ninguém explica o que são." Daí surgiu a ideia da exposição "Janelas para o Infinito" (...).

Dizem que uma imagem pode substituir mil palavras. No caso, um único fractal pode ocupar o espaço de 100 000 palavras na memória do computador. E o objetivo dos pesquisadores é de que ele sirva por outras 100 000 palavras para mostrar ao público leigo aquilo que passa na cabeça de um matemático. "Muitas vezes, os matemáticos perdem anos tentando encontrar ou decifrar uma fórmula sem finalidade prática alguma — ao menos imediata", diz Rossetti Baptista. "Fazem isso porque a matemática é lúdica; com suas ideias abstratas; e é um pouco desse lado lúdico que as pessoas podem experimentar ao ver uma obra cuja base é uma equação."

Na opinião do professor José Teixeira Coelho Neto, da Escola de Comunicação da USP, a linguagem dos fractais tem tudo a ver com o presente. "Há muito tempo existe uma discussão na Arquitetura entre modernos e pós-modernos", exemplifica. Segundo ele, os modernos encaram os ângulos retos, a geometria *clean*, como algo mais evoluído, enquanto os pós-modernos brigam contra esse conceito. "Assim, a geometria dos fractais vem como um reforço para o pós-modernismo."



SPL/LatinStock



SPL/LatinStock

Fractais obtidos pela aplicação das fórmulas matemáticas.

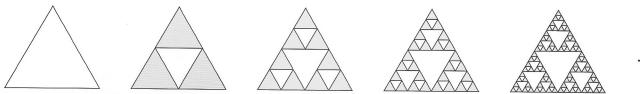
Fonte: OLIVEIRA, Lúcia Helena de. Revista Superinteressante, ano 8, n. 10, São Paulo, Abril, out. 1994, p. 23-27.

Exemplo 5

Alguns padrões geométricos também estão relacionados com funções. O padrão que vamos descrever é conhecido como **tapete de Sierpinski** e é construído a partir de uma regra que se repete indefinidamente.

Tudo começa com um triângulo equilátero, dividido em 4 triângulos equiláteros congruentes, cujo triângulo do centro é desconsiderado, restando dessa forma apenas 3 triângulos equiláteros. Veja ao lado.

Repete-se a divisão de cada triângulo restante em 4 triângulos equiláteros congruentes, desconsiderando sempre o triângulo do centro:



O número de triângulos que compõem o tapete em cada etapa do processo é uma função do número da etapa de sua construção?

Etapa	1	2	3	4	...
Número de triângulos	1	3	9	27	...

Quantos triângulos haverá na décima etapa da construção do tapete?
É possível desenhar tantos triângulos?

Figura A.12: Matemática Ensino Médio, Volume 3, p.73

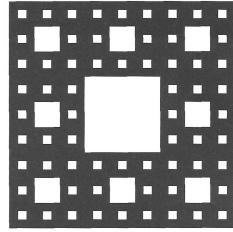
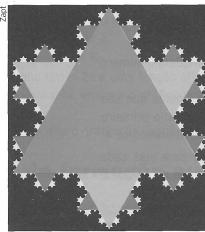
UNIDADE
6

Sequências, progressão aritmética e progressão geométrica

Optamos por inserir esta unidade sobre sequências numéricas e progressões antes das funções exponencial e logarítmica porque, dessa forma, é possível:

- relacionar o estudo das funções e de função afim com sequências e progressões;
- Nesta unidade, vamos estudar algumas funções especiais, conhecidas como **sequências numéricas**, com atenção às **progressões aritméticas** e **progressões geométricas**. A compreensão dessas sequências facilitará o estudo, nas próximas unidades, das funções exponencial e logarítmica.
- associar a ideia de crescimento ou decrescimento exponencial por meio de progressão geométrica, cujos padrões permitem um contexto de aprendizagem que favorece a maior compreensão de função exponencial e o conceito de logaritmo.

1. Sequências



As figuras acima são conhecidas como **curva do fio de neve de Koch** e **tapete de Sierpinski**, respectivamente. A primeira é feita a partir de uma sequência de construções nos lados de um triângulo equilátero e a segunda, no interior de um quadrado.

O matemático Helge von Koch, em 1904, obteve a primeira dessas figuras a partir de um triângulo equilátero de lado 1. Observe as três primeiras figuras da sequência.



Você consegue descobrir como a segunda e a terceira figuras foram obtidas a partir da primeira? Acompanhe a explicação.

Consideremos um triângulo equilátero de lado 1. Dividimos cada um de seus lados em três partes iguais.

No terço médio de cada lado, construímos novos triângulos equiláteros. O resultado é uma linha poligonal fechada de 12 lados.

No estágio seguinte, fazemos a divisão de cada um dos 12 lados da poligonal em três partes iguais e construímos novos triângulos equiláteros sobre os terços médios, e assim sucessivamente.

A medida do lado dos triângulos construídos em cada etapa forma uma sequência de números.

Como podemos descrever essa sequência?

PARA LER

Se você já está lendo o livro *O diabo das números*, de Hans Magnus Enzensberger (Cia das Letras), indicado na unidade 3, não deixe de ler a 5ª e a 6ª noites. Elas ajudarão você a pensar mais sobre as sequências que estudará neste unidade.

Figura A.13: Matemática Ensino Médio, Volume 3, p.141

Observe agora o que fez o matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969). Ele construiu seu "tapete" dividindo um quadrado de lado 1 em nove quadrados congruentes e retirando o quadrado central. Esse processo se repete em cada um dos quadrados restantes na etapa anterior.



Qual é a sequência dos números com as medidas dos lados dos quadrados retirados em cada etapa?

Para discutir problemas como esse é que vamos estudar, nesta unidade, sequências e progressões.

Uma **sequência numérica** é uma organização de números. As sequências podem ter ou não uma lei de formação e podem ser finitas ou infinitas.

Exemplos:

- (5, 5, 4, 8, 6, 9, 1, 2) é uma sequência finita dos algarismos que compõem o número de um telefone e não possui uma lei de formação.
- (4, 16, 64, ...) é uma sequência infinita de números naturais não nulos que são potências de 4. Essa sequência tem uma lei de formação bem simples: o primeiro termo é 4 e cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por 4.

As sequências que vamos estudar nesta unidade são infinitas e para elas cada número sucede o anterior de acordo com uma determinada regra, de tal modo que é sempre possível saber se um número pertence ou não à sequência.

Há muitas maneiras de construir sequências desse tipo, como por exemplo:

- Escolhemos um número para ser o **primeiro termo** da sequência: 5.

Adicionamos a ele um número qualquer e obtemos o segundo termo.

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 2 \\ \hline 7 \end{array}$$

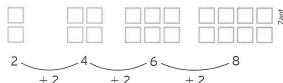
Para obter os demais termos, vamos adicionando sempre o mesmo valor ao número anterior.

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & \xrightarrow{+2} & 7 & \xrightarrow{+2} & 9 & \xrightarrow{+2} & 11 & \xrightarrow{+2} & 13 \end{array}$$

- Podemos também obter uma sequência multiplicando cada termo, a partir do primeiro, por um mesmo número.

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & \xrightarrow{\times 3} & 6 & \xrightarrow{\times 3} & 18 & \xrightarrow{\times 3} & 54 \end{array}$$

- É possível ainda organizar sequências numéricas representando-as por figuras colocadas em uma ordem que se repete segundo um padrão.



O padrão de repetição dessa sequência é o acréscimo de 2 quadradinhos à direita ou à esquerda do termo anterior, sendo o primeiro termo composto de 2 quadradinhos.

Podemos afirmar que:

Uma **sequência numérica infinita** é uma **função** cujo domínio é o conjunto dos números naturais não nulos.

Figura A.14: Matemática Ensino Médio, Volume 3, p.142

PARA SABER MAIS

Sequências na era do computador

De sequências de imagens como estas, definidas por regras muito simples, quando desenhadas à mão conseguimos obter apenas meia dúzia de termos, mesmo recorrendo aos melhores instrumentos de desenho. Mas, com um computador, o processo pode continuar indefinidamente, obtendo-se figuras com pormenores invisíveis a olho nu. Ora, afinal em cena a enorme capacidade de ampliação dos modernos computadores, que torna possível visualizar os termos avançados dessas sucessões, fornecendo imagens incrivelmente belas.

O limite de uma sequência de figuras como as anteriores é um **fractal**.

A Geometria fractal é um novo ramo da Matemática, ou uma nova forma de encarar a Ciência, que está permitindo explicar certos fenômenos de turbulência para os quais a Geometria euclidiana e a Física de Newton se mostraram ineficazes.

Uma imagem obtida por técnicas fractais pode se parecer com coisas estranhas – um vírus ao microscópio ou paisagens de outro planeta –, mas é sempre estranhamente bela.

As aplicações da noção de fractal revelaram-se vastíssimas em Meteorologia, Hidráulica, Física, Geologia, Geografia e até em História, Economia e Linguística. Os linguistas, por exemplo, começaram a aplicar a teoria dos fractais no estudo da evolução dos dialetos. Já na Medicina, foram reconhecidas características fractais em fenômenos cardíacos e pulmonares.

Imagens fractais também têm sido usadas em filmes de ficção, como em *O retorno de Jedi*.

Detalhe de um fractal de Mandelbrot.

Observe esse outro fractal: veja como parece um cenário de filme de ficção científica.

SEQUÊNCIAS, PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA | UNIDADE 6 | 169

Figura A.15: Matemática Ensino Médio, Volume 3, p.169

25 Desafio

Pode-se dizer que fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos. As imagens abaixo são do famoso Tapete de Sierpinski. Nele, partimos de um quadrado e realizamos iterações sucessivas. Na iteração 1, dividimos o quadrado em 9 quadrados iguais e retiramos o central. Em seguida, aplicamos esse mesmo procedimento aos 8 quadrados restantes, obtendo a iteração 2. Procedemos assim sucessivamente para obter as demais iterações.

Considere o lado do quadrado da iteração 0 com a medida de 1 unidade e observe o quadro abaixo.

Tapete de Sierpinski					
Figura	0	1	2	3	...
Iteração	0	1	2	3	...
Área da figura	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{512}{729}$...
Área em forma de potência	$\left(\frac{8}{9}\right)^0$	$\left(\frac{8}{9}\right)^1$	$\left(\frac{8}{9}\right)^2$	$\left(\frac{8}{9}\right)^3$...

Resposta esperada: diminui, pois a cada iteração são retirados quadrados da figura.

a) A cada nova iteração, a área da figura aumenta ou diminui? Justifique.

b) Escreva uma função f que represente a área da figura em função da iteração n correspondente. $f(n) = \left(\frac{8}{9}\right)^n$

c) Na função escrita no item b), determine o domínio e as variáveis dependentes e independentes.

d) Quais conjuntos numéricos ($\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ ou \mathbb{R}) podem ser definidos como contradomínio da função escrita no item b)? \mathbb{Q} ou \mathbb{R}

e) Considerando infinitas iterações, o que você acha que irá ocorrer com a área da figura?

Resposta esperada: a área da figura irá ficar cada vez menor.

55

Figura A.16: Novo Olhar Matemática, Volume 1, p.55

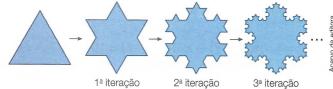
46 A sequência de figuras apresenta vários níveis na composição de um fractal.



- Utilizando malha quadrículada, construa a figura correspondente ao próximo nível dessa sequência. [Resposta no final do livro.](#)
- Escreva uma função que expresse o número de quadradinhos existentes na figura de nível x dessa sequência. $y = 5^{x-1}$
- Em qual nível da sequência a figura será formada por:
 - 3 125 quadradinhos? nível 6
 - 78 125 quadradinhos? nível 8

Figura A.17: Novo Olhar Matemática, Volume 1, p.169

33 O estudo dos fractais tem se revelado de grande importância em vários campos científicos, como na Biologia e Meteorologia. Os fractais são estruturas geométricas complexas que em geral seguem uma ordem. Um exemplo de fractal é o chamado flocos de neve, que recebe esse nome devido a sua semelhança com um flocos de neve natural. Esse fractal pode ser construído a partir de algumas iterações em um triângulo equilátero. Na 1^a, basta dividir cada lado do triângulo equilátero em três partes iguais e, sobre a parte central de cada lado, construir outro triângulo equilátero. A 2^a iteração consiste em dividir cada lado da nova figura em três partes iguais e, sobre a parte central, construir um novo triângulo equilátero, e assim sucessivamente.



O perímetro da figura obtida em cada iteração pode ser calculado pela fórmula $P = 3\ell \left(\frac{4}{3}\right)^n$, em que ℓ é a medida do lado do triângulo equilátero inicial e n é o número de iterações realizadas.

- Considerando o triângulo inicial com iteração zero e lado medindo 1 unidade, determine o perímetro da figura obtida na:
 - 1^a iteração 4 unidades
 - 3^a iteração $\frac{64}{9}$ unidades
 - 7^a iteração $\frac{16384}{729}$ unidades
- A partir da 2^a iteração o perímetro da figura obtida será maior que o triplo da inicial? Se necessário, utilize $\log_2 2 = 0,631$. [A partir da 4^a iteração.](#)
- Em sua opinião, o que ocorrerá com o perímetro da figura ao realizarmos cada vez mais iterações?
- Junte-se a um colega e pesquise acerca dos fractais na natureza. Em seguida, apresentem os resultados à turma. [Resposta pessoal.](#)

Figura A.18: Novo Olhar Matemática, Volume 1, p.185

5
**POLINÔMIOS E
EQUAÇÕES POLINOMIAIS**

INTRODUÇÃO

Em diversos elementos da natureza, como o contorno das montanhas, o formato das nuvens, as folhas das árvores e os rios, observamos a presença de formas irregulares que não podem ser descriptas de modo satisfatório e adequado por meio de figuras geométricas.

A Geometria Fractal, que se refere ao estudo dos fractais, permite descrever aproximadamente formas que não podem ser representadas com as suas propriedades. Esta Geometria foi desenvolvida para lidar com essas estruturas irregulares, permitindo resolver problemas de matemática e de outras ciências, que antes eram considerados invincíveis. Essa área – por exemplo, a Economia –, nas quais as variáveis dependem de muitos fatores, é que o fractal tem sua origem no termo, do adjetivo fractus, relacionado ao verbo frangere que significa quebrar, partilhar.

Uma característica dos fractais é que eles possuem autossimilaridade, ou seja, cada uma de suas partes possui a mesma estrutura que a total, o que permite compará-las a uma couve-folha, por exemplo, ou a um fio de ferro fundido que se沿途分叉. Outra característica comum aos fractais é que eles podem ser obtidos por meio de um processo iterativo, dividindo-se cada vez mais uma figura em inúmeras vezes, o que permite a utilização de recursos tecnológicos para sua construção.

Existem evidências que, a partir de determinados desenhos matemáticos, os homens já utilizavam os fractais há milhares de anos.

A Geometria Fractal vem apresentando aplicações em diversas áreas do conhecimento. Nas artes, é possível observar a utilização de conceitos os incríveis desenhos abstratos e a fantástica mistura de cores que apresenta. Na Biologia, auxilia na compreensão de conceitos complexos, como o crescimento das plantas. Na Medicina, tem sido utilizada em diagnósticos de doenças, como a AIDS, para auxiliar no diagnóstico de doenças. Em Física, torna possível o estudo de superfícies irregulares.

Exemplo de construção de um fractal.

Desenhe um triângulo equilátero dentro de um círculo. Desenhe um triângulo equilátero dentro de cada um dos três lados do triângulo original. Em seguida, dentro de cada um dos seis novos triângulos, desenhe um novo triângulo equilátero dentro de cada um dos três lados. Repita o processo necessariamente.

Fractal inspirado por paisagens

CAPÍTULO 8 - GEOMETRIA FRACAL

A disposição dos galhos de certas árvores apresenta um padrão de auto-similaridade.

CÁPITULO 8 - GEOMETRIA FRACAL

A disposição dos galhos de certas árvores apresenta um padrão de auto-similaridade.

Figura A.19: Novo Olhar Matemática, Volume 3, p.252

Referências Bibliográficas

- [1] BANRSLEY, M. F. *Fractals Everywhere*. Academic Press, New York, 1988.
- [2] BARBOSA, R. M. *Descobrindo a geometria fractal: para sala de aula*. Autêntica, Belo Horizonte, 2005.
- [3] BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM): parte I – bases legais*. MEC/SEF, Brasília, 2000a.
- [4] BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. MEC/SEF, Brasília, 2001.
- [5] EUCLIDES. *Os elementos/Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo*. UNESP, São Paulo, 2009.
- [6] FIORENTINI, D., AND LORENZANATO, S. *Investigação em educação matemática: percursos teórico e metodológicos*. Autores Associados, Campinas, 2009.
- [7] JANOS, M. *Geometria Fractal*. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2008.
- [8] MANDELBROT, B. *Fractals: Form, Chance and Dimension*. W. H. Freeman and Co, New York, 1977.
- [9] MANDELBROT, B. *The Fractl Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Co, New York, 1982.
- [10] PEITGEN, H.-O., JÜRGENS, H., AND SAUPE, D. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer, New York, 1986.
- [11] STEWART, I. *Será que deus joga dados?: a nova matemática do caos*. Zahar, Rio de Janeiro, 2011.

- [12] SZPIRO, G. G. *A vida secreta dos números: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos*/George G. Szpiro; tradução J.R. Souza. DIFEL, Rio de Janeiro, 2008.